

УДК 539.3

## ПАРАМЕТРИЗАЦІЯ ПОШИРЕННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ У СЕРЕДОВИЩІ З АНСАМБЛЯМИ ДИСКОВИХ ВКЛЮЧЕНЬ

В. В. МИХАСЬКІВ<sup>1</sup>, Я. І. КУНЕЦЬ<sup>1</sup>, В. В. МАТУС<sup>1</sup>,  
О. В. БУРЧАК<sup>2</sup>, О. К. БАЛАЛАСЬ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;

<sup>2</sup> Інститут геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова НАН України, Дніпро

Запропоновано метод визначення ефективних (усереднених) швидкостей та коефіцієнтів загасання пружних хвиль у середовищі з двома ансамблями розподілених дискових включень – податливими та слабкоконтрастними. Включення характеризуються як власними ансамблевими об'ємними концентраціями, так і впорядкованою чи хаотичною орієнтаціями у просторі. Реалізація методу передбачає використання дисперсійного співвідношення Фолді із залученням розв'язків задач розсіяння пружних хвиль локальними неоднорідностями. Числово проаналізовано вплив концентрацій різнотипних включень та хвильового числа на ефективну швидкість пружної поздовжньої хвилі.

**Ключові слова:** пружне середовище, дискові включення, дисперсійні співвідношення, ефективні швидкості пружних хвиль, коефіцієнти загасання пружних хвиль.

Присутність у пружному матеріалі множинних тонкостінних неоднорідностей призводить до зміни його фізичних властивостей [1, 2]. Особливий інтерес викликають макродинамічні параметри для їх використання в інженерній практиці неруйнівного контролю пружних середовищ засобами ультразвукового сканування чи акустичної емісії [3–5]. У геофізичному аспекті дані про поширення сейсмічних хвиль у пружних геологічних структурах із множинними розсіювачами необхідні для об'єктивної оцінки нафто- та газонасності порід шляхом їх сейсмоакустичної розвідки, прогнозування викидонебезпечності вугільних пластів тощо [6, 7]. Тому важливою є розробка аналітично-числових методів визначення ефективних (усереднених) динамічних параметрів тривимірних середовищ із розподіленими тонкостінними включеннями, зокрема, з урахуванням ансамблів різнотипних за механічними властивостями неоднорідностей. Огляд та порівняння існуючих підходів до такого аналізу наведено раніше [8, 9]. Для композитів із малою концентрацією наповнювачів, коли їх взаємодією можна знехтувати, ефективним є метод гомогенізації, базований на апроксимаційних співвідношеннях Фолді [10] та інформації щодо дальніх полів у задачах розсіяння пружних хвиль локальними тонкими розсіювачами. За його допомогою досліджували однотипні тонкі неоднорідності, стохастично розташовані у пружній матриці [11–15], де як окремі складові були розв'язки задач розсіяння пружних хвиль на контрастних [16, 17] і слабкоконтрастних [18] поодиноких включеннях. Нижче метод узагальнено за сумісного впливу на макродинамічні хвильові параметри середовища дискових податливих включень і включень, пружні властивості яких несуттєво відрізняються від матричних. Слід відзначити, що такі ансамблі включень моделюють тонкостінні носії вільного і сорбованого газу у вугільних і сланцевих гірських породах [19].

Контактна особа: В. В. МИХАСЬКІВ, e-mail: tex@iapmm.lviv.ua

**Формулювання та метод розв'язання задачі.** Нехай пружне ізотропне середовище з модулями Ламе  $\lambda_0, \mu_0$  та густиною  $\rho_0$  містить рівномірно розподілені пружні дискові включення однакової форми  $W_\varepsilon = \{\mathbf{x}: (x_1, x_2) \in W_0, 2|x_3| \leq h(x_1, x_2)\}$ . Тут  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  – декартові координати;  $W_0$  – серединна поверхня включення (круг радіуса  $a$ );  $h(x_1, x_2)$  – товщина включення, причому  $\varepsilon = \max_{\mathbf{x} \in W_0} h(\mathbf{x})/a$  – малий

