

УДК 624.012.36

ЖОРСТКІСТЬ МОНОЛІТНИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ПЛИТНИХ КОНСТРУКЦІЙ

І. В. МЕЛЬНИК

Національний університет "Львівська політехніка"

Показано, що більшість розрахунків плитних залізобетонних конструкцій базується на класичній теорії згину пружних пластин. За результатами теоретичного аналізу з використанням методу скінченних елементів та теорії оболонки встановлено, що циліндричні жорсткості плитних елементів з трубчастими вставками в обох напрямках різні. Моделюючи роботу плит з вставками квадратного, прямокутного і круглого перерізу і використовуючи метод скінченних елементів, отримали циліндричні жорсткості плит з геометричними параметрами, характерними для реальних плитних конструкцій.

Ключові слова: монолітні плоскі залізобетонні конструкції, ефективні трубчасті вставки, напружено-деформований стан, жорсткість.

Вступ. В останні роки все ширше використовують монолітні плоскі залізобетонні перекриття, особливо в будівлях цивільного призначення (житло, офіси тощо). Спостерігаємо також тенденцію до збільшення прольотів таких перекриттів і використання їх у торговельних і виставкових комплексах. Все ширше використовують монолітні залізобетонні плити у фундаментах, прогінних будовах мостів та інших спорудах.

Для суттєвого зменшення ваги плоских монолітних залізобетонних перекриттів та інших плитних конструкцій доцільно використовувати ефективні вставки як окремі вироби з відносно легких і дешевих матеріалів, які розташовують у середній частині і залишають у плиті після її бетонування [1].

Здебільшого вигіднішим є однонаправлене розташування трубчастих вставок. Важливим при цьому є співвідношення жорсткостей у повздовжньому і поперечному напрямках, що необхідно враховувати під час загального статичного розрахунку плит. Для цього використовують метод розрахунку тонких пружних пластин, прогин яких є співмірним з їх товщиною [2, 3]. Основою цього методу є диференціальні рівняння, які описують зігнуту поверхню пластини та залежності між моментами та деформаціями з використанням у цих залежностях циліндричної жорсткості:

$$\left. \begin{aligned} D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) &= q(x, y); \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Тут D – циліндрична жорсткість пластини (плити); $w = w(x, y)$ – функції прогинів (вертикальних переміщень) плити; $q(x, y)$ – функції інтенсивності розподіленого у плиті навантаження; M_x, M_y, M_{xy} – моменти в площинах xOz, yOz і відповідний

крутний момент у розглядуваному перерізі (точці); E – модуль пружності пластини (плити); h – товщина плити; ν – коефіцієнт Пуассона.

Розв'язок диференціальних рівнянь (1) можна отримати шляхом підбору спеціальних функцій, які задовольняють крайові умови за контуром пластини. Здебільшого це тригонометричні функції, які дають можливість визначити момент і прогини для пластин правильної (симетричної) форми в плані – квадратні, прямокутні, круглі тощо.

Запропоновано [4] розраховувати безбалкове перекриття з використанням тригонометричних рядів. Перекриття розглядали як плиту, завантажену зверху рівномірно розподіленим навантаженням, яке зрівноважують опорними реакціями знизу в межах площі капітелей колон. Функцію зміни навантаження і реакцій розклали в подвійний тригонометричний ряд, що суттєво ускладнило обчислення. За такого підходу використати цей метод на практиці вкрай важко.

Для опису напружено-деформованого стану міжколонних плит залізобетонного перекриття [5] рівняння (1) подамо у вигляді подвійних тригонометричних рядів. За умови $L_1 = L_2 = L$:

$$W(x, y) = \frac{16q_0(L-2a)^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}}{mn(m^2 + n^2)^2}, \quad (2)$$

де m, n – цілі непарні числа (1, 3, 5, ...); L_1, L_2 – відстань між осями колон; a – розмір консольної частини плити; $q(x, y) = q_0$ – рівномірно розподілене навантаження.

