ЗАЛІКОВУВАННЯ ВНУТРІШНЬОЇ ПЛОСКОЇ ТРІЩИНИ У ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОМУ ТІЛІ

В. П. СИЛОВАНЮК [1], *Н. А. ІВАНТИШИН* [1], *Т. І. РИБАК* [2]

[1] *Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;*
[2] *Тернопільський національний технічний університет ім. І. Пулюя*

Побудовано математичну модель "заліковування" тріщини, що знаходиться в площині ізотропії трансверсально-ізотропного тіла за довільних зовнішніх навантажень, склеюванням її берегів. Розв'язано систему інтегральних рівнянь для переміщень берегів тріщини. Для кількох випадків одноосьового розтягу тіла із заповненою тріщиною отримано аналітичні вирази і побудовано залежності коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) від параметрів матеріалу заповнювача та пружних модулів тіла. Виявлено, що для вільної тріщини на відміну від заповненої КІН не залежить від пружних сталих матеріалу.

Ключові слова: *міцність, тріщина, ін'єкційні технології, руйнування, заліковування тріщин.*

Вступ. Технологію ін'єкційного зміцнення пошкоджених тріщинами елементів будівельних споруд тривалої експлуатації часто застосовують в інженерній практиці [1–3]. В працях [2–5] та ін. запропоновані розрахункові моделі і методи оцінювання роботоздатності відновлених елементів конструкцій та їх залишкового ресурсу. В основі цих моделей – припущення про однорідність матеріалів та ізотропію їх пружних властивостей. Розвинуто [6, 7] моделі, які враховують повзучість матеріалів, що дає можливість прогнозувати довготривалу міцність відновлених елементів конструкцій. Під час застосування технології ін'єкційного зміцнення до армованих елементів конструкцій необхідно врахувати анізотропію пружних властивостей або ж неоднорідність матеріалів. Нижче на основі моделі трансверсально-ізотропного тіла з тріщиною запропоновано метод розрахунку ефективності зміцнення такого тіла внаслідок ін'єктування ("заліковування") тріщини.

Основні співвідношення лінійної теорії пружності трансверсально-ізотропних тіл [8]. За відсутності об'ємних сил розв'язок задач лінійної теорії пружності трансверсально-ізотропного тіла зводять до знаходження компонент вектора переміщення u_j (j = 1, 2, 3) з рівнянь рівноваги

$$A_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{A_{11}-A_{12}}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+A_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{A_{11}+A_{12}}{2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]=0,$$

$$\frac{A_{11}-A_{12}}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1}+A_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2}+A_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{A_{11}+A_{12}}{2}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]=0, \quad (1)$$

$$A_{44}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_3+A_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3}+\left(A_{13}+A_{44}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)=0$$

Контактна особа: В. П. СИЛОВАНЮК, e-mail: vsylovanyuk@gmail.com

та граничних умов. Тут A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{33}, A_{44} – модулі пружності трансверсально-ізотропного тіла; x_1, x_2, x_3 – система прямокутних декартових координат.

Відомо [9, 10], що співвідношення

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi_1 + \phi_2) - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1}, \quad u_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}(m_1\phi_1 + m_2\phi_2) \quad (2)$$

будуть розв'язком рівнянь рівноваги (1), якщо функції φ_j (j = 1, 2, 3) задовольняють умови

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \nu_j \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \phi_j = 0 . \quad (3)$$

Тут

$$m_i = \frac{A_{11}\nu_i - A_{44}}{A_{13} + A_{44}} = \frac{(A_{13} + A_{44})\nu_i}{A_{33} - A_{44}\nu_i}, \qquad i = 1, 2;$$

ν_i – корені рівняння

$$A_{11}A_{44}\nu^2 + \left[A_{13}(A_{13} + 2A_{44}) - A_{11}A_{33} \right]\nu + A_{33}A_{44} = 0 , \quad (4)$$

а $\nu_3 = \dfrac{2A_{44}}{A_{11} - A_{12}}$.