безрозмірний параметр. Просторова орієнтація включень може бути випадковою або впорядкованою. Масив наповнювачів утворюється ансамблями податливих і слабоконтрастних включень з механічними характеристиками  $\lambda_1, \mu_1, \rho_1$  і  $\lambda_2, \mu_2, \rho_2$  та об'ємними концентраціями у середовищі  $e_1$  та  $e_2$ , відповідно. Цей поділ включень регламентується виконанням таких умов для їх пружних характеристик:

$$\max(\lambda_1, \mu_1) / \max(\lambda_0, \mu_0) \ll \varepsilon, \quad \varepsilon \leq \max(\lambda_2, \mu_2) / \max(\lambda_0, \mu_0) \leq 1/\varepsilon. \quad (1)$$

Вектори переміщень у матриці та неоднорідностях задовольняють відповідні динамічні рівняння Ламе за умов ідеального механічного контакту між складовими композита, тобто неперервності переміщень і напружень на поверхнях поділу матеріалів.

Припускаємо, що чинником хвильового збурення є плоска поздовжня пружна хвиля (поширення пружних хвиль поперечних мод аналізуємо аналогічно) з вектором переміщень

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{in}(\mathbf{x}) &= A_0 \mathbf{l} \exp[ik_1(\mathbf{l}, \mathbf{x})], \quad \mathbf{l} = (l_1, 0, l_3), \\ x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi; \\ l_1 &= -\sin \theta_{in}, \quad l_3 = -\cos \theta_{in}, \quad \varphi_{in} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $A_0$  та  $\mathbf{l}$  – амплітуда та напрям поширення хвилі;  $\theta_{in}, \varphi_{in}$  – кути її падіння;  $k_1$  – хвильове число пружних поздовжніх хвиль у матриці;  $(r, \theta, \varphi)$  – сферичні координати. Реакція розглянутого композитного середовища на динамічні збурення характеризується дисперсією та загасанням хвиль, спричиненими їх багатократним розсіянням на системі включень [8, 12]. Ці явища можна описати, вводячи комплексне, залежне від частоти коливаний пружної системи  $\omega$ , хвильове число у вигляді

$$K_1(\omega) = \omega / c^*(\omega) + i\alpha(\omega), \quad (3)$$

де  $K_1(\omega)$  – хвильове число поздовжньої хвилі у гомогенізованому ефективному середовищі,  $c^*(\omega)$  та  $\alpha(\omega)$  – ефективна фазова швидкість поздовжньої хвилі та коефіцієнт її загасання. З огляду на формулу (3), введені хвильові характеристики середовища визначають так:

$$c^*(\omega) = \frac{\omega}{\operatorname{Re}[K_1(\omega)]}, \quad \alpha(\omega) = \operatorname{Im}[K_1(\omega)]. \quad (4)$$

Тоді переміщення плоскої поздовжньої гармонічної хвилі, яка поширюється у напрямку  $\mathbf{n}$  з вектором амплітуди  $\mathbf{U}$ , у макроскопічному наближенні має вигляд

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{U} \exp[iK_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})] = \mathbf{U} \exp[-\alpha(\omega)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})] \exp[i\omega(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})/c^*(\omega)]. \quad (5)$$

За малої концентрації включень у матриці (рідкий розподіл) їхньою взаємодією можна знехтувати. За цих припущень комплексне хвильове число  $K_1(\omega)$  обчислюємо за допомогою дисперсійного співвідношення Фолді [11, 12], яке за врахування двох ансамблів розсіювачів набуває форми

$$K_1^2 = k_1^2 + \sum_{m=1}^2 \bar{K}_m^2, \quad \bar{K}_m^2 = e_m a^{-3} \bar{F}_m. \quad (6)$$

