

УДК 621:319:519.22

## СТАТИСТИЧНИЙ ВЕКТОРНО-ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ ВІБРАЦІЙ ЦЕНТРИФУГИ З РОЗВИНУТИМ ДЕФЕКТОМ ОБЕРТОВОГО ВУЗЛА

*I. Й. МАЦЬКО<sup>1</sup>, I. М. ЯВОРСЬКИЙ<sup>1,2</sup>, Р. М. ЮЗЕФОВИЧ<sup>1,3</sup>, П. О. СЕМЕНОВ<sup>4</sup>*

<sup>1</sup> Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

<sup>2</sup> Технологічно-природничий університет, Бидгощ, Польща;

<sup>3</sup> Національний університет "Львівська політехніка";

<sup>4</sup> ТОВ "ПОРТТЕХЕКСПЕРТ", Ізмаїл

Методами когерентного та компонентного аналізу векторних періодично корельованих випадкових процесів досліджена структура оцінок лінійних і квадратичних інваріантів кореляційної тензор-функції стохастичних вібрацій центрифуги, проаналізовані їх амплітудні спектри. Показано, що використання інваріантів дає можливість підвищити ефективність вібраційної діагностики, встановити просторові зміни вібраційних навантажень за появи дефекту і локалізувати його.

**Ключові слова:** векторні періодично корельовані випадкові процеси, вібрації центрифуги, кореляційні інваріанти, рухомий дефект, просторові властивості.

Векторні періодично корельовані випадкові процеси (ПКВП) є природною моделлю для опису вібрацій, оскільки фізичні величини, які їх характеризують, а саме: переміщення, швидкість, прискорення, є векторами. Визначальною рисою векторного підходу є можливість введення в розгляд інваріантних величин, які характеризують стан об'єкта незалежно від того, в якій системі координат виконували вимірювання [1–3]. Стохастичність й повторюваність вібрацій адекватно відображаються в математичних сподіваннях складових випадкового вектора  $\vec{\xi}(t) = i \xi_1(t) + j \xi_2(t)$ , тобто у функціях  $m_{\xi_p}(t) = E \xi_p(t)$ ,  $p = \overline{1,2}$ ,  $E$  – оператор математичного сподівання, а також в авто-  $b_{\xi_p}(t, \tau) = E \overset{\circ}{\xi}_p(t) \overset{\circ}{\xi}_p(t + u)$ ,  $\overset{\circ}{\xi}_p(t) = \xi_p(t) - m_{\xi_p}(t)$  та взаємкореляційних функціях  $b_{\xi_p \xi_q}(t, u) = E \overset{\circ}{\xi}_p(t) \overset{\circ}{\xi}_q(t + u)$ . Сумісною кореляційною характеристикою є кореляційна тензор-функція:

$$b_{\vec{\xi}}(t, u) = E \vec{\xi}(t) \otimes \vec{\xi}(t + \tau) = \begin{bmatrix} b_{\xi_1}(t, u) & b_{\xi_1 \xi_2}(t, u) \\ b_{\xi_2 \xi_1}(t, u) & b_{\xi_2}(t, u) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Тут  $\otimes$  – знак тензорного добутку. На основі елементів матриці (1) можна сформулювати величини, які не залежать від системи координат, в якій виміряні складові вектора  $\vec{\xi}(t)$ . Найпростішими з них є лінійні інваріанти  $I_1(t, u)$  та  $D(t, u)$ , які є, відповідно, середніми значеннями скалярного та скісного добутків векторів  $\vec{\xi}(t)$  і  $\vec{\xi}(t + u)$  [1–3]. З іншого боку, інваріант  $I_1(t, u)$  є сумою елементів головної діагоналі матриці (1), а його використання дає можливість збільшити ефективність

Контактна особа: Р. М. ЮЗЕФОВИЧ, e-mail: roman.yuzefovych@gmail.com

виявлення дефектів. Інваріант  $D(t, u)$  є різницею елементів другої діагоналі матриці (1). Він є індикатором обернення.

