

УДК 539.375

ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ТОНКОГО ЖОРСТКОГО ВКЛЮЧЕННЯ, ПАРАЛЕЛЬНОГО МЕЖІ ПІВПРОСТОРУ, ЗА ОДНОБІЧНОГО КОНТАКТУ ЗІ СЕРЕДОВИЩЕМ

В. А. КРИВЕНЬ, В. Б. ВАЛЯШЕК, М. І. ЯВОРСЬКА

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

Отримано числово-аналітичний розв'язок антиплоскої задачі про напружено-деформований стан пружно-пластичного півпростору з тонким жорстким тунельним паралельним межі півпростору включенням, яке до навантаження перебувало в однобічному механічному зв'язку з середовищем. Досліджено особливості пластичного відшаровування включення. Розглянуто часткові випадки.

Ключові слова: однобічно відшароване включення, міжфазні пластичні смуги, антиплоска деформація, аналітичний розв'язок.

На сьогодні досить детально вивчено напружено-деформований стан тіл з тонкими включеннями, які перебувають в ідеальному або неідеальному контактах з середовищем у межах лінійної теорії пружності [1, 2]. Цікавіші і практично важливіші задачі пластичного відшаровування включень, взаємодіючих між собою чи з межею тіла, потребують складніших і менш доступних для аналізу моделей пружно-пластичного деформування і поки значно слабше досліджені [3, 4]. Вони особливо важливі для теорії композиційних матеріалів, оскільки міцність тіла з взаємодіючими концентраторами напружень може бути і більшою, і меншою за міцність тіла з аналогічним окремим концентратором. Тому вплив взаємодії концентраторів напружень є важливою задачею механіки і, зокрема, теорії міцності армованих матеріалів. Залишається недостатньо вивченим пластичне відшаровування включень, розміщених поблизу межі тіла [5–7].

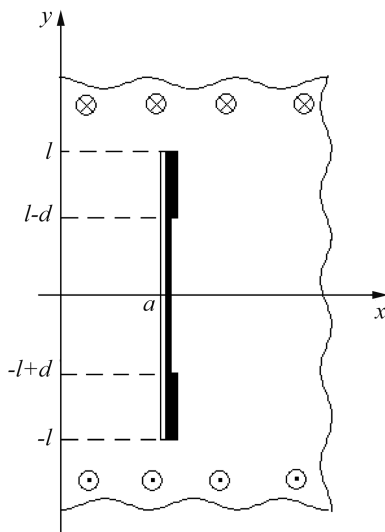


Рис. 1. Поперечний переріз тіла з включеннями і міжфазними пластичними смугами.

Fig. 1. Transversal cross-section of a body with inclusions and interphase plastic strips.

Формулювання задачі. Дослідимо напружено-деформований стан ідеально пружно-пластичного півпростору $x > 0$, $-\infty < y$, $z < \infty$ з паралельним до його межі жорстким тонким включенням $x = a$, $-l \leq y \leq l$ за прикладеного на безмежності квазістатично зростаючого зсувного навантаження $\tau_{yz} = \tau_{\infty}$, $\tau_{xz} = 0$. Розглянемо випадок однобічного контакту включення з середовищем: до навантаження включення перебувало в ідеальному контакті з середовищем вздовж грані $x = a + 0$, $-l \leq y \leq l$ і не контактувало з

ним уздовж другої грані $x = a - 0$, $-l \leq y \leq l$ (l – піввисота включення; a – відстань включення від межі тіла) (рис. 1).

Матеріал тіла вважаємо ідеально пружно-пластичним із зсувною границею текучості рівною k , а пластичні деформації – локалізованими на межі включення–середовище у міжфазних смугах $x = a + 0$, $l - d \leq y \leq l$ (d – довжина міжфазних смуг, залежна від прикладеного навантаження).

Задача полягає у визначенні напружено-деформованого стану і дослідженні розвитку пластичних смуг зі збільшенням навантаження.