Тут  $\bar{K}_m^2$  ( $m=1,2$ ) – складові, які описують внесок податливих включень, коли  $m=1$ , та слабконтрастних включень, коли  $m=2$ ,  $\bar{F}_m$  – усереднена амплітуда розсіяння поздовжньої хвилі поодиноким включенням у дальню хвильову зону у напрямку поширення хвилі. Для впорядковано орієнтованих розсіювачів, тобто за їх паралельного розташування

$$\bar{F}_m(\theta_{in}) = F_m(\theta_{sc}, \varphi_{sc}), \theta_{sc} = \theta_{in} + \pi, \varphi_{sc} = \pi, m=1,2, \quad (7)$$

для випадково орієнтованих –

$$\bar{F}_m = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_m(\theta_{sc}, \varphi_{sc}) \sin \theta_{sc} d\theta_{sc} d\varphi_{sc} = \frac{1}{2} \int_0^\pi F_m(\theta_{sc}, \pi) \sin \theta_{sc} d\theta_{sc}, \quad (8)$$

$$\theta_{sc} = \theta_{in} + \pi, m=1,2.$$

У співвідношеннях (7), (8)  $F_m(\theta_{sc}, \varphi_{sc})$  – амплітуди розсіяння поздовжніх хвиль у дальню зону поодиноким тонким включенням з відповідними механічними властивостями ( $m=1,2$ ) за падіння на нього хвилі (2);  $\theta_{sc}, \varphi_{sc}$  – кути спостереження розсіяних хвиль у дальній зоні.

Наведемо алгоритми обчислень амплітуд  $F_m(\theta_{sc}, \varphi_{sc})$  ( $m=1,2$ ) для кожного типу розсіювачів. Для податливого включення за обмежень (1) крайові умови ідеального механічного контакту між матрицею та включенням зводять до пропорційних залежностей в області  $W_0$  між напруженнями і стрибками переміщень на неоднорідності [11, 12]. Задовольнивши ці умови шляхом інтегрального подання компонент переміщень  $u_j$  ( $j=1,2,3$ ) у матриці через потенціали Гельмгольца, отримаємо систему граничних інтегральних рівнянь для визначення функцій розходження поверхонь податливого включення  $\Delta u_j(x_1, x_2) = u_j(x_1, x_2, +0) - u_j(x_1, x_2, -0)$  у вигляді

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)h^{-1}(\mathbf{x})\Delta u_3(\mathbf{x}) - \frac{4\mu_0}{k_2^2} \iint_{W_0} \Delta u_3(\boldsymbol{\xi})R_3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})dW_\xi = \sigma_{33}^{in}(\mathbf{x}),$$

$$\mu_1 h^{-1}(\mathbf{x})\Delta u_\beta(\mathbf{x}) - \frac{4\mu_0}{k_2^2} \iint_{W_0} [\Delta u_\beta(\boldsymbol{\xi})R_\beta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \Delta u_{(3-\beta)}(\boldsymbol{\xi})R_4(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})]dW_\xi = \sigma_{3\beta}^{in}(\mathbf{x}), \beta=1,2, \mathbf{x} \in W_0. \quad (9)$$

Тут  $\sigma_{3j}^{in}(\mathbf{x})$  – відомі компоненти тензора напружень, спричинені хвилею (2);  $k_2$  – хвильове число поперечних хвиль у матриці;  $R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  – гіперсингулярні ядра, наведені у праці [16]. Числово-аналітичний метод розв'язання системи граничних інтегральних рівнянь (9) базується на їх регуляризації та гранично-елементній дискретизації з урахуванням кореневої поведінки функцій  $\Delta u_j$  на контурі області  $W_0$  [16]. Визначивши із рівнянь (9) функції  $\Delta u_j(\mathbf{x})$ , амплітуди розсіяння поздовжніх хвиль обчислимо за формулою

$$F_1(\theta_{sc}, \varphi_{sc}) = ik_1 \sum_{j=1}^3 [2\zeta^2 v_j v_3 + (1 - 2\zeta^2) \delta_{j3}] \iint_{W_0} \exp(-ik_1(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\xi})) \Delta u_j(\boldsymbol{\xi}) dW_\xi,$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), v_1 = \sin \theta_{sc} \cos \varphi_{sc}, v_2 = \sin \theta_{sc} \sin \varphi_{sc}, v_3 = \cos \theta_{sc}, \quad (10)$$