Квадратичний інваріант  $I_2(t, \tau)$  є визначником симетричної складової матриці (1) і основною характеристикою для класифікації її квадратичних форм. Власні значення інваріанта  $I_2(t, u)$ , а саме  $\lambda_1(t, u)$  та  $\lambda_2(t, u)$ , визначають екстремальні значення кореляційної функції за ортогональними напрямками. На їх основі можна побудувати криві другого порядку, параметри яких є ефективними ознаками для встановлення геометричних розмірів дефекту.

Мета роботи – проаналізувати властивості лінійних та квадратичних інваріантів вібрацій центрифуги за наявності дефекту обертового вузла. Записували вібраційні сигнали під час діагностичних робіт на одному з підприємств України з використанням розробленої у ФМІ НАН України вібродіагностичної системи “Вектор”. Верхня частота пропускання аналогового фільтра системи – 5 kHz, частота дискретизації – 10 kHz, час запису реалізацій – 20 s. Фрагмент реалізації вертикальної складової вібрації показаний на рис. 1. На ньому чітко видно викиди, які йдуть один за одним з частотою обернення вала.

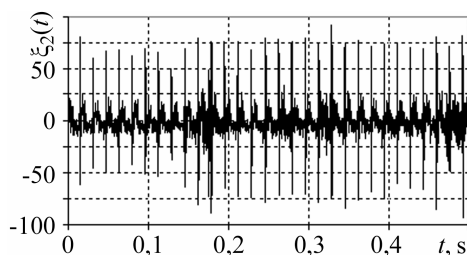


Рис. 1. Фрагмент реалізації вертикальної складової вібраційного сигналу.

Fig. 1. Fragment of realization of vibration signal vertical component.

Щоб аналізувати кореляційну структуру сигналів, вибрали методи статистики ПКВП. Першим етапом за такого підходу є поділ вібрацій на детерміновану та стохастичну складові. Застосуємо для цього когерентний метод, за якого оцінка математичного сподівання, яка описує детерміновану складову вертикальної чи горизонтальної вібрації, має вигляд

$$\hat{m}_{\xi_1, \xi_2}(t, \tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \begin{Bmatrix} \xi_1(t+n\tau) \\ \xi_2(t+n\tau) \end{Bmatrix},$$

де  $\tau$  – тестовий період. Оскільки дискретні значення вібраційного сигналу отримані з кроком  $h = 10^{-4}$  s, то й величини  $t$  та  $\tau$  можна змінювати з таким же кроком. Для точнішого визначення періоду виконаємо передискретизацію даних, використовуючи формулу Котельникова–Шеннона:

$$\xi_{1,2}(t) = \sum_{n=-M}^M \xi_{1,2}(nh) \frac{\sin \omega_{\max}(t-nh)}{\omega_{\max}(t-nh)},$$

де  $\omega_{\max}$  – максимальна частота сигналу. Її вибрали рівною верхній частоті пропускання вхідного аналогового фільтра, тобто 5 kHz. Час  $t$  виберемо близьким до точки максимуму оцінки  $\hat{m}_{\xi_2}(t, \tau)$ . Відносна середньоквадратична похибка оцінки за такої довжини реалізації є меншою 2%. Залежність оцінки  $\hat{m}_{\xi_2}(t, \tau)$  від пробного періоду  $N = 1000$  показана на рис. 2a. Максимального значення ця величина набуває при  $\tau = 1,6667 \cdot 10^{-2}$  s. Його приймемо за оцінку періоду математичного сподівання вертикальної складової вібрації  $\hat{m}_{\xi_2}(t, \hat{T})$ . Йому відповідає частота  $\hat{f} = 59,998$  Hz. Залежність оцінки  $\hat{m}_{\xi_2}(t, \hat{T})$ , яка описує детерміновану складову (рис. 2b), від часу характеризується потужними викидами, які повторю-

ються через період обертання вала. На основі значень оцінки на періоді  $[0, \hat{T}]$  знайдемо амплітудний спектр детермінованої складової вертикальної вібрації. Оцінки амплітуд гармонік  $|\hat{m}_k^{(\xi_2)}|$  обчислимо, використовуючи формули [1, 6]

$$\begin{cases} \hat{m}_k^c \\ \hat{m}_k^s \end{cases} = \frac{2}{L+1} \sum_{n=0}^L \hat{m}_{\xi_2}(n\tilde{h}, \hat{T}) \begin{cases} \cos k \frac{2\pi}{L+1} n \\ \sin k \frac{2\pi}{L+1} n \end{cases}, \quad |\hat{m}_k^{(\xi_2)}| = \sqrt{(\hat{m}_k^c)^2 + (\hat{m}_k^s)^2},$$

при цьому  $\tilde{h} = \hat{T}/(L+1)$ . Значення амплітуд гармонік показані у вигляді діаграми (рис. 2с), яка є графічним поданням амплітудного спектра. Він є досить широким, значущими є біля 40 гармонік, що відповідає ширині спектра  $\sim 2,5$  kHz. Відносна середньоквадратична похибка такої апроксимації є меншою 3%.