Формалізація і розв’язування задачі. У пружній частині тіла функція, складена із компонент тензора напружень $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$, є аналітичною функцією комплексного аргументу $\zeta = x + iy$, яку через симетрію задачі достатньо визначити у першому квадранті $x > 0$, $y > 0$, розрізаному вздовж відрізка $x = a$, $0 < y < l$, відповідного половині включення (надалі область D).

Формулювання задачі у напруженнях відносно функції $\tau(\zeta)$ в області D виглядатиме так:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0 & (\zeta = iy, \quad 0 < y < +\infty), & \operatorname{Im} \tau(\zeta) = 0 & (\zeta = x, \quad 0 < x < a), \\ \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0 & (\zeta = a - 0, \quad 0 \leq y < l), & |\tau(\zeta)| = k & (\zeta = a + 0, \quad l - d \leq y < l), \\ \operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0 & (\zeta = a + 0 \quad (0 < y < l - d)), & \operatorname{Im} \tau(\zeta) = 0 & (\zeta = x, \quad a \leq x < +\infty), \\ & & & \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tau(\zeta) = \tau_{\infty}. & (1) \end{aligned}$$

Зміст рівностей (1) є таким: перша – відсутність напружень на межі півпростору, друга – непарність зміщення $w(x, y)$ відносно осі абсцис, третя – відсутність напружень на вільній від контакту ділянці тіла, четверта – умова пластичності в точках міжфазних пластичних смуг; п’ята – наявність ідеального механічного зв’язку в зоні ідеального контакту включення із середовищем, остання – виражає діюче навантаження.

Крім рівнянь (1), повинна виконуватися умова $|\tau(\zeta)| < k$ недосягнення пластичного стану поза пластичними смугами.

Унаслідок умов (1) функція $\tau(\zeta)$ конформно відображає область D на круговий сектор $|\tau| < k$, $0 < \arg \tau < \frac{\pi}{2}$ (область G, рис. 2) площини τ .

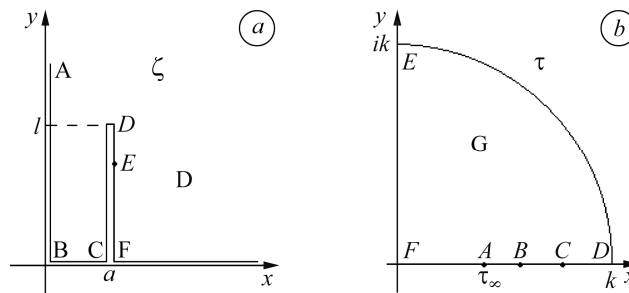


Рис. 2. Конформне відображення у площинах ζ (a) і τ (b).

Fig. 2. Conformal mapping in planes ζ (a) and τ (b).

Відображення $\tau(\zeta)$ існує і є єдиним, оскільки координати точок A, D, F відомі і фіксовані у площинах ζ і τ . Ця властивість відображення забезпечує єди-

ність координат усіх решти точок, які на даному етапі розв'язування задачі залишаються невідомими, зокрема координата точки E у площині ζ . Таким чином, довжину пластичних смуг однозначно визначають для кожного τ_∞ з умови існування розв'язку задачі (1).

Оскільки область D є прямокутником, то відображення $\tau(\zeta)$ зручно будувати у параметричному вигляді:

$$\zeta = \zeta(t), \tau = \tau(t) \quad (t \in H, H = \{\text{Im} t > 0\}) . \quad (2)$$

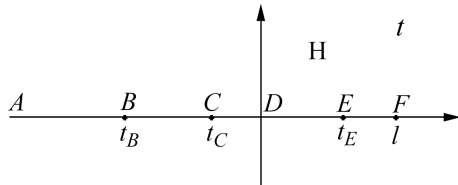


Рис. 3. Допоміжна комплексна площина t .

Fig. 3. Auxiliary complex plane t .

Беручи до уваги, що координати точок A, D, F відомі у площинах ζ і τ , зафіксуємо їх також у площині допоміжного комплексного параметра t . Покладемо їх відповідно рівними $\infty, 0, 1$ (рис. 3).

