

УДК 539.3

МІЦНІСТЬ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ПЛАСТИН З КВАДРАТНИМ ОТВОРОМ (ВКЛЮЧЕННЯМ) ТА РОЗРІЗОМ (ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ) ЗА ОДНОВІСНОГО РОЗТЯГУ

I. С. КУЗЬ¹, О. І. МОРОЗ², О. Н. КУЗЬ²

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка;

² Національний університет "Львівська політехніка"

На основі числового розв'язування крайових задач теорії малих пружно-пластичних деформацій для лінійно зміцнюваного матеріалу з урахуванням розвантаження з'ясовано вплив концентраторів напружень (квадратного отвору, розрізу або абсолютно жорсткого включення) в пластині на її міцність за одновісного розтягу.

Ключові слова: *пластина, квадратний отвір, розріз, абсолютно жорстке включення, теорія малих пружно-пластичних деформацій, лінійне зміцнення, розвантаження, варіаційно-різницевий метод.*

Концентратори напружень (отвори, включення, розрізи, тріщини тощо) існують у всіх конструкціях внаслідок конструкційних вимог, технологічних операцій під час виготовлення або впливу експлуатаційних навантажень. Вони призводять до концентрації напружень, що може спричинити передчасне руйнування або появу недопустимих деформацій. У багатьох випадках за високого рівня навантажень елементи конструкцій з концентраторами напружень перебувають в умовах допустимого пластичного деформування. Це призводить до складних задач визначення напружено-деформованого стану, розв'язати які неможливо без залучення ефективних числових методів розрахунку, оскільки застосування аналітичних методів у зв'язку зі складністю форми тіл та фізичної нелінійності значно обмежене.

Одним із ефективних числових методів розв'язування крайових задач деформаційної теорії пластичності в неоднорозв'язних областях є варіаційно-різницевий із використанням відображення криволінійної (косокутної) сітки у вихідній області на рівномірну прямокутну сітку в області, складеній з прямокутників [1–3]. Проте врахування зміцнення матеріалу за пластичного деформування, побудова зон еволюції пластичних деформацій за покрокового збільшення навантаження, розрахунок полів залишкових деформацій після розвантаження елементів конструкцій дали б змогу точніше з'ясувати напружено-деформований стан пластини та оцінити її міцність.

Мета роботи – з'ясувати вплив концентраторів напружень (квадратного отвору, розрізу або абсолютно жорстких включень (АЖВ) з такими ж розмірами) на напружено-деформований стан пружно-пластичної пластини та її міцність із урахуванням зміцнення матеріалу та розвантаження.

Формулювання задачі та числовий метод її розв'язування. Розглядається плоска задача деформаційної теорії пластичності, зокрема теорії малих пружно-пластичних деформацій Ільюшина, за активного навантаження у неоднорозв'язній області V з межею Σ , яка моделює напружено-деформований стан у пластині з

квадратним отвором та розрізом. З математичного погляду вона полягає у розв'язуванні рівнянь рівноваги в пластині

$$(C_{ijkl}(\epsilon_u)u_{k,l})_{,j} = 0 \quad (1)$$

за використання мішаних крайових умов на її поверхні $\Sigma (\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma)$

$$u_i \Big|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad C_{ijkl}(\epsilon_u)u_{k,l}n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0, \quad (2)$$

де

$$C_{ijkl} = \lambda(\epsilon_u)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\epsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

$$\lambda(\epsilon_u) = K - (2/3)\mu(\epsilon_u), \quad \mu(\epsilon_u) = \mu(1 - \omega(\epsilon_u)). \quad (3)$$

Тут u_i, P_i^0, n_j – компоненти векторів переміщень та поверхневих сил, а також зовнішньої нормалі до поверхні Σ_σ , відповідно; ϵ_u – інтенсивність тензора деформацій ($e_{ij} = \epsilon_{ij} - (1/3)\epsilon_{kk}\delta_{ij}$; $\epsilon_u = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$); K – модуль об'ємного стиску; $\omega(\epsilon_u)$ – функція пластичності Ільюшина [4]; $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$. За однаковими індексами, які зустрічаються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від одиниці до двох.