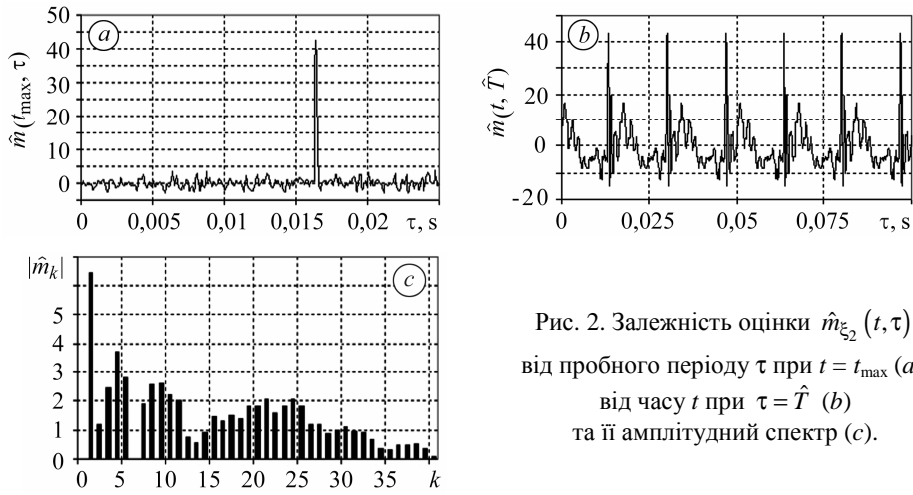


Рис. 2. Залежність оцінки  $\hat{m}_{\xi_2}(t, \tau)$  від пробного періоду  $\tau$  при  $t = t_{\max}$  (а), від часу  $t$  при  $\tau = \hat{T}$  (б) та її амплітудний спектр (с).

Fig. 2. Dependence of estimator  $\hat{m}_{\xi_2}(t, \tau)$  on test period  $\tau$  at  $t = t_{\max}$  (a), on time  $t$  at  $\tau = \hat{T}$  (b) and its amplitude spectrum (c).

Подібні результати отримуємо після обробки горизонтальної складової вібрації. Відмітимо, що оцінка періоду, обчислена на її основі, відрізняється від попередньої тільки шостим знаком.

Стохастичні частини обох складових отримуємо після центрування початкових даних на оцінки математичних сподівань, тобто

$$\overset{\circ}{\xi}_1(t) = \xi_1(t) - \hat{m}_{\xi_1}(t, \hat{T}), \quad \overset{\circ}{\xi}_2(t) = \xi_2(t) - \hat{m}_{\xi_2}(t, \hat{T}).$$

Перед інваріантною кореляційною обробкою цих складових пошукаємо приховані періодичності у часових змінах кореляційних властивостей кожної з них. Для цього використаємо симетричне когерентне усереднення кореляційного добутку [1, 4, 5]:

$$\begin{cases} \hat{b}_{\xi_1}(t, u, \tau) \\ \hat{b}_{\xi_2}(t, u, \tau) \end{cases} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \begin{cases} \overset{\circ}{\xi}_1(t+n\tau) \overset{\circ}{\xi}_1(t+u+n\tau) \\ \overset{\circ}{\xi}_2(t+n\tau) \overset{\circ}{\xi}_2(t+u+n\tau) \end{cases}. \quad (2)$$

Тут кількість періодів усереднення, як і вище,  $N = 1000$ . Відносна середньоквадратична похибка оцінювання кореляційних характеристик при цьому є меншою