Функції $\zeta(t)$ і $\tau(t)$ повинні бути такими, щоб відповідні точки на межах областей D і G мали спільний прообраз на межі області H .

Другу із функцій (2) знайдемо композицією елементарних відображень:

$$\tau(\tau) = 2k^2 \tau_\infty \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{(k^2 + \tau_\infty^2)^2 t - 4k^2 \tau_\infty^2 + (k^2 - \tau_\infty^2) \sqrt{t}}} . \quad (3)$$

Оскільки координата точки E апіорі відома у площині τ , то із формули (3) можна знайти її координату у площині t : $t_E = 4k^2 \tau_\infty^2 (k^2 + \tau_\infty^2)^{-2}$.

Відображення $\zeta(t)$ знайдемо за допомогою перетворення Шварца–Крістофеля:

$$\zeta(t) = a + il + \frac{a}{\int_{t_B}^{t_C} F(\eta) d\eta} \int_0^t \frac{\eta d\eta}{\sqrt{(\eta - t_B)(\eta - t_C)(\eta - 1)}} , \quad (4)$$

де

$$F(\eta) = \frac{|\eta|}{\sqrt{|(\eta - t_B)(\eta - t_C)(\eta - 1)|}} .$$

Тут і нижче під $\sqrt{\eta + p}$ (p – дійсне число) розуміємо аналітичну у верхній півплощині функцію, що набуває дійсних додатних значень, коли η – дійсне і більше за $-p$.

Параметри t_B і t_C ($t_B < t_C < 0$) слід підібрати так, щоби виконувалися потрібні метричні співвідношення у фігурі D :

$$\begin{cases} l \int_{t_B}^{t_C} F(\eta) d\eta = a \int_{t_C}^{t_D} F(\eta) d\eta ; \\ \int_{t_C}^0 F(\eta) d\eta = \int_0^1 F(\eta) d\eta . \end{cases} \quad (5)$$

Перша із рівностей (5) забезпечує потрібне співвідношення між висотою включення і його відстанню до межі півпростору; друга – рівність берегів розрізу в області D .

Розв'язок системи (5) відносно t_B і t_C можна отримати методом послідовних наближень:

$$t_B^{(j+1)} = t_B^{(j)} \left(1 + \frac{BC^{(j)}l - CD^{(j)}a}{BC^{(j)}l + CD^{(j)}a} \right);$$

$$t_C^{(j+1)} = t_C^{(j)} \left(1 - t_C^{(j)} \frac{CD^{(j)} - DF^{(j)}}{CD^{(j)} + DF^{(j)}} \right) \quad (j=1, 2, \dots), \quad (6)$$

де $t_B^{(0)} = -2$; $t_C^{(0)} = -1$ $BC^{(j)} = \int_{t_B^{(j)}}^{t_C^{(j)}} F^{(j)}(\eta) d\eta$; $CD^{(j)} = \int_{t_C^{(j)}}^0 F^{(j)}(\eta) d\eta$; $DF^{(j)} = \int_0^1 F^{(j)}(\eta) d\eta$, функція $F^{(j)}(\eta)$ відрізняється від $F(\eta)$ тільки заміною t_B і t_C відповідно на $t_B^{(j)}$ і $t_C^{(j)}$.

Беручи до уваги, що кінцевій точці пластичної смуги відповідає $t = t_E$, із виразу (4) отримуємо формулу для довжини міжфазної пластичної смуги:

$$d = \frac{a}{\int_{t_B}^{t_C} F(\eta) d\eta} \int_{t_B}^1 F(\eta) d\eta. \quad (7)$$

Рівності (3), (4), (7) дають розв'язок крайової задачі (1), визначають функцію напружень і залежність довжини міжфазної смуги пластичного відшаровування від навантаження.

Для декількох співвідношень між висотою включення і його відстанню від межі півпростору залежності довжини міжфазної пластичної смуги від навантаження проілюстровані на рис. 4.