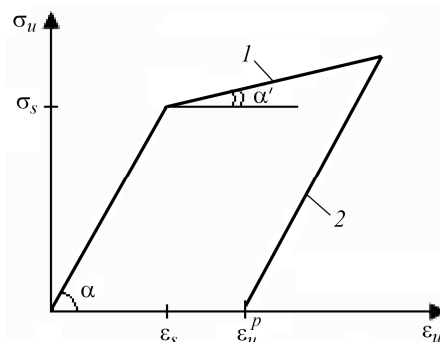
Для матеріалу з лінійним зміцненням (рис. 1), зокрема міді, алюмінію та їхніх сплавів, функція $\omega(\epsilon_u)$ має вигляд

$$\omega(\epsilon_u) = \begin{cases} (1 - \gamma)(\epsilon_u - \epsilon_s) / \epsilon_u, & \epsilon_u > \epsilon_s; \\ 0, & \epsilon_u \leq \epsilon_s, \end{cases} \quad (4)$$

де $\gamma \equiv \mu' / \mu$ – параметр зміцнення; $2\mu \equiv \text{tg } \alpha$; $2\mu' \equiv \text{tg } \alpha'$; σ_s, ϵ_s – границі плинності за напруженнями та деформаціями, відповідно.

Рис. 1. Графік залежності $\sigma_u \sim \epsilon_u$ для матеріалу з лінійним зміцненням: 1 – навантаження; 2 – розвантаження.

Fig. 1. Graph of dependence $\sigma_u \sim \epsilon_u$ for the material with linear strengthening: 1 – loading; 2 – unloading.



Для розвантаження визначальні співвідношення мають вигляд

$$\sigma_{ii} = 3K\epsilon_{ii}, \quad s_{ij} = s'_{ij} + 2\mu(e_{ij} - e'_{ij}), \quad (5)$$

де компоненти тензорів e'_{ij} і s'_{ij} відповідають його початку.

Розглянемо дискретизацію задачі (1), (2), тобто побудуємо її різницевий аналог, причому виходитимемо з її варіаційного формулювання, тобто застосува- тимемо варіаційно-різницевий метод [5].

Оскільки область V є неоднорозв'язною, то використовуємо криволінійні коор- динати β^1, β^2 так, що відображення

$$x^1 = x^1(\beta^1, \beta^2), \quad x^2 = x^2(\beta^1, \beta^2) \quad (6)$$

переводить її в модельну область V_0 (прямокутник розмірами $l_1 \times l_2$ або область, складену з прямокутників). У ній лагранжіан матиме вигляд

$$L_0 = (1/2) \int_{V_0} \sqrt{g} D^{ijkl} v_{ij} v_{kl} d\beta^1 d\beta^2 - \int_{V_0} \sqrt{g} \bar{X} \cdot \bar{v} d\beta^1 d\beta^2 - \int_{\Sigma_0} g(\bar{\beta}) \bar{P}^0 \cdot \bar{v} d\Sigma, \quad (7)$$

де $D^{ijkl} = C^{imkn}(\bar{\beta}) B_m^j B_n^l$, $A_j^i = \partial x^i / \partial \beta^j$, $B_j^i = \partial \beta^i / \partial x^j$, $\sqrt{g} = \det A$,

$$g(\bar{\beta}) = \begin{cases} \sqrt{g_{11}}, & \beta^2 = \{0, l_2\}; \\ \sqrt{g_{22}}, & \beta^1 = \{0, l_1\}. \end{cases}$$

Замінивши у виразі (7) всі континуальні функції сітковими, інтеграли – скінченними сумами, похідні – різницеви похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана L_0^h за допомогою дискретного аналога відображення (6), яке не мусить бути задане аналітично, зокрема бути конформним. Достатньо мати взаємно однозначну відповідність між вузлами сітки в криволінійній V_1 та модельній V_0 областях. Для визначення стаціонарної точки L_0^h матимемо систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$\bar{P}(\bar{v}^h) + \bar{F}^h = 0, \quad (8)$$

яку доцільно розв'язувати ітераційним методом Ньютона–Канторовича, кожним кроком якого є дворівнева процедура розв'язування лінійної системи, яка реалізує схему градієнтного методу та методу з чебишевським набором ітераційних параметрів. Складністю її практичної реалізації є підбір ітераційних параметрів.