де  $\mathbf{v}$  – одиничний вектор, що визначає напрям поширення розсіяної хвилі,  $\zeta = k_2/k_1$ ,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Зауважимо, що співвідношеннями (9), (10) моделюють також розсіяння хвиль тонкостінними (тріщиноподібними) порожнинами з рідинним або газовим наповнювачами. Тоді слід прирівняти до нуля функції  $\Delta u_j$ , коли  $j = 1, 2$ , а коефіцієнт  $\lambda_1 + 2\mu_1$  замінити на коефіцієнт стисливості відповідного акустичного середовища.

Слабоконтрастне дискове включення з обмеженнями (1) у хвильовому полі (2) описуємо детермінованими зв'язками стрибків переміщень і напружень в області  $W_0$  з параметрами набігаючої хвилі [15, 18]. У цьому випадку амплітуду розсіяння поздовжніх хвиль отримуємо аналітично у замкнутій формі:

$$F_2(\theta_{sc}, \varphi_{sc}) = -A_0 k_1^2 L \sum_{j=1}^3 (a_j \Phi_j + \mu_0^{-1} b_j \Psi_j);$$

$$\Phi_1 = 2 \left( 1 - \frac{\mu_0}{\mu_2} \right) l_1 l_3, \quad \Phi_2^\alpha = 0, \quad \Phi_3 = (\lambda_2 + 2\mu_2)^{-1} [(\lambda_2 - \lambda_0) + 2(\mu_2 - \mu_0) l_3^2];$$

$$\Psi_1 = v_1 \left[ (\lambda_2 + 2\mu_2 - \lambda_0 - 2\mu_0) + 2(\mu_2 - \mu_0) l_3^2 \right] + (\lambda_0 + 2\mu_0) \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_0} \right) l_1,$$

$$\Psi_2 = v_2 (\lambda_2 - \lambda_0) (l_1 + l_3), \quad \Psi_3 = (\lambda_0 + 2\mu_0) \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_0} \right) l_3;$$

$$a_j = ((1 - 2\zeta^2) \delta_{3j} + 2\zeta^2 v_j v_3), \quad b_j = \zeta^2 v_j;$$

$$L = \int_{W_0} h(\xi_1, \xi_2) \exp\{-ik_1[(v_1 - l_1)\xi_1 + v_2 \xi_2]\} dW_\xi. \quad (11)$$

Отже, визначити ефективні динамічні властивості розглянутої композитної структури можна підстановкою амплітуд розсіяння (10), (11) для двох ансамблів дискових включень у формули усереднення (7), (8), а потім гомогенізаційні співвідношення (3)–(6).

**Числовий аналіз ефективних швидкостей поздовжніх хвиль.** Під час розрахунків розглядали композит з коефіцієнтом Пуассона матеріалу матриці  $\nu_0 = 0,3$  та ансамблями впорядкованих (паралельних) дискових включень постійної товщини з параметром  $\varepsilon = h/a = 0,1$ . Коефіцієнти Ламе податливих включень вибирали такими:  $(\lambda_1 + 2\mu_1)/(\lambda_0 + 2\mu_0) = 0,01$ . Слабоконтрастні включення розглядали як м'якими, так і твердими щодо матриці зі співвідношеннями  $(\lambda_2 + 2\mu_2)/(\lambda_0 + 2\mu_0) = 0,2$  та  $(\lambda_2 + 2\mu_2)/(\lambda_0 + 2\mu_0) = 5,0$ , відповідно. Їх густини прирівнювались до матричних. Аналізували дисперсійні залежності нормованих ефективних швидкостей поздовжніх хвиль  $\bar{c} = \sqrt{\rho_0 / (\lambda_0 + 2\mu_0)} c^*$  за поширення у перпендикулярному до включень напрямку для композита з різними об'ємними концентраціями неоднорідностей.