Компоненти тензора напружень виразимо через переміщення:

$$\sigma_{11} = A_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \sigma_{22} = A_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{11}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\sigma_{33} = A_{13}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + A_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \sigma_{23} = A_{44}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \quad (5)$$

$$\sigma_{31} = A_{44}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad \sigma_{12} = \frac{A_{11} - A_{12}}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right).$$

Зі співвідношень (2), (5) отримаємо вирази для компонент тензора напружень у площині x_3 = const, подані через функції ϕ_j:

$$\sigma_{33} = A_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left[(1 + m_1)n_1\phi_1 + (1 + m_2)n_2\phi_2 \right],$$

$$\sigma_{23} = A_{44}\frac{\partial}{\partial x_3}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}\left[(1 + m_1)\phi_1 + (1 + m_2)\phi_2 \right] + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right\}, \quad (6)$$

$$\sigma_{13} = A_{44}\frac{\partial}{\partial x_3}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(1 + m_1)\phi_1 + (1 + m_2)\phi_2 \right] - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \right\}.$$

Таким чином, розв'язування задач теорії пружності трансверсально-ізотропного тіла з урахуванням граничних умов та умов симетрії звели до визначення функцій φ_j, гармонічних у різних системах координат.

Формулювання задачі. Нехай у трансверсально-ізотропному тілі на значній відстані від поверхні в площині ізотропії пружних властивостей міститься тріщина з поверхнею V, що займає в площині $x_3 = 0$ деяку область S, обмежену гладким контуром. Тріщину заповнено рідким ін'єкційним матеріалом, який через певний час полімеризується чи кристалізується, склеюючи її береги. Внаслідок незначного розкриття тріщини важко на практиці заповнити весь її об'єм, тому приймаємо, що ін'єкційний матеріал займає частину об'єму тріщини V_i та площу S_i (рис. 1). До поверхні тіла прикладено систему зовнішніх зусиль, які за відсутності тріщини можуть викликали в однорідному тілі тензор напружень $\hat{\sigma}^0$.

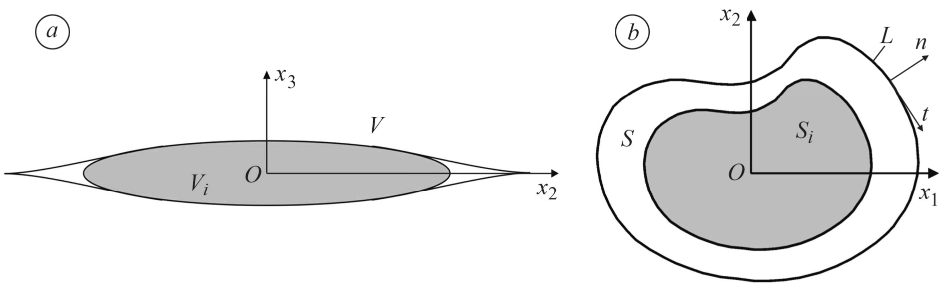

Рис. 1. Переріз тіла з тріщиною площинами $x_2 = 0$ (a) і $x_3 = 0$ (b).

Fig. 1. Cross-section of a body with a crack by planes $x_2 = 0$ (a) and $x_3 = 0$ (b).

Для формулювання цієї задачі в межах математичної теорії тріщин уявно видалимо ін'єкційний матеріал з тріщини, замінивши його дію вектором напружень $\vec{\sigma}_3^*$, компоненти якого виразимо згідно з моделлю вінклерівської основи [11]:

$$\sigma_{13}^* = \frac{[u_1^*]}{2h}\mu, \ \sigma_{23}^* = \frac{[u_2^*]}{2h}\mu, \ \sigma_{33}^* = \frac{[u_3^*]}{2h}E . \qquad (7)$$

Тут μ, E – модулі зсуву і Юнґа матеріалу наповнювача після тверднення; u_1^*, u_2^*, u_3^* – компоненти вектора переміщень точок поверхні V; $2h$ – розкриття тріщини (товщина поверхні V); дужки $[u]$ означають стрибок функції u за переходу через область S.