Описаний метод реалізований у вигляді пакета програм, який враховує різні крайові умови, параметри області та середовища. Цей пакет розвинутий для врахування розвантаження у пружно-пластичних задачах, а також підібрано ітераційні параметри методів розв'язування систем нелінійних алгебричних рівнянь (8).

Числові результати. За допомогою поданого вище варіаційно-різницевого методу розв'язано низку плоских задач деформаційної теорії пластичності про деформування пластини, виготовленої з матеріалу з лінійним зміцненням (рис. 1), наприклад, плакованого алюмінієвого сплаву Д16АТ, який широко використовують у літакобудуванні, з квадратним отвором та розрізом або АЖВ з такими ж розмірами.

Пластина з квадратним отвором та розрізом. Зображено (рис. 2а) геометрію пластини (модуль пружності $E = 7,31 \cdot 10^4$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$; параметр зміцнення $\gamma = 0,1$; границя плинності $\sigma_s = 324$ МПа; границя міцності $\sigma_B = 469$ МПа) з крайовими умовами. Тут уведено безрозмірні координати $x^0 \equiv x/d$ та $y^0 \equiv y/d$, де d – сторона квадратного отвору. Квадратний отвір та розріз є вільними від навантажень ($\sigma_{nn} = 0$, $\sigma_{n\tau} = 0$). До правого та лівого країв пластини прикладене безрозмірне рівномірне нормальне напруження $\sigma_{xx}^0 = P^0 \equiv P/\sigma_s$.

За допомогою діаграм розподілу безрозмірної інтенсивності тензора напружень $\sigma_u^0 \equiv \sigma_u/\sigma_s$ можна з'ясувати області виникнення та розвитку пластичних деформацій, а також оцінити міцність пластини за тим чи іншим критерієм. Згідно з умовою плинності Губера–Мізеса, пластичне деформування починається тоді, коли безрозмірна інтенсивність тензора напружень σ_u^0 досягає безрозмірної границі плинності $\sigma_s^0 = 1$. Згідно з критерієм міцності (скажімо найбільшій інтенсивності дотичних напружень), небезпечний стан досягається, коли безрозмірна інтенсивність тензора напружень σ_u^0 сягає безрозмірної величини $\sqrt{2/3} \sigma_B^0$, де $\sigma_B^0 \equiv \sigma_B/\sigma_s$ – безрозмірна границя міцності [6].

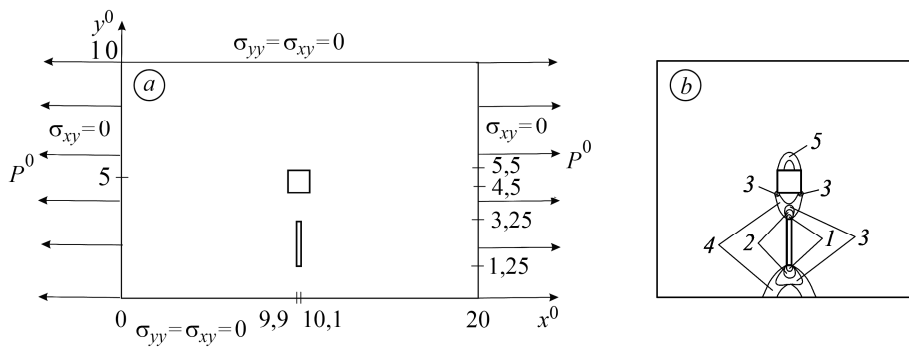


Рис. 2. Пластина з квадратним отвором і розрізом та крайовими умовами на зовнішній межі (а) та діаграми областей розвитку зон інтенсивності тензора залишкових деформацій (1–5) за покрокового збільшення P^0 у ній (b):
 1 – $P^0 = 0,37$; 2 – 0,46; 3 – 0,49; 4 – 0,56; 5 – 0,59.