8%. Така статистика, коли  $\frac{\partial^2 \hat{b}_{\xi_p}(t, u, \tau)}{\partial t^2} \neq 0$ , набуває екстремальних значень при  $\tau$ , які є близькими до періоду нестационарності  $T$ , якщо аналізовані дані є реалізацією ПКВП. Найчіткіше такі екстремуми проявляються для тих моментів часу, які є близькими до екстремумів кореляційних функцій  $b_{\xi_p}(t, u)$ . Графіки залежностей статистик (2) від пробного періоду  $\tau$  при  $u = 0$  для моментів часу  $t$ , що є близькими до максимальних значень оцінок, показані на рис. 3. Як бачимо, статистики (2) набувають чітко виражених пікових значень, які набагато перевищують рівень флуктуаційних змін. Точки екстремумів є близькими до періоду обертання вала.

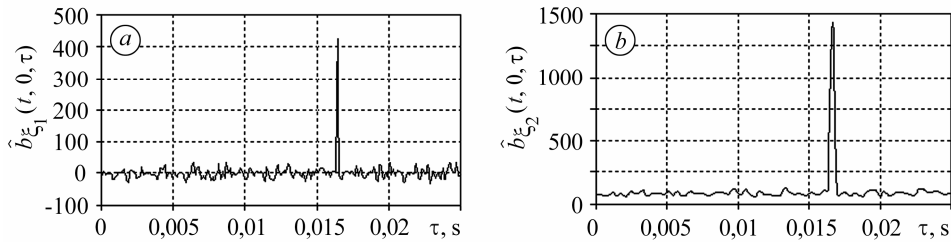


Рис. 3. Залежність статистик (2) від пробного періоду  $\tau$  при  $u = 0$ .

Fig. 3. Dependence of statistics (2) on test period  $\tau$  at  $u = 0$ .

Точніші обчислення показують, що вони відрізняються між собою та від оцінок періодів математичних сподівань тільки шостим знаком після коми. Тому і тут приймемо  $\hat{T} = 1,6667 \cdot 10^{-2}$  s.

З огляду на наведене значення оцінки періоду, обчислимо оцінки лінійних інваріантів

$$\hat{I}_1(t, u, \hat{T}) = \hat{b}_{\xi_1}(t, u, \hat{T}) + \hat{b}_{\xi_2}(t, u, \hat{T}), \quad (3)$$

$$\hat{D}(t, u, \hat{T}) = \hat{b}_{\xi_1 \xi_2}(t, u, \hat{T}) - \hat{b}_{\xi_2 \xi_1}(t, u, \hat{T}), \quad (4)$$

використовуючи когерентний метод, тобто формулу (2) і

$$\hat{b}_{\xi_p \xi_q}(t, u, \hat{T}) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \xi_p^\circ(t+n\tau) \xi_q^\circ(t+u+n\tau),$$

підставляючи в них оцінку періоду  $\tau = \hat{T}$ . На рис. 4a наведені графічні залежності оцінок  $\hat{I}_1(t, 0)$  та  $\hat{D}(t, \tau_m)$  від часу. Оскільки інваріант  $\hat{D}(t, \tau)$  при  $u = 0$  дорівнює нулю, то для ілюстрації його часової залежності вибраний інший зсув, який відповідає його першому максимуму.

Часові залежності обох величин мають на періоді обертання вала потужні піки, максимальні значення яких суттєво перевищують рівні інших часових змін. Оцінки коефіцієнтів Фур'є інваріантів, обчислених за формулами

$$\hat{B}_0^{(I_1, D)}(jh) = \frac{1}{L+1} \sum_{n=0}^L \begin{Bmatrix} \hat{I}_1(nh, jh) \\ \hat{D}(nh, jh) \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{C}_k^{I_1}(jh) \\ \hat{S}_k^{I_1}(jh) \end{Bmatrix} = \frac{1}{L+1} \sum_{n=0}^L \begin{Bmatrix} \hat{I}_1(nh, jh) \\ \hat{D}(nh, jh) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos k \frac{2\pi}{L+1} n \\ \sin k \frac{2\pi}{L+1} n \end{Bmatrix}$$

при  $j = 0$ , у вигляді діаграм показані на рис. 4*b*. Ширини амплітудних спектрів інваріантів є вузькими від амплітудних спектрів оцінок математичних сподівань та практично однакові. Значущими є біля 25 гармонік. Амплітуди гармонік монотонно знижуються зі збільшенням їх номера.