Пружне середовище з масивом податливих і м'яких слабоконтрастних включень характеризується меншими ефективними швидкостями хвиль порівняно з такими у однорідному матричному матеріалі (рис. 1а, б), що є виразнішим для більших об'ємних концентрацій вказаних ансамблів неоднорідностей. За присутності твердих слабоконтрастних включень ефективні швидкості хвиль більші від матричної (рис. 1с, д) і вказаний ефект посилюється зі збільшенням об'ємної концентрації таких включень. У низькочастотному діапазоні ріст нормалізованого хвильового числа  $k_2 a$  призводить до зниження ефективних швидкостей до мінімуму, коли  $k_2 a \approx 1,4$ . Надалі спостерігаємо збільшення ефективних швидкостей  $\bar{c}$  зі зростанням хвильового числа. Винятком є розподіл у середовищі лише слабоконтрастних включень ( $e_1 = 0$ ), для яких дисперсійні хвильові явища відсутні

(ефективні швидкості не змінюються за хвильовим числом, але залежать від пружних властивостей включень і їх об'ємної концентрації  $e_2$ , рис. 2). Аналіз фіксованої об'ємної концентрації одного із розглянутих ансамблів включень (рис. 1) показує, що така ж зміна об'ємної концентрації податливих включень стосовно слабоконтрастних забезпечує більше розходження значень ефективних швидкостей. За дотримання однакової сумарної об'ємної концентрації ансамблів податливих і м'яких слабоконтрастних включень  $e_1 + e_2 = 0,2$  (рис. 2a) в області малих хвильових чисел суттєвіший вплив на ефективні швидкості мають податливі, а в області вищих хвильових чисел – слабоконтрастні. Цей ефект враховується мірою відхилення ефективної швидкості хвиль у композиті від такої у однорідному матричному матеріалі. Аналогічне дотримання вмісту податливих і твердих слабоконтрастних включень (рис. 2b) засвідчує максимальне значення ефективної швидкості на всьому розглянутому діапазоні хвильових чисел за відсутності у масиві ансамблю податливих включень.