Fig. 2. A plate with a square hole and a cut and boundary conditions on the external border (a) and diagrams of development zones of the residual deformations tensor intensity (1–5) for stepwise enlarging of the loading P^0 in it (b):
 1 – $P^0 = 0.37$; 2 – 0.46; 3 – 0.49; 4 – 0.56; 5 – 0.59.

З'ясовано розвиток зон інтенсивності тензора залишкових деформацій після розвантаження пластини з квадратним отвором та розрізом (рис. 2a), попередньо навантаженої збільшеним навантаженням P^0 (рис. 2b). Залишкові деформації вперше з'являються після розвантаження за $P^0 = 0,28$ біля верхнього та нижнього країв розрізу і лише пізніше за $P^0 = 0,49$ – біля нижніх кутів отвору. За $P^0 = 0,59$ біля верхнього та нижнього країв розрізу досягається границя міцності. На рис. 2b також бачимо характерні смуги максимальних залишкових деформацій (можливі лінії ковзання) під кутом 45° до напрямку розтягу, які розвиваються як від нижнього краю розрізу до нижнього краю пластини, так і від верхнього краю розрізу до нижніх кутів отвору (зони 4), а також від верхніх кутів отвору (зона 5).

Пластина з квадратним АЖВ та розрізом. Розглянуто деформування такої ж за розмірами пластини з квадратним АЖВ замість отвору та розрізом (рис. 3a). Для цього на межі отвору задано крайові умови $u_\tau = 0$, $u_n = 0$, які моделюють АЖВ.

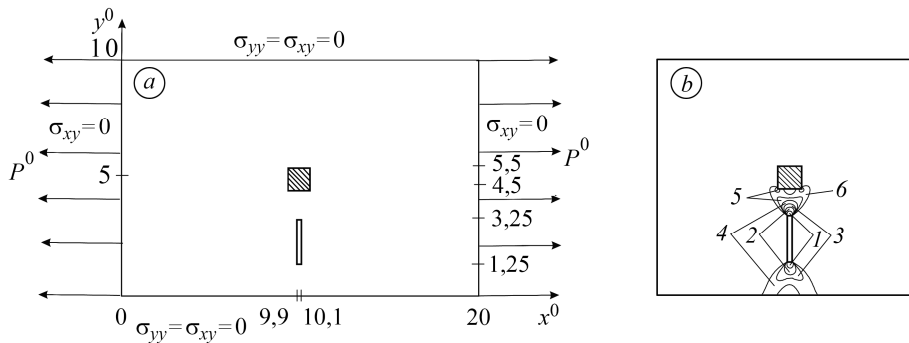


Рис. 3. Пластина з квадратним АЖВ і розрізом та крайовими умовами на зовнішній межі (а) та діаграми областей розвитку зон інтенсивності тензора залишкових деформацій (1–6) у ній (b):
 1 – $P^0 = 0,52$; 2 – 0,57; 3 – 0,62; 4 – 0,66; 5 – 0,71; 6 – 0,76.

Fig. 3. A plate with a square rigid body and a cut and boundary conditions on the external border (a) and diagrams of development zones of the residual deformations tensor intensity (1–6) in the plate (b):
 1 – $P^0 = 0.52$; 2 – 0.57; 3 – 0.62; 4 – 0.66; 5 – 0.71; 6 – 0.76.

З'ясовано розвиток зон інтенсивності тензора залишкових деформацій після розвантаження пластини з квадратним АЖВ та розрізом (рис. 3а), попередньо навантаженої збільшеним навантаженням P^0 (рис. 3b). Залишкові деформації вперше з'являються після розвантаження за $P^0 = 0,52$ біля верхнього та нижнього країв розрізу і значно пізніше за $P^0 = 0,71$ – біля нижніх кутів вклучення.