Інтегральні рівняння задачі. За принципом суперпозиції напружений стан у тілі подамо як суму напружених станів $\hat{\sigma}^0$ однорідного (без тріщини) тіла, що знаходиться під дією зовнішніх зусиль, і тіла з тріщиною, до поверхонь якої прикладені зусилля

$$\vec{\sigma}_3^{\pm} = \vec{\sigma}_3^* - \vec{e}_3\hat{\sigma}^0, \quad (x_1, x_2) \in S_i, \quad \vec{\sigma}_3^{\pm} = -\vec{e}_3\hat{\sigma}^0, \quad (x_1, x_2) \in (S - S_i) . \qquad (8)$$

Знаки (+) і (–) відносять величини до верхньої ($x_3 > 0$) і нижньої ($x_3 < 0$) поверхонь тріщини, відповідно. Під час запису граничних умов (8) припускали малу товщину поверхні V, тому граничні умови знесли з поверхні на серединну область S.

Оскільки функції φ_j гармонічні в різних системах координат, тобто задовольняють рівняння Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_j^2}\right)\varphi_j = 0 , \quad z_j = \frac{x_3}{\gamma_j} , \qquad (9)$$

то, застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є до (9), виразимо функції φ_j у вигляді інтегрального подання Фур'є:

$$\varphi_i(x_1, x_2, z_j) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A_j(\xi_1, \xi_2)\exp\left(-|z_j|\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} + i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)\right)\frac{d\xi_1\, d\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} , \qquad (10)$$

де $A_j(\xi_1, \xi_2)$ – невідомі функції.

З умови неперервності переміщень $\vec{u}$ поза тріщиною у площині $z_3 = 0$ та їх стрибка $[\vec{u}]$ в області S, використовуючи обернене перетворення Фур'є отримали залежності для знаходження A_j, якщо відомі стрибки $[\vec{u}]$:

$$A_j = \frac{1+m_k}{2(m_2-m_1)}\left((-1)^j i\left[\xi_1 F[u_1] + \xi_2 F[u_2] + (-1)^j \sqrt{\nu_j(\xi_1^2+\xi_2^2)}\, F[u_3]\right]\right),$$

$$A_3 = \frac{i}{2}\left(\xi_2 F\left([u_1]\right) - \xi_1 F\left([u_2]\right)\right) \qquad j = 1, 2. \tag{11}$$

Тут $F\left([u]\right) = \dfrac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\Omega}\left[u(x_1,x_2)\right]\exp\left(-i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)\right)dx_1 dx_2$.

На основі граничних умов (8) та співвідношень (2), (6), (10), (11) одержуємо інтегральні рівняння для розрахунку стрибків функції переміщень $[\vec{u}]$:

$$B_1\frac{\partial}{\partial x_j}\iint\limits_S \frac{[u_1](x_1-x_1') + [u_2](x_2-x_2')}{R^3}\,dx_1'dx_2' +$$

$$+(-1)^j B_2\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\iint\limits_S \frac{[u_1](x_2-x_2') + [u_2](x_1-x_1')}{R^3}\,dx_1'dx_2' =$$

$$= 2\pi\begin{cases}\dfrac{\left[u_j^0 + u_j\right]}{2h}\mu - \sigma_{j3}^0, & (x_1,x_2)\in S_i\\ -\sigma_{j3}^0, & (x_1,x_2)\in S - S_i\end{cases}$$

$$B_4\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}\right)\iint\limits_S \frac{[u_3]dx_1'dx_2'}{R} = 2\pi\begin{cases}\dfrac{\left[u_3^0 + u_3\right]}{2h}E - \sigma_{33}^0, & (x_1,x_2)\in S_i\\ -\sigma_{33}^0, & (x_1,x_2)\in S - S_i\ .\end{cases} \tag{12}$$

Тут введені такі позначення: $\vec{u}^0$ – вектор переміщень поверхні V_i в однорідному (без тріщини) тілі, коли задані зовнішні навантаження; $R = \sqrt{(x_1-x_1')^2 + (x_2-x_2')^2}$,

$$B_1 = \frac{A_{44}(1+m_1)\ (1+m_2)}{(m_2-m_1)\sqrt{\nu_1\nu_2}}, \qquad B_2 = \frac{A_{44}}{\sqrt{\nu_3}}, \qquad B_3 = -\frac{1}{m_2-m_1}\left(\frac{1+m_1}{\sqrt{\nu_1}} - \frac{1+m_2}{\sqrt{\nu_2}}\right),$$

$$B_4 = \frac{A_{44}(1+m_1)(1+m_2)\left(\sqrt{\nu_2} - \sqrt{\nu_1}\right)}{m_2-m_1},\ B_5 = \frac{m_2(1+m_1)\sqrt{\nu_1} - m_2(1+m_2)\sqrt{\nu_2}}{m_2-m_1}.$$