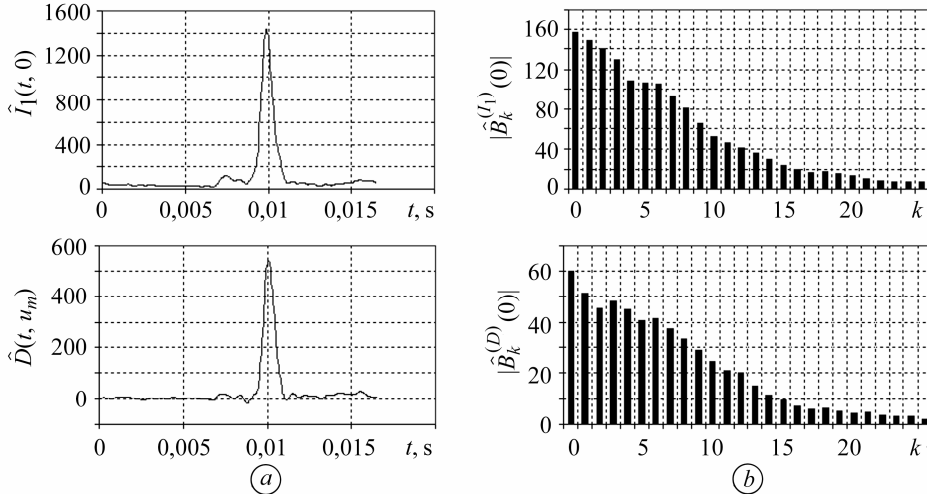


Рис. 4. Залежності оцінок лінійних інваріантів від часу (а) та їх коефіцієнти Фур'є (b).

Fig. 4. Dependence of estimators of linear invariants on time (a) and their Fourier coefficients (b).

Оцінку  $\hat{I}_1(t, 0)$  визначають сумою оцінок дисперсій складових вектора, тобто вона характеризує потужність стохастичних змін вектора прискорень. Мірою нестаціонарності такого випадкового процесу є величина

$$I = \frac{\sum_{k=1}^{25} |\hat{B}_k^{(I_1)}(0)|}{\hat{B}_0^{(I_1)}(0)},$$

яку можна вибрати індикатором, що визначає ступінь розвитку дефекту. Тут цей індикатор  $I = 8,51$ , тобто є досить суттєвим, а це свідчить про потужну стохастичну модуляцію гармонік сигналу. Беручи до уваги цей результат, а також значну ширину амплітудних спектрів як детермінованих вібрацій, так і періодичних змін потужності стохастичної складової вектора прискорень, робимо висновок, що дефект підшипникового вузла є локалізованим і розвинутим.

Часові зміни оцінки інваріанта  $\hat{D}(t, u_m)$  за формою подібні до часових змін оцінки  $\hat{I}_1(t, 0)$ , подібними є також амплітудні спектри, хоча значення оцінки  $\hat{D}(t, u_m)$  і значення оцінок амплітуд гармонік є суттєво меншими. Такого співвідношення між значеннями цих інваріантів слід очікувати, зважаючи на їх означення. Інваріант  $D(t, u)$  є індикатором обертання, тому те, що значення оцінки  $\hat{D}(t, u_m)$  відрізняється від нуля і що її часова залежність має чітко виражену форму і характеризується широким амплітудним спектром свідчить, що дефект розвинувся у рухомій частині вузла і має ударний характер. Такий висновок підтверджується також аналізом лінійних інваріантів за зсувом  $u$ . Залежності від зсуву  $\hat{I}_1(t_m, u)$  (рис. 5*a*) і  $\hat{D}(t_m, u)$  (рис. 5*b*) обчислені за формулами (4) і (5) для тих

значень часу  $t_m$ , які відповідають максимумам графіків на рис. 4а. Ці залежності є подібними. Вони мають групову структуру, інтервали часу між окремими групами, потужності яких загасають з ростом зсуву, є близькими до періоду обертання вала. Періоди коливань у кожній групі відрізняються несуттєво та є близькими до часу, що майже у 25 разів менший від періоду обертання вала. Такі коливання, очевидно, є вимушеними коливаннями матеріалу обертового вузла, які виникають від спричинених дефектом ударів.