Зазначимо, що пластичні деформації у пластині з АЖВ замість отвору виникають за напруження P^0 у 1,41 рази більшого, ніж у пластині з отвором такої ж форми. За навантаження $P^0 = 0,76$ біля верхнього та нижнього країв розрізу досягається границя міцності (рис. 3b). Це навантаження на 29% більше, ніж у пластині з квадратним отвором і розрізом.

Пластина з квадратним отвором та АЖВ замість розрізу. Розглянули деформування такої ж за розмірами пластини з квадратним отвором та тонким АЖВ замість розрізу (рис. 4а). Для цього на межі розрізу задано крайові умови $u_\tau = 0$, $u_n = 0$, які моделюють АЖВ.

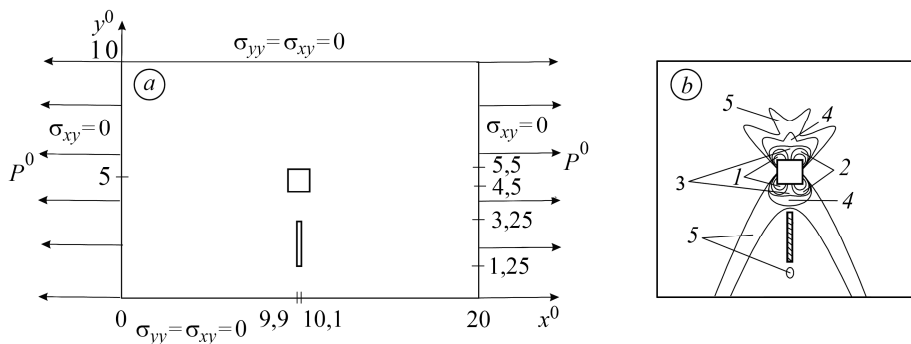


Рис. 4. Пластина з квадратним отвором і тонким АЖВ та крайовими умовами на зовнішній межі (а) та діаграми областей розвитку зон інтенсивності тензора залишкових деформацій (1–5) у ній (b): 1 – $P^0 = 0,55$; 2 – 0,62; 3 – 0,71; 4 – 0,84; 5 – 0,89.

Fig. 4. A plate with a square hole and a thin rigid body and boundary conditions on the external border (a) and diagrams of development zones of the residual deformations tensor intensity (1–5) in it (b): 1 – $P^0 = 0,55$; 2 – 0,62; 3 – 0,71; 4 – 0,84; 5 – 0,89.

З'ясовано розвиток зон інтенсивності тензора залишкових деформацій після розвантаження пластини з квадратним отвором та тонким АЖВ замість розрізу (рис. 4а), попередньо навантаженої збільшеним навантаженням P^0 (рис. 4b). Залишкові деформації вперше з'являються після розвантаження за $P^0 = 0,55$ біля усіх кутів отвору (рис. 4b) і бачимо характерні смуги під кутом 45° до осі розтягу за $P^0 = 0,89$, а пластичні – за такого ж напруження P^0 , що і за квадратного АЖВ і розрізу. Проте границя міцності тут досягається за напруження P^0 у 1,51 рази більшого, ніж за квадратного отвору і розрізу. Це свідчить про те, що тонке довге АЖВ більше зміцнює пластину, ніж квадратне.

Пластина з АЖВ замість отвору та розрізу. Розглянуто деформування такої ж за розмірами пластини з квадратним АЖВ замість отвору та тонким АЖВ замість розрізу (рис. 5а). Для цього на межі квадратного отвору та розрізу задано крайові умови $u_\tau = 0$, $u_n = 0$, які моделюють обидва АЖВ.