Як частковий випадок із формули (7) можна отримати функцію напружень $\tau_0(\zeta)$ і довжину міжфазної пластичної смуги d_0 для окремого включення. Для цього змістимо паралельним перенесенням початок координат у площині ζ у центр включення і спрямуємо відстань між включенням і межею півпростору $a \rightarrow \infty$. У такий спосіб отримуємо:

$$\tau_0(\zeta) = \frac{\sqrt{(k^2 + \tau_\infty^2)^2 \sqrt{\zeta^2 + l^2} - 4k^2 \tau_\infty^2 l - (k^2 - \tau_\infty^2)^4 \sqrt{\zeta^2 + l^2}}}{2\tau_\infty \sqrt{\sqrt{\zeta^2 + l^2} - l}},$$

$$d_0 = l \frac{(k^2 + \tau_\infty^2)^2 - (k^2 - \tau_\infty^2) \sqrt{k^4 + 6k^2 \tau_\infty^2 + \tau_\infty^4}}{(k^2 + \tau_\infty^2)^2}.$$

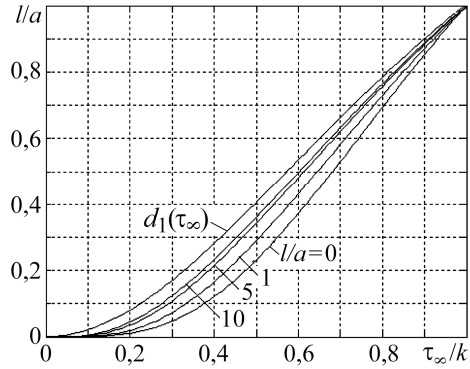


Рис. 4. Залежності довжин міжфазних пластичних смуг від навантаження $d(\tau_\infty)$ для $l/a = 0; 1; 5; 10$ і $d_1(\tau_\infty)$.

Fig. 4. Dependences of interphase plastic strips length on load $d(\tau_\infty)$ where $l/a = 0; 1; 5; 10$ and $d_1(\tau_\infty)$.

Для порівняння наведемо залежність довжини міжфазної пластичної смуги від навантаження $d_1(\tau_\infty) = \frac{2l\tau_\infty^2}{k^2 + \tau_\infty^2}$ для включення, яке до навантаження перебувало в ідеальному двобічному контакті з середовищем [4].

Частковим випадком отриманого розв'язку задачі про пластичне відшарування включення є також пружний розв'язок цієї задачі, який одержуємо граничним переходом $k \rightarrow \infty$.

Із формул (3) отримуємо функцію $\tau = \tau^{(e)}(t)$,

$$\tau^{(e)}(t) = \tau_\infty \sqrt{\frac{t-1}{t}}, \quad (8)$$

яка в парі із виразом (4) дає пружний розв'язок розглянутої задачі.

Зважаючи на важливість поведінки напружень в околі вершин включень і тріщин для механіки руйнування, дослідимо асимптотику поля напружень у цій області.

Оскільки $\zeta \rightarrow a + il$, коли $t \rightarrow 0$, то із формул (4), (8) отримуємо:

$$\tau^{(e)}(t) = \frac{\tau_\infty}{\sqrt{t}} + o(t^{-1/2}), \quad \zeta(t) = a + il + \frac{a}{2 \int_{t_B}^{t_C} F(\eta) d\eta} \frac{t^2}{\sqrt{t_B t_C}} + o(t^2).$$

І, отже,

$$\tau^{(e)}(\zeta) = \frac{K}{\sqrt[4]{\zeta - a - il}} + o((\zeta - a - il)^{-1/4}), \quad K = \frac{\tau_\infty \sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{2 \sqrt{t_B t_C} \int_{t_B}^{t_C} F(\eta) d\eta}},$$

коли $\zeta \rightarrow a + il$.

Поле пружних напружень сингулярне у вершинах включень з показником 1/4.