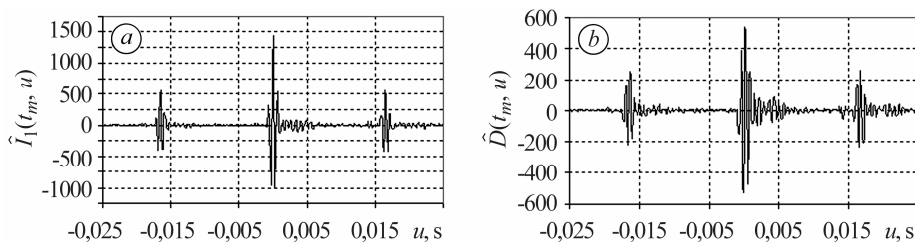


Рис. 5. Залежності оцінок лінійних інваріантів  $\hat{I}_1(t_m, u)$  (а) та  $\hat{D}(t_m, u)$  (б) від зсуву.

Fig. 5. Dependences of linear invariants estimators  $\hat{I}_1(t_m, u)$  (a) and  $\hat{D}(t_m, u)$  (b) on time lag.

Подібну структуру мають залежності оцінок кореляційних компонентів інваріантів від зсуву. На рис. 6 показано залежності нульових і перших кореляційних компонентів. При цьому для виразнішого подання внутрішньогрупової структури окремих пакетів, які є подібними, наведені тільки ті, які відповідають початковим зсувам. Порівнюючи графіки оцінок компонентів двох інваріантів, відзначимо дві відмінності між ними. Перша полягає в тому, що коливання, які описують поведінку оцінок кореляційних компонентів  $I_1(t, u)$  зникають швидше з ростом зсуву, а друга – оцінки кореляційних компонентів  $\hat{B}_k^{(I)}(u)$  в основному характеризуються парною залежністю від зсуву, а оцінки кореляційних компонентів  $\hat{B}_k^{(D)}(u)$  – непарною. Це легко підтвердити, якщо виділити в кожній з оцінок парну і непарну частини.

Як зазначалося вище, значущими в розкладах Фур'є оцінок лінійних інваріантів є біля 25 гармонік. Тому, щоб підвищити точність статистичної обробки при обчисленні оцінок квадратичних інваріантів, використали компонентний метод [1, 7, 8], за якого оцінки будуються у вигляді тригонометричних поліномів. Номери найвищих гармонік поліномів вибрали рівними 25. Обчислення показали, що виявлена у властивостях лінійних інваріантів періодична нестационарність ще сильніше проявляється у часовій залежності квадратичного інваріанта

$$\hat{I}_2(t, u) = \hat{b}_{\xi_1}(t, u)\hat{b}_{\xi_2}(t, u) - \frac{1}{4} \left[ \hat{b}_{\xi_1 \xi_2}(t, u) + \hat{b}_{\xi_2 \xi_1}(t, u) \right]^2,$$

який є визначником симетричної частини матриці (1). Така залежність за формою є подібна до попередніх (див. рис. 4), однак її пік є набагато гострішим, а максимальне значення набагато більшим. Слід також відмітити, що в амплітудному спектрі амплітуди перших гармонік з ростом номера знижуються повільніше.

Вершиноподібний вигляд мають і часові залежності оцінок інваріантів  $\lambda_1(t, u)$  і  $\lambda_2(t, u)$ , які є власними значеннями симетричної частини матриці (1) і визначають кореляційні функції складових вектора у її власному базисі, при цьому

$$\lambda_1(t, u) + \lambda_2(t, u) = I_1(t, u), \quad \lambda_1(t, u)\lambda_2(t, u) = I_2(t, u).$$