Для розрахунку диска перекриття зі збірних залізобетонних плит розроблено технічну теорію напівмоментної конструктивно-ортотропної плити [6]. Внаслідок незначного впливу поперечної згинної жорсткості, циліндричну жорсткість у напрямку Oy прийнято нульовою. За такої умови вихідне диференціальне рівняння згину спрощуємо:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = q, \quad (3)$$

де $H = 2(D_{yx} + D_{xy}) + \nu_x D_{yx} + \nu_y D_{xy}$. Тут D_x, D_y, D_{xy}, D_{yx} – жорсткості на згин і на кручення для головних напрямів пружності; ν_x, ν_y – коефіцієнти Пуассона за розтягу в напрямках Ox, Oy .

Для розрахунку балки (смуги) залізобетонного фундаменту, який лежить на пружній основі, здебільшого використовують диференціальне рівняння четвертого порядку пружної лінії конструкції [7]:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P_x = \Psi_x, \quad (4)$$

де EI – жорсткість конструкції; $y(x)$ – вертикальне переміщення центральної осі конструкції; P_x – розподілена реакція від основи; Ψ_x – задане активне навантаження.

Для розрахунку мостів з повздовжніми і поперечними балками розглянуто [8] прогінну будову як тонку ортотропну пластину, пружна поверхня якої описана таким диференціальним рівнянням:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\theta \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + s \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q(x, y)}{D_1}, \quad (5)$$

де θ – відносна жорсткість кручення; $s = D_2 / D_1$ – відносна жорсткість згину; D_1 і D_2 – жорсткість згину в головному Ox і поперечному Oy напрямках.

Для розрахунку порожнистих конструкцій можна частково використати методи, які напрацьовані для поліетиленових труб зі стільниковою стінкою [9].

Пропозиції щодо визначення жорсткостей плити з квадратними, прямокутними і круглими вставками. За основу для розрахунку жорсткостей плит з вставками прийняті перекриття як найрозповсюдженіші плитні конструкції. Оскільки лінійні розміри перекриття у плані є на порядок більшими від його товщини ($h/l < 1/10$), для розрахунку можна використати теорію згину пластин [3] за припущення лінійно-пружного деформування конструкцій.

Рівняння рівноваги конструкційно-ортотропної пластини, якою моделюємо залізобетонну плиту з трубчастими вставками, є аналогічними до рівнянь теорії суцільної пластини, а саме:

$$\frac{dM_{xy}}{dx} - \frac{dM_y}{dy} + Q_y = 0; \quad \frac{dM_{yx}}{dy} - \frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0; \quad \frac{dQ_x}{dx} - \frac{dQ_y}{dy} + q = 0, \quad (6)$$

де q – інтенсивність зовнішнього навантаження в напрямку Oz ; M_x, M_y – згинальні та $M_{xy} = -M_{yx}$ – крутні моменти; Q_x, Q_y – перерізувальні зусилля.

Компоненти деформацій серединної поверхні пластини χ_x, χ_y, τ виражають через прогин w так [3]:

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (7)$$

Рівняння стану, які зв'язують моменти M_x, M_y, M_{xy} та M_{yx} з кривизною серединної поверхні χ_x, χ_y, τ конструкційно-ортотропної пластини, записуємо аналогічно до рівнянь теорії згину суцільних пластин [3, 4]:

$$M_x(x, y) = D_x^* \chi_x(x, y) + D_y^* \chi_y(x, y); \quad M_y(x, y) = D_y^* \chi_x(x, y) + D_x^* \chi_y(x, y); \quad (8)$$

$$M_{xy}(x, y) = 2D_{xy}^* \tau(x, y); \quad M_{yx}(x, y) = -2D_{yx}^* \tau(x, y).$$

Тут $D_x^*, D_y^*, D_x'^*, D_y'^*, D_{xy}^*, D_{yx}^*$ – перехідні циліндричні жорсткості на згин та кручення у відповідних напрямках. Такий запис дає змогу в частковому випадку одержати відомі [4] результати для згину пластини зі суцільною стінкою, задавши циліндричні жорсткості у вигляді

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D_x' = D_y' = \nu_y D_x, \quad D_{xy} = D_{yx} = \frac{Gh^3}{12}, \quad (9)$$

де E_i, G та ν_i – модулі пружності і зсуву, коефіцієнт Пуассона ортотропного матеріалу у відповідних напрямках.