З'ясовано розвиток зон інтенсивності тензора залишкових деформацій після розвантаження пластини з квадратним та тонким АЖВ замість отвору та розрізу відповідно (рис. 5а), попередньо навантаженої збільшеним навантаженням P^0 (рис. 5b). Залишкові деформації вперше з'являються після розвантаження за $P^0 = 0,83$ біля усіх кутів квадратного АЖВ (рис. 5b) і лише пізніше за $P^0 = 0,83$ – біля нижнього краю тонкого АЖВ.

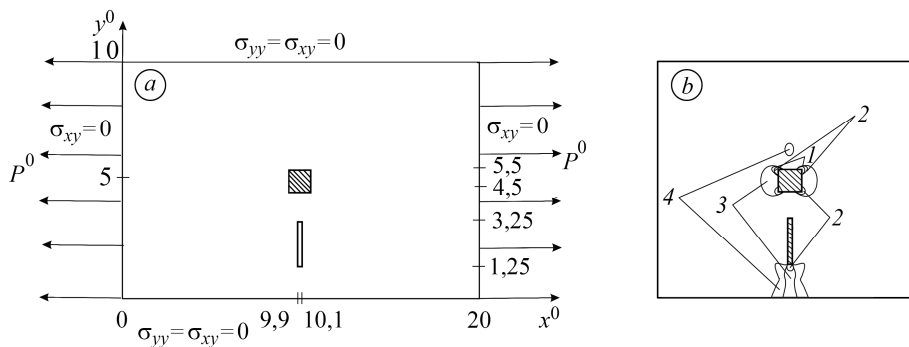


Рис. 5. Пластина з квадратним і тонким АЖВ та крайовими умовами на зовнішній межі (а) та діаграми областей розвитку зон інтенсивності тензора залишкових деформацій (1–4) у ній (b): 1 – $P^0 = 0,8$; 2 – $0,83$; 3 – $0,93$; 4 – $0,99$.

Fig. 5. A plate with a square rigid body and a thin rigid body and boundary conditions on the external border (a) and diagrams of development zones of the residual deformations tensor intensity (1–4) in it (b): 1 – $P^0 = 0.8$; 2 – 0.83 ; 3 – 0.93 ; 4 – 0.99 .

ВИСНОВКИ

З'ясовано вплив концентраторів напружень (квадратний отвір, розріз, АЖВ замість отвору або розрізу) на розподіл напружень у пластині. АЖВ загалом її зміцнює, зокрема пластичні деформації у пластині з АЖВ замість отвору та розрізу починаються за напруження P^0 у 2,75 рази більшого, ніж у пластині з отвором і розрізом такої ж форми, а границя міцності досягається за P^0 у 1,79 рази більшого. Тонке довге АЖВ більше зміцнює пластину, ніж квадратне.

РЕЗЮМЕ. На основани численного решения краевых задач теории малых упруго-пластических деформаций для линейно упрочняющегося материала с учетом разгрузки исследовано влияние концентраторов напряжений (квадратное отверстие, разрез либо абсолютно жесткое включение) в пластине на ее прочность при одноосном растяжении.

SUMMARY. The influence of the stress concentrators (a square hole, a cut and a rigid inclusion) on the plates strength under uniaxial tension was investigated on the base of the numerical solution of the boundary problems of the small elastoplastic deformations theory for linear strengthening material, taking into account its unloading.

1. Кузь І. Пластичне деформування пластин з двома співвісними або компланарними розрізами (абсолютно жорсткими включеннями) // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 76. – С. 91–98.
2. Кузь І. С., Кузь О. Н. Одновісний розтяг пружно-пластичних пластин з квадратним отвором різної орієнтації // Вісник ТНТУ. – 2013. – № 4 (72). – С. 52–59.
3. Kuz I., Kuz O., and Sulym H. Stress-strain state of elastic plate with an arbitrary smooth notch // Acta Mechanica et Automatica. – 2015. – 9, № 4 (34). – P. 241–244.
4. Ильющин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
5. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 344 с.
6. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів: Світ, 1999. – Т. 1. – 532 с.; Т. 2. – 419 с.

Одержано 26.12.2017