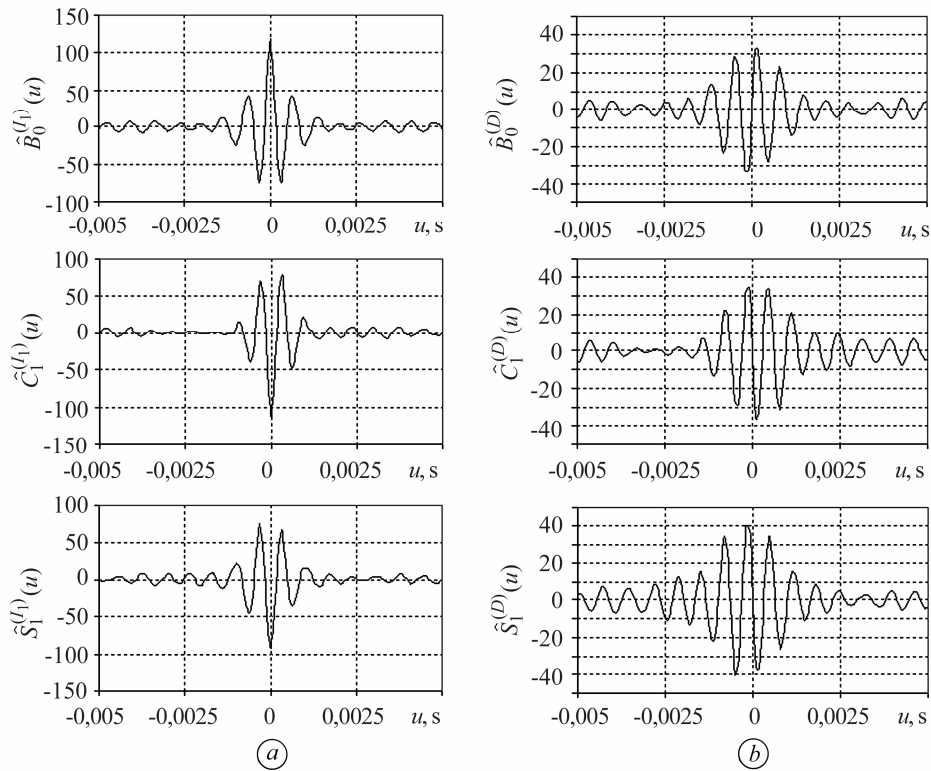


Рис. 6. Оцінки кореляційних компонентів інваріантів  $\hat{I}_1(t_m, u)$  (a) і  $\hat{D}(t_m, u)$  (b).

Fig. 6. Estimators of invariants  $\hat{I}_1(t_m, u)$  (a) and  $\hat{D}(t_m, u)$  (b) covariance components.

Значення оцінок  $\hat{\lambda}_1(t, 0)$  і  $\hat{\lambda}_2(t, 0)$  на періоді є додатними, однак значення  $\hat{\lambda}_1(t, 0)$  суттєво перевищує значення  $\hat{\lambda}_2(t, 0)$ . Це означає, що криві другого порядку, побудовані за цими величинами [1–3], будуть еліпсами. Суттєвою відмінністю часових залежностей  $\hat{\lambda}_1(t, 0)$  і  $\hat{\lambda}_2(t, 0)$  є зсув за часом їх головних максимумів, який практично не впливає на співвідношення між оцінками амплітуд гармонік інваріантів, а тільки змінює їх фазові співвідношення.

Результатом часового зсуву інваріантів є те, що орієнтація еліпсів змінюється за часом і можна виділити певний кутовий сектор, де відбуваються потужні стохастичні зміни вектора прискорень (рис. 7a). Напрямок, в якому відбуваються найпотужніші зміни, можна знайти за графічним поданням величини

$$b_{\beta}(t, u) = \lambda_1(t, u) \cos^2 \beta + \lambda_2(t, u) \sin^2 \beta,$$

яка описує зміни кореляційних зв'язків залежно від напрямку, визначеного кутом  $\beta$  між ним та власним базисом. При  $u = 0$  ця величина визначає потужність стохастичних коливань у цьому напрямку. Як видно з рис. 7b, він приблизно на  $10^\circ$  відрізняється від вертикального.

Дослідження показали, що використання лінійних і квадратичних інваріантів кореляційної тензор-функції складових вектора вібрацій дає можливість виявляти дефекти на більш ранніх стадіях, ніж це вдається за кореляційного аналізу кожної зі складових вектора. Визначення власних значень кореляційного тензора та напрямленості його базису дає можливість встановити викликані появою дефекту просторові зміни вектора вібрацій та локалізувати його.