Таким чином, задачу про пружну рівновагу трансверсально-ізотропного тіла зі заповненою тріщиною звели до знаходження розв'язку системи інтегральних рівнянь (12). Гранично-рівноважний стан тіла можна встановити, наприклад, за силовим критерієм Ірвіна, розрахувавши коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для розглянутої схеми.

КІН K_{I}, K_{II}, K_{III} можна обчислювали безпосередньо через стрибки переміщень берегів тріщини [12]:

$$K_{\mathrm{I}} = B_4\lim_{n\to -0}\sqrt{-\frac{\pi}{8n}}[u_3],\quad K_{\mathrm{II}} = B_1\lim_{n\to -0}\sqrt{-\frac{\pi}{8n}}[u_n],\quad K_{\mathrm{III}} = B_2\lim_{n\to -0}\sqrt{-\frac{\pi}{2n}}[u_t], \tag{13}$$

де n, t – зовнішня нормаль і дотична до контуру тріщини (рис. 1*b*).

Еліптична тріщина у трансверсально-ізотропному тілі. Якщо в такому тілі в площині ізотропії пружних властивостей виникає еліптична в плані тріщина, то КІН K_1 за одновісного розтягу зусиллями інтенсивності σ^{∞} перпендикулярно до площини тріщини визначають за формулою [13]

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{\sqrt{\pi b}\sigma^{\infty}}{\sqrt{a}E(k)}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{1/4}, \tag{14}$$

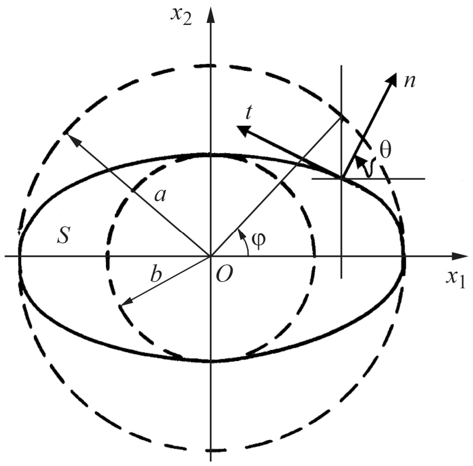

Рис. 2. Серединна область S еліпсоїдальної тріщини.

Fig. 2. The middle area S of an elliptical crack.

яка збігається з відповідною для ізотропного тіла. Тут $E(k)$ – повний еліптичний інтеграл другого роду; $k = \sqrt{(a^2 - b^2)/a^2}$; ϕ – кут, що визначає параметричні координати точки на еліпсі $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ (рис. 2).

За силовим критерієм Ірвіна міцність такого тіла з еліптичною тріщиною, якщо вона пошириться в площині розміщення, така:

$$\sigma_c = \frac{K_{IC}E(k)}{\sqrt{\pi b}}, \tag{15}$$

де K_{IC} – тріщиностійкість матеріалу під час поширення тріщини в площині ізотропії.

Нехай тепер тріщина заповнена ін'єкційним матеріалом у всьому об'ємі. Тоді з (8) отримаємо:

$$B_4\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\iint_S \frac{u_3 dx_1' dx_2'}{R} = 2\pi\left(-\sigma^{\infty} + \sigma^{\infty}\varepsilon E_* - \frac{u_3 E}{h}\right),$$

$$\varepsilon = \frac{(A_{11} + A_{12})}{A_{33}(A_{11} + A_{12}) - 2A_{13}^2}. \tag{16}$$

Вважаючи поверхню заповненої тріщини сплющеним еліпсоїдом $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 + x_3^2/c^2 = 1$, $a \geq b >> c$, розв'язок інтегрального рівняння дістанемо у вигляді

$$u_3(x_1, x_2) = \frac{b\sigma^{\infty}(1 - \varepsilon E)}{\beta E_* + B_4 E(k)}\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}}, \quad \beta = a/c. \tag{17}$$