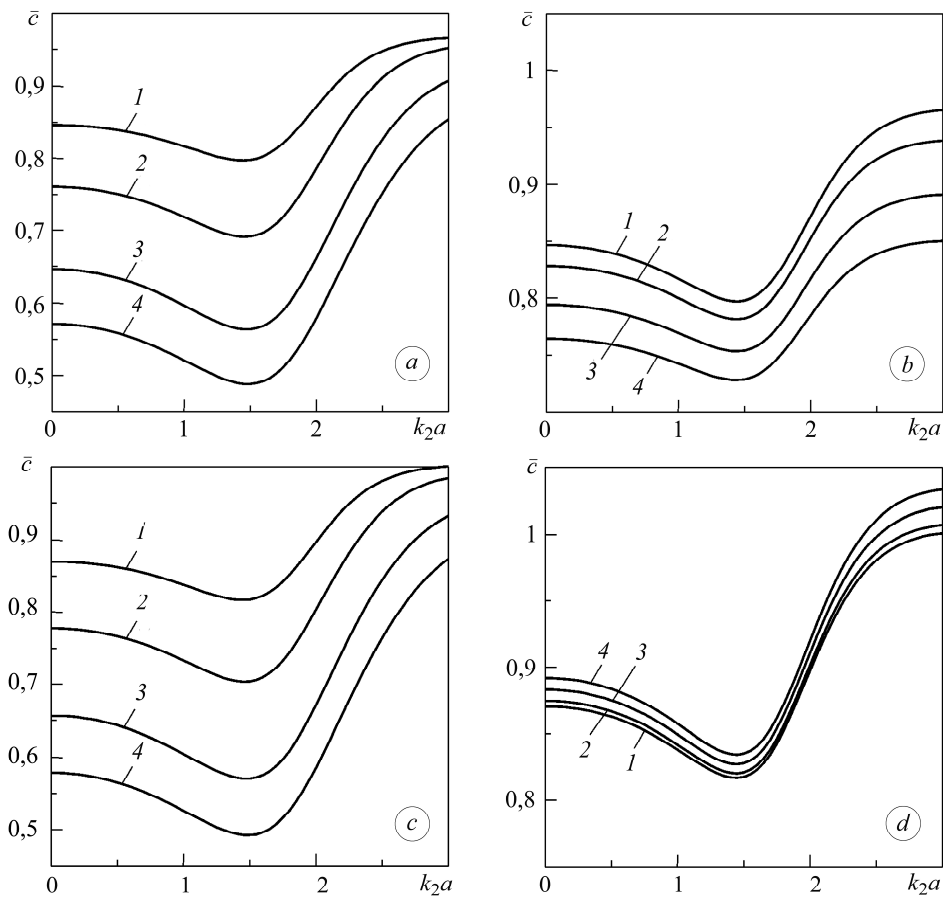


Рис. 1. Залежності нормованих ефективних швидкостей поздовжніх пружних хвиль від безрозмірного хвильового числа у середовищі із податливими і м'якими (a, b) та податливими і твердими (c, d) слабоконтрастними дисковими включеннями за фіксації об'ємної концентрації другого (a, c:  $e_2 = 0,05$ ,  $e_1 = 0,05$  (1), 0,1 (2), 0,2 (3), 0,3 (4)) та першого (b, d:  $e_1 = 0,05$ ,  $e_2 = 0,05$  (1), 0,1 (2), 0,2 (3), 0,3 (4)) ансамблів включень.

Fig. 1. Dependences of normalized effective velocities of longitudinal elastic waves on dimensionless wave number in the media with compliant and soft (a, b), and compliant and hard (c, d) low-contrast disc inclusions for the fixed volume concentration of the second (a, c:  $e_2 = 0.05$ ,  $e_1 = 0.05$  (1), 0.1 (2), 0.2 (3), 0.3 (4)) and the first (b, d:  $e_1 = 0.05$ ,  $e_2 = 0.05$  (1), 0.1 (2), 0.2 (3), 0.3 (4)) inclusion ensembles.

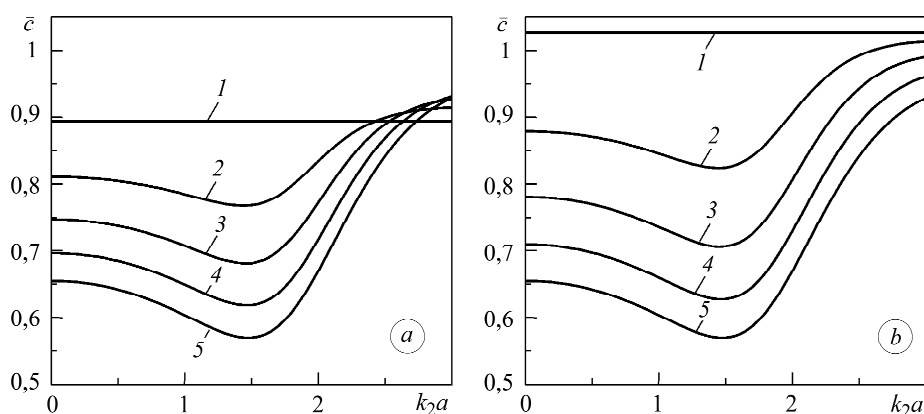


Рис. 2. Залежності нормованих ефективних швидкостей поздовжніх пружних хвиль від безрозмірного хвильового числа у середовищі із податливими і м'якими (а) або твердими (б) слабоконтрастними дисковими включеннями за фіксації сумарної об'ємної концентрації ансамблів включень  $e_1 + e_2 = 0,2$ : 1 –  $e_1 = 0, e_2 = 0,2$ ; 2 –  $e_1 = 0,05, e_2 = 0,15$ ; 3 –  $e_1 = 0,1, e_2 = 0,1$ ; 4 –  $e_1 = 0,15, e_2 = 0,05$ ; 5 –  $e_1 = 0,2, e_2 = 0$ .