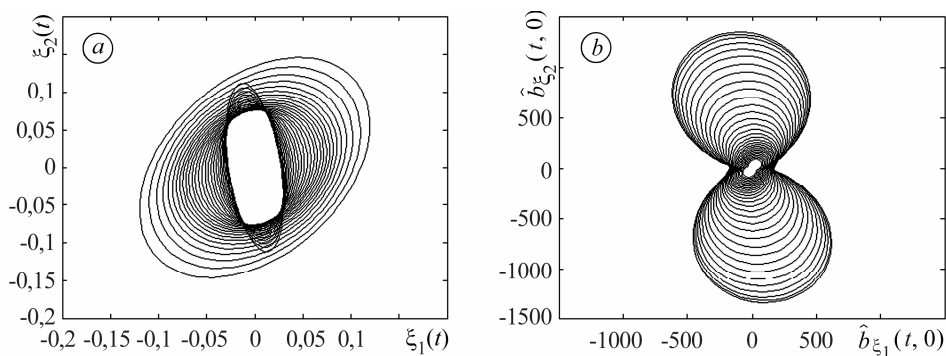


Рис. 7. Криві другого порядку (а) та часові зміни потужності стохастичних вібрацій за напрямом (b).

Fig. 7. Second order curves (a) and time variety of stochastic vibration power with respect to direction (b).

**РЕЗЮМЕ.** Методами когерентного і компонентного аналізу векторних періодически коррелиованих случайних процесов дослідована структура оценок лінейних і квадратических інваріантов корреляційної тензор-функції стохастических вібрацій центрифуги, проаналізовані їх амплітудні спектри. Показано, що використання інваріантов дає можливість підвищити ефективність вібраційної діагностики, установити просторові змієнення вібраційних нагрузок при появленні дефекта і локалізувати його.

**SUMMARY.** The structure of linear and quadratic invariants estimators of covariance tensor-function of decanter's stochastic vibration is analyzed by the coherent and component methods for analysis of vectorial periodically correlated random processes. It is shown that use of the invariants allows to enhance of vibration diagnosis efficiency, to define spatial changes of vibration loading while a defect appears and to localize it.

1. Яворський І. М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. – Львів: ФМІ ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2013. – 802 с.
2. Інваріантний кореляційний аналіз вібрацій підшипника кочення з дефектами на зовнішньому та внутрішньому кільцях / І. Й. Мацько, І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, В. Б. Шевчик // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – **52**, № 6. – С. 109–117.  
(Invariant correlation analysis of the vibration of rolling bearing with defects on its outer and inner races / I. I. Mats'ko, I. M. Yavors'kyi, R. M. Yuzefovych, V. B. Shevchyk // Materials Science. – 2017. – **52**, № 6. – P. 866–874.)
3. Vectorial periodically correlated random processes and their covariance invariant analysis / I. M. Yavorskyj, I. Y. Matsko, R. M. Yuzefovych, O. Yu. Dzeryn // Cyclistationarity: Theory and methods III. Ed. F. Chaari, J. Leskow, A. Napolitano, R. Zimroz, A. Wylomanska. – Switzerland: Springer Int. Publisher, 2017. – P. 121–150.
4. Coherent covariance analysis of periodically correlated random processes for unknown non-stationary period / I. M. Javorskyj, R. M. Yuzefovych, I. Y. Matsko, Z. Zakrzewski, J. Majewski // Digital Signal Processing. – 2017. – **65**. – P. 27–51.
5. Javorskyj I. Application of Buys-Ballot scheme in statistical analysis of rhythmic signals // Radioelectronics and Telecommunication Systems. – 1984. – 27 (11). – P. 28–33.
6. Discrete estimators of characteristics for periodically correlated time series / I. Javorskyj, I. Matsko, R. Yuzefovych, Z. Zakrzewski // Digital Signal Processing. – 2016. – **53**. – P. 25–40.
7. Component covariance analysis for periodically correlated random processes / I. M. Javorskyj, I. Yu. Isayev, J. Majewski, R. M. Yuzefovych // Signal Processing. – 2010. – **90**. – P. 1083–1102.
8. Компонентный корреляционный анализ векторных периодически нестационарных случайных процессов / И. Н. Яворский, Р. М. Юзефович, И. Й. Мацько, В. Б. Шевчик // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. – 2014. – **57**, № 9. – С. 29–41.

Одержано 22.11.2017