Звідси на основі першого співвідношення (13) отримаємо формулу для обчислення КІН по контуру заповненої еліптичної тріщини:

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{\sqrt{\pi b}\sigma^{\infty}(1 - \varepsilon E_*)B_4}{\sqrt{a}(\beta E + B_4 E(k))}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{1/4}. \tag{18}$$

За критерієм Ірвіна міцність тіла із "залікованою" тріщиною

$$\sigma^i = \frac{K_{\mathrm{IC}}(\beta E + B_4 E(k))}{\sqrt{\pi b}(1 - \omega E)B_4}. \tag{19}$$

Отже, залежно від пружних сталих тіла і матеріалу заповнювача, а також геометричних параметрів дефекту можна досягнути міцності, як для тіла без тріщини. Модуль пружності заповнювача при цьому може бути суттєво меншим, ніж основного матеріалу.

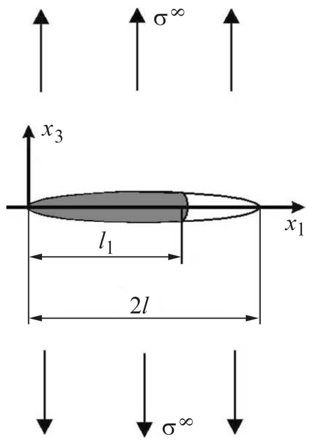

Рис. 3. Тіло з тріщиною, заповненою ін'єкційним матеріалом з одного краю.

Fig. 3. Body with a crack partially filled with injection material from one side.

Частково заповнена тріщина. Оцінимо плоску деформацію тіла із заповненою тріщиною за розтягу (рис. 3).

У цьому випадку систему рівнянь (12) інтегруванням за змінною x_2 у межах від $-\infty$ до ∞ зведемо до одного сингулярного інтегрального рівняння відносно стрибка переміщень u_3:

$$\int_0^{2l} \frac{[u_3'(t)]\,dt}{t-x_1} - \frac{2\pi E[u_3(x_1)]}{B_4\, h(x_1)} H(l_1-x_1) = \frac{2\pi p}{B_4} \times (\varepsilon H(l_1-x_1)-1),\ 0 \le x \le 2l. \tag{20}$$

Тут $H(l_1-x_1)$ – функція Гевісайда; $\omega = \dfrac{E(A_{11}+A_{12})}{A_{33}(A_{11}+A_{12})-2A_{13}^2}$.

З рівняння (20) визначені КІН на кожному кінці тріщини залежно від ступеня їх заповнення та параметра ω, що описує відношення модуля Юнга матеріалу заповнювача до модулів пружності трансверсально-ізотропного тіла (рис. 4). Під час розрахунків форму поверхні тріщини вважали еліптичною, тобто $h(x_1) = c\sqrt{1-(x_1-l)^2/l^2}$, $l/c = 10$, c – мала піввісь еліпса $\dfrac{(x_1-l)^2}{l^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1$.

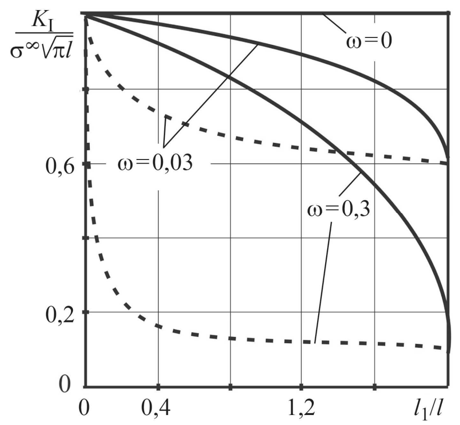

Рис. 4 Залежність КІН від розміру зони заповнення тріщини (l_1/l) за різних значень параметра ω. Штрихові лінії – ліва вершина тріщини (біля заповненої частини тріщини); суцільні – права (незаповнена).

Fig. 4. Dependence of SIF near the crack tips on the filling zone size (l_1/l) at various values of parameter ω. Dashed lines – the left crack tip (near the filled part of the crack); solid lines – right part (unfilled).