Однак жорсткості D_{ij}^* , які входять у співвідношення (8) для пластин, якими моделюємо залізобетонні плити з трубчастими вставками, є невідомими величинами та потребують розрахунку. Ці жорсткості визначають конструкційну ортотропію залізобетонних плит, спричинену трубчастими вставками. Аналогічно до співвідношення (9) їх подаємо у вигляді

$$D_x^* = c_x \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad D_y^* = c_y \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad D_x'^* = \nu c_x' \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)},$$

$$D_y'^* = \nu c_y' \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad D_{xy}^* = c_{xy} \frac{Gh^3}{12}, \quad D_{yx}^* = c_{yx} \frac{Gh^3}{12}. \quad (10)$$

Тут h – товщина залізобетонного перекриття; $c_x, c_y, c'_x, c'_y, c_{xy}, c_{yx}$ – коефіцієнти, які залежать від конструкційної особливості залізобетонного перекриття (насамперед геометричних параметрів вставок). Значення цих коефіцієнтів характеризують зменшення циліндричних жорсткостей порівняно з такими ж для залізобетонної плити зі суцільною стінкою товщиною h .

Розглянемо залізобетонну плитну конструкцію на прикладі перекриття з квадратними трубчастими вставками, яку навантажують окремо згинальними M_x, M_y та крутними M_{xy}, M_{yx} моментами.

Використовуючи метод скінченних елементів, залежно від прикладеного навантаження встановлюємо прогини w порожнистого перекриття, на основі яких розраховуємо кривизну серединної поверхні $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$. Відтак зі співвідношень (8), маючи задані моменти M_x, M_y, M_{xy} , а також встановлені кривизни $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$, визначаємо відповідні циліндричні жорсткості (10). Для таких елементів, згідно з виразами (9), виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned} D_x^* \chi_x^{(A)} + D_y^* \chi_y^{(A)} &= M_x; & D_y^* \chi_y^{(A)} + D_x^* \chi_x^{(A)} &= 0; \\ D_x^* \chi_x^{(B)} + D_y^* \chi_y^{(B)} &= 0; & D_y^* \chi_y^{(B)} + D_x^* \chi_x^{(B)} &= M_y; & 2D_{xy}^* \chi_{xy}^{(C)} &= M_{xy}, \end{aligned} \quad (11)$$

які утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих жорсткостей. Тут індекс A відповідає прикладеному згинальному моменту M_x , B – моменту M_y та C – крутному моменту M_{xy} .

З використанням скінченноелементної програми виконано комплекс числових експериментів для визначення напружено-деформованого стану залізобетонного перекриття, навантаженого моментами M_x, M_y та M_{xy} . Моделювали порожнисте залізобетонне перекриття, використовуючи восьмивузлові лінійні скінченні елементи та результати експериментальних досліджень фрагментів перекриття з квадратними вставками [10, 11].

З отриманих результатів для прогинів w серединної поверхні залізобетонного пластинчастого елемента визначили відповідні кривизни $\chi_x^{(A)}, \chi_y^{(A)}, \chi_x^{(B)}, \chi_y^{(B)}, \chi_{xy}^{(C)}$, які входять у систему рівнянь (11).