Fig. 2. Dependences of normalized effective velocities of longitudinal elastic waves on dimensionless wave number in the media with compliant and soft (a) or hard (b) low-contrast disc inclusions for the fixed total volume concentration of inclusion ensembles  $e_1 + e_2 = 0,2$ : 1 –  $e_1 = 0, e_2 = 0,2$ ; 2 –  $e_1 = 0,05, e_2 = 0,15$ ; 3 –  $e_1 = 0,1, e_2 = 0,1$ ; 4 –  $e_1 = 0,15, e_2 = 0,05$ ; 5 –  $e_1 = 0,2, e_2 = 0$ .

## ВИСНОВКИ

На основі дисперсійного співвідношення Фолді та моделей динамічної взаємодії тонких неоднорідностей з пружною матрицею розроблено метод визначення усереднених швидкостей поздовжніх хвиль та коефіцієнтів їх затухання у композиті із випадково або впорядковано розміщеними двома ансамблями тонких дискових пружних наповнювачів слабої контрастності та низької жорсткості. Цей метод можна використати для розв'язання відповідної оберненої задачі визначення концентрації наповнювачів у пружному середовищі за замірами ефективних швидкостей у розглянутих композитних середовищах. Встановлено, що за однакової сумарної об'ємної концентрації ансамблів податливих і м'яких слабоконтрастних включень в області низьких хвильових чисел суттєвіший вплив на ефективні швидкості мають податливі, а в області вищих хвильових чисел – слабоконтрастні. За однакового сумарного вмісту податливих і твердих слабоконтрастних включень максимальні значення усереднених швидкостей у всьому розглянутому частотному діапазоні спостерігали за відсутності податливих включень. Показано також, що за наявності тільки слабоконтрастних наповнювачів у композиті дисперсія поздовжніх хвиль відсутня.

**РЕЗЮМЕ.** Предложен метод определения эффективных (усредненных) скоростей и коэффициентов затухания упругих волн в среде с двумя ансамблями совместно распределенных дисковых включений – податливыми и слабоконтрастными. Включения характеризуются как собственными ансамблевыми объемными концентрациями, так и упорядоченной либо хаотической ориентациями в пространстве. Реализация метода предусматривает использование дисперсионного соотношения Фолди с привлечением решений задач рассеяния упругих волн локальными неоднородностями. Численно проанализировано влияние концентраций разнотипных включений и волнового числа на эффективную скорость упругой продольной волны.

**SUMMARY.** Method for the determination of effective (averaged) velocities and attenuation coefficients of elastic waves in the medium with two ensembles of distributed disc inclusions, namely compliant and low-contrast, is proposed. The inclusions are characterized by the proper ensemble volume concentrations, as well as by aligned or random space orientations. Method realization foresees the application of Foldy's dispersion relation involving the solution

of wave scattering problem by single inhomogeneity. The influence of volume concentration of different type inclusions and wave number on the effective velocity of elastic longitudinal wave is numerically analyzed.