Наведені вище розрахунки свідчать, що на відміну від вільної тріщини в площині ізотропії трансверсально-ізотропного тіла, де КІН не залежать від пружних сталих матеріалу, для заповненої така залежність властива. Ефективніше "заліковуються" тріщини в трансверсально-ізотропних матеріалах з меншими модулями Юнга в напрямах, нормальних до площини ізотропії.

РЕЗЮМЕ. Построена математическая модель "залечивания" трещины, что находится в плоскости изотропии трансверсально-изотропного тела при произвольных внешних нагрузках, склеиванием ее берегов. Решена система интегральных уравнений относительно перемещений берегов трещины. Для нескольких случаев одноосного растяжения тела с заполненной трещиной получены аналитические выражения и построены зависимости коэффициента интенсивности напряжений (КИН) от параметров материала заполнителя и упругих модулей тела. Выявлено, что для свободной трещины в отличие от заполненной КИН не зависит от упругих постоянных материала.

SUMMARY. A mathematical model for healing the crack by gluing its surfaces its constructed for the plane internal defect in the isotropy plane of a transversely isotropic body and arbitrary external loads. A system of integral equations with respect to the displacements of the crack faces is solved mathematically. For several cases of uniaxial tension of a body with a filled crack the relations are obtained and graphical dependences for the stress intensity factors (SIF) are constructed depending on the parameters of the filling material and the elastic moduli of the body. It is found that for an unfilled crack, contrary to the filled one, the SIF does not depend on the elastic constants of the material.

1. *Carnecki L. and Emmons P. H.* Naprava i ohrona konstrukcji betonowych. – Krakow: Polski Cement, 2002. – 434 s.
2. *Panasyuk V. V., Marukha V. I., and Sylovanyuk V. P.* Injection Technologies for Repair of Damaged Concrete Structures. – Springer, 2014. – 230 p.
3. *Маруха В. І., Панасюк В. В., Силованюк В. П.* Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. – Львів: Сполом, 2009. – 298 с.
4. *Панасюк В. В., Силованюк В. І., Маруха В. І.* Міцність пошкоджених тріщинами елементів конструкцій, залікованих за ін'єкційними технологіями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – № 6. – С. 60–64.

   (*Strength* of cracked structural elements healed by injection methods / V. V. Panasyuk, V. I. Marukha, V. P. Sylovanyuk // Materials Science. – 2005. – **41**, № 6. – P. 777–783.)
5. *Силованюк В. П. Маруха В. І., Онищак Н. В.* Залишкова міцність циліндричних елементів з тріщинами, залікованими за ін'єкційною технологією // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 1. – С. 99–103.

   (*Sylovanyuk V. P., Marukha V. I., and Onyshchak N. V.* Residual strength of cylindrical elements with cracks healed by using the injection technology // Materials Science. – 2007. – **43**, № 3. – P. 109–116.)
6. *Силованюк В. П., Ревенко А.* В. Вплив повзучості матеріалу включень на концентрацію напружень в тілі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 4. – С. 76–80.

   (*Sylovanyuk V. P. and Revenko A. V.* Influence of creep of the material of inclusions on the stress concentration in the body // Materials Science. – 2009. – **45**, № 4. – P. 555–561.)
7. *Силованюк В. П., Ревенко А. В.* Довготривала міцність пружного тіла з еліптичною тріщиною, заповненою в'язкопружним матеріалом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – **48**, № 1. – С. 33–38.

   (*Sylovanyuk V. P. and Revenko A. V.* Long-term strength of an elastic body with elliptic crack filled with a viscoelastic material // Materials Science. – 2012. – **48**, № 1. – P. 29–35.)
8. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
9. *Elliott H. A.* Axial symmetric stress distribution in aelotropic hexagonal crystals. The problem of the plane and related problems // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1949. – **45**. – P. 621–630.
10. *Hu H. C.* On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body // Deta Sci. Sinica. – 1953. – **2**. – P. 145–151.
11. *Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П.* Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
12. *Силованюк В. П.* Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. – Львів: Національна академія наук України. Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка, 2000. – 300 с.
13. *Sih G. C.* Handbook of stress intensity factors. – Bethlehem: Lehigh Univ. press, 1973. – Vol. 1. – 420 p.

Одержано 07.08.2018