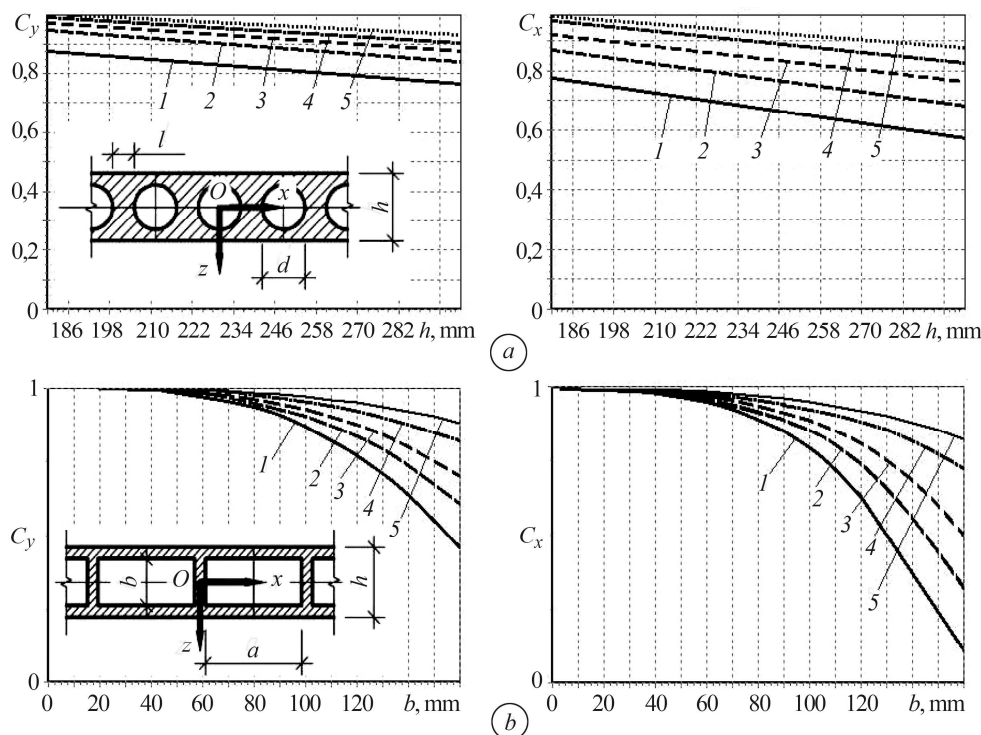
Підставляючи в систему лінійних алгебраїчних рівнянь (11) значення моментів і кривизни та розв'язуючи її, отримуємо циліндричні і крутні жорсткості залізобетонного перекриття з трубчастими вставками квадратної форми заданих розмірів: $D_x^*; D_y^*; D_x^*; D_y^*; D_{xy}^*$.

Змінюючи геометричні розміри трубчастих вставок квадратної форми, на основі запропонованого алгоритму встановили циліндричні жорсткості D_x^*, D_y^* залізобетонних перекриттів з вставками та відповідні коефіцієнти c_x та c_y , які відображають зменшення цих жорсткостей.

Детальніше запропонований підхід для визначення жорсткостей перекриття з квадратними вставками поданий раніше [12]. Розвиваючи його, промоделивали роботу фрагментів монолітного перекриття не лише з квадратними, але і з круглими та прямокутними вставками з різними геометричними розмірами поперечних перерізів. Ці параметри прийняті в діапазоні, прив'язаному до розмірів перекриттів, які можуть використовувати на практиці, а саме: перекриття з круглими вставками: загальна товщина $h = 180 \dots 300$ mm; діаметр вставок $d = 80 \dots 200$ mm; відстань між вставками – 60 mm; перекриття з квадратними вставками: загальна товщина $h = 180 \dots 300$ mm; сторона квадратів $a = 80 \dots 160$ mm; товщина вертикальних ребер 60 mm; перекриття з прямокутними вставками: загальна товщина

$h = 180 \dots 300$ mm; висота (менший розмір вставок) $b = 80 \dots 160$ mm; ширина (більший розмір вставок) $a = 100 \dots 200$ mm; товщина вертикальних ребер 60 mm.

З використанням скінченноелементної програми виконане числове моделювання роботи перекриттів з вставками зі зазначеними змінними параметрами для обчислення коефіцієнтів зниження жорсткості C_x , C_y . Результати моделювання отримані у вигляді комп'ютерної програми (алгоритму), що дозволяє, задаючи геометричні розміри перекриття з вставками у зазначеному діапазоні, одержати відповідні коефіцієнти C_x , C_y . Графіки зміни коефіцієнтів C_x , C_y для перекриттів з круглими і прямокутними вставками зображені на рисунку.



Визначення коефіцієнтів C_y , C_x для розрахунку плит з круглими (а: 1 – $h_1 = 30$ mm; 2 – 40; 3 – 50; 4 – 60; 5 – 70 mm) та прямокутними (b: 1 – $h = 180$ mm; 2 – 200; 3 – 220; 4 – 260; 5 – 300 mm) вставками.

Determination of the coefficients C_y , C_x to calculate the plates with a circular (a: 1 – $h_1 = 30$ mm; 2 – 40; 3 – 50; 4 – 60; 5 – 70 mm) and rectangular (b: 1 – $h = 180$ mm; 2 – 200; 3 – 220; 4 – 260; 5 – 300 mm) inserts.