Для квазікрихких матеріалів важливими є дослідження початкової стадії розвитку пластичних деформацій та спрощені формули для опису зони пластичних деформацій (довжини пластичних смуг), що базуються на сингулярній складовій поля пружних напружень. Для цього дослідимо початкову стадію пластичного відшарування включення для навантажень, набагато менших за границю текучості $\tau_\infty \ll k$.

Оскільки $t_E \ll 1$, коли $\tau_\infty \ll k$, то для початкової стадії пластичного відшарування із формули (7) отримуємо:

$$d \approx \frac{a}{2 \sqrt{t_B t_C} \int_{t_B}^{t_C} F(\eta) d\eta} t_E^2 \approx \frac{8a\tau_\infty^4}{k^4 \sqrt{t_B t_C} \int_{t_B}^{t_C} F(\eta) d\eta}.$$

Тут смуги пластичного відшарування ростуть пропорційно $(\tau_\infty/k)^4$, а довжину пластичних смуг через коефіцієнт K пружного розв'язку визначають за формулою $d = 16K^4 (\tau_\infty/k)^4 l$.

Вплив неповного контакту дуже суттєвий на початковій стадії: смуги пластичного міжфазного відшарування за умови суцільного контакту ростуть пропорційно другому степеню відношення τ_∞/k .

ВИСНОВКИ

Отримано числово-аналітичний розв'язок задачі про напружено-деформований стан пружно-пластичного півпростору з тонким жорстким тунельним включенням, паралельним межі півпростору. Вважають, що вздовж грані включення з боку границі тіла відсутній контакт включення з середовищем, яке перебуває в антиплоскому стані. Під впливом квазістатично зростаючого навантаження відбувається відшаровування включення вздовж його грані, яка до навантаження перебувала в ідеальному механічному зв'язку з середовищем. Досліджено закономірності пластичного відшаровування включення для довільної відстані від межі тіла. Зроблено аналіз часткових випадків: початкової стадії деформування, великої відстані включення від межі тіла. Отримано спрощені формули, які визначають довжини міжфазних пластичних смуг через сингулярний член відповідного пружного поля. Показано, що однобічна відсутність механічного зв'язку з середовищем дуже суттєво проявляється за низького навантаження і, в цілому, призводить до зменшення ділянок міжфазного відшаровування.

РЕЗЮМЕ. Получено численно-аналитическое решение антиплоской задачи о напряженно-деформированном состоянии упруго-пластического полупространства с тонким жестким туннельным параллельным границе полупространства включением, находящимся до нагрузки в одностороннем механическом контакте со средой. Исследованы особенности пластического отслаивания включения. Рассмотрены частные случаи.

SUMMARY. Numerical-analytical solution of anti-plane problem about the stress-strain state in the elastic-plastic half-space with a thin rigid tunnel inclusion parallel to the half-space is obtained. It is assumed that the inclusion was in connection with unilateral mechanical environment before loading. The features of plastic exfoliation of the inclusion are studied. The partial cases are considered.

1. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями: монографія. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
2. Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
3. Kryven' V. A. and Valiashek V. B. Initial stage of plastic exfoliation of a rectangular inclusion under conditions of one-sided contact with a medium // J. Mathem. Sci. – 2010. – **171**, № 4. – P. 107–116.
4. Kryven V. A., Sulym G. T., and Yavorska M. I. Plastic interfacial slip of periodic systems of rigid thin inclusions undergoing longitudinal shear // J. Theoret. and Appl. Mech. – 2006. – 44, № 4. – P. 837–848.
5. Большаков В. И., Андрианов И. В., Данишевский В. В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. – Днепропетровск: Пороги, 2008. – 196 с.
6. Сильвестров В. В., Ярдухин А. К. Межфазная трещина и отслоившееся тонкое жесткое гладкое межфазное включение при сложном нагружении // Проблемы механики неупругих деформаций. – М.: Физматлит, 2001. – С. 301–313.
7. Лавренюк М. В. Дослідження напружено-деформованого стану скінченної платівки з двома включеннями за умов ідеального та неідеального контактів // Вісник Київськ. ун-ту. – 1999. – № 2. – С. 40–49.

Одержано 10.04.2017