1. *Tamuzs V., Romalis N., and Petrova V.* Fracture of Solids with Microdefects. – New York: Nova Science Publications Inc., 2000. – 238 p.
2. *Хорошун Л. П., Шикун Е. Н.* Деформирование и долговременная повреждаемость однородных и композитных материалов стохастической структуры (обзор) // Прикладная механика. – 2012. – **48**, № 1. – С. 12–72.
3. *Андрейків О. С., Скальський В. Р., Сулим Г. Т.* Теоретичні основи методу акустичної емісії в механіці руйнування. – Львів, СПОЛІОМ, 2007. – 480 с.
4. *Назарчук З. Т., Скальський В. Р.* Акустико-емісійне діагностування елементів конструкцій: у 3 т. Т. 1. Теоретичні основи методу акустичної емісії. – К.: Наук. думка, 2009. – 288 с.
5. *Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т., Войтко М. В.* Про зв'язок коефіцієнтів інтенсивності напружень з дальнім полем SH-хвилі, дифрагованої на міжфазній тріщині // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 3. – С. 5–12.  
(*Kurylyak D. B., Nazarchuk Z. T., and Voitko M. V.* On the relationship between the stress intensity factors and the far field of SH-waves diffracted on interface cracks // Materials Science. – 2009. – **45**, № 3. – P. 329–339.)
6. *Selvadurai A. P. S.* The analytical method in geomechanics // Applied Mechanics Reviews. – 2007. – **60**. – P. 87–106.
7. *Геологические основы и методы выбросоопасности угля, пород и газа / А. Ф. Булат, В. В. Лукинов, Л. И. Пимоненко, К. А. Безручко, А. В. Бурчак.* – Днепропетровск: Монолит, 2012. – 360 с.
8. *Martin P. A.* Multiple Scattering Interaction of Time-Harmonic Waves with N Obstacles. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 437 p.
9. *Conoir J. M. and Norris A. N.* Effective wave numbers and reflection coefficients for an elastic medium containing random configurations of cylindrical scatterers // Wave Motion. – 2010. – **47**. – P. 183–197.
10. *Foldy L. L.* Multiple scattering theory of waves // Physical Review. – 1945. – **67**. – P. 107–119.
11. *Eriksson A. S., Boström A., and Datta S. K.* Ultrasonic wave propagation through a cracked solid // Wave Motion. – 1995. – **22**. – P. 297–310.
12. *Zhang Ch. and Gross D.* On Wave Propagation in Elastic Solids with Cracks. – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1998. – 248 p.
13. *Mykhas'kiv V. V.* Numerical Simulation of Wave Propagation in 3D Elastic Composites with Rigid Disk-Shaped Inclusions of Variable Mass: Chapter 2. Composites and Their Applications / Ed. by N. Hu. – Rijeka: InTech Press, 2012. – P. 17–36.
14. *Kanaun S. K. and Levin V. M.* Self-Consistent Methods for Composites. Vol. 2. Wave Propagation in Heterogeneous Materials. – Heidelberg: Springer, 2008. – 294 p.
15. *Михаськів В. В., Кунець Я. І., Матус В. В.* Ефективна швидкість поздовжньої хвилі у пружному середовищі із дисковими включеннями слабкої контрастності // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2013. – **17**. – С. 131–139.
16. *Кум Г. С., Кунець Я. І., Михаськів В. В.* Взаимодействие стационарной волны с тонким дискообразным включением малой жесткости в упругом теле // Изв. РАН. Мех. твердого тела. – 2004. – № 5. – С. 82–89.
17. *Хай О. М.* Рассеяние гармонических волн дисковым жестким включением в трехмерную упругую матрицу // Изв. РАН. Мех. твердого тела. – 2008. – № 6. – С. 85–94.
18. *Кунець Я. І., Матус В. В., Грилицький М. Д.* Дистанційне визначення механічних параметрів тонких плоских включень низької контрастності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 5. – С. 118–123.  
(*Kunets' Ya. I., Matus V. V., and Hrylyts'kyi M. D.* Remote determination of mechanical parameters of thin flat inclusions of low contrast // Materials Science. – 2012. – **47**, № 5. – P. 703–709.)
19. *Вуглепородний масив – альтернативне джерело вуглеводнів в Україні / К. А. Безручко, Л. І. Пимоненко, О. В. Бурчак, О. К. Балалаєв // Матеріали Міжнар. наук. конф. “Нетрадиційні джерела вуглеводнів в Україні: пошуки, розвідка, перспективи” (Київ, 27–29 листопада, 2013).* – К.: Київськ. нац. ун-т ім. Т. Г. Шевченка, 2013. – С. 24–26.

Одержано 12.03.2015