Для перекриттів з квадратними вставками характер зміни коефіцієнтів C_x , C_y подібний до зміни C_x , C_y з прямокутними. Аналогічний підхід використали для визначення жорсткості інших плитних конструкцій з більшими геометричними параметрами, зокрема фундаментних плит.

ВИСНОВКИ

Огляд існуючих методів розрахунку перекриттів, фундаментів та інших плитних конструкцій показав, що вони базуються зазвичай на класичних рівняннях плоскої пружної пластини з використанням, зокрема, тригонометричних і бігармонійних рядів, що є складним для застосування на практиці. Моделюючи залізобетонне перекриття з трубчастими вставками ортотропною пластиною, з позицій рівнянь теорії пружності запропоновано методику визначення жорсткостей на згин в обох напрямках. При цьому застосовували числовий метод, який базується на

методі скінченних елементів. За результатами числового моделювання отримано зменшені циліндричні жорсткості монолітних залізобетонних перекриттів з трубчастими вставками квадратної, прямокутної та круглої форм зі змінними геометричними параметрами. Аналогічний підхід можна використати для загального статичного розрахунку фундаментів, мостових споруд та інших плитних конструкцій.

РЕЗЮМЕ. Показано, что большинство расчетов плитных железобетонных конструкций основано на классической теории изгиба упругих пластин с использованием метода конечных элементов и теории оболочек. Установлено, что цилиндрические жёсткости плитных элементов с трубчатыми вкладышами в обоих направлениях разные. Моделируя работу плит с вкладышами квадратного, прямоугольного и круглого сечения, с использованием метода конечных элементов определили значения цилиндрических жесткостей плит с геометрическими параметрами, характерными для реальных плитных конструкций.

SUMMARY. It is shown that a majority of calculations of slab reinforced concrete structures are based on the theory of bending of elastic plates using the finite element method and the shells theory. It is established that the cylindrical rigidity of plate elements with tubular liners in both directions are different. Modeling the work of slabs with square, rectangular and circular sections, using the finite element method, the values of flexural rigidity of plates with geometric parameters characteristic of real slab structures are determined.

1. Мельник І. В. Оптимізація залізобетонних конструкцій з допомогою ефективних вставок // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Теорія і практика будівництва. – 1997. – № 4. – С. 89–90.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. П. Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 626 с.
3. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А. В. Кармишин, В. А. Лясковец, В. И. Мяченков, А. Н. Фролов. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.
4. Штаерман М. Я., Ивянский А. М. Безбалочные перекрытия. – М.: Гос. изд-во по строительству и архитектуре, 1953. – 336 с.
5. Нижник О. В. Безбалкові та часторебристі сталезалізобетонні перекриття: дис. д-ра техн. наук. – Полтава, 2012. – 452 с.
6. Семченков А. С. Пространственно-деформирующиеся железобетонные диски перекрытий многоэтажных зданий. Экспериментальные исследования, практические методы расчета и проектирование: дис. д-ра техн. наук. – Москва, 1991. – 704 с.
7. Симвулиди И. А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании. – М.: Высш. шк., 1973. – 432 с.
8. Донченко В. Г. Пространственный расчет балочных автодорожных мостов. – М.: Авто-трансиздат, 1953. – 324 с.
9. Сташук М. Г., Дорош М. І. Методи розрахунку поліетиленових труб із стільниковою стінкою (огляд) // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – 49, № 5. – С. 51–65.
(Stashshuk M. G., Dorosh M. I. Estimation of the stress state of polymeric pipe structures with hollow (cellular) structure of the wall // Materials Sciences. – 2014. – 49, № 5. – P. 181–191.)
10. Мельник І. В., Сорохтей В. М. Конструктивні рішення плоских монолітних залізобетонних перекриттів з ефективними вставками і експериментальне дослідження їх фрагментів // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – 2006. – Вип. 14. – С. 253–260.
11. Рычков С. П. MSC. Visual nastran для Windows. – М.: NT Press, 2004. – 552 с.
12. Мельник І. В. Визначення жорсткостей монолітних плоских залізобетонних перекриттів з трубчастими вставками квадратної форми // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: зб. наук. пр. 5-ої Міжнар. конф. – 2014. – С. 491–498.

Одержано 28.11.2018