

УДК 621.314.26

ПОБУДОВА КОНТУРА МОДУЛЯЦІЇ ВИХІДНОЇ НАПРУГИ ДЖЕРЕЛА ЖИВЛЕННЯ З НЕЛІНІЙНИМ ТРАНСФОРМАТОРОМ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПОНИЖЕНОГО ПОРЯДКУ

Т.В. Мисак, канд. техн. наук

Інститут електродинаміки НАН України,
пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03057, Україна
e-mail: taras@igbt.com.ua

Об'єктом дослідження є джерело синусоїдальної напруги, яке має в своєму складі перетворювач частоти з вихідним LC-фільтром та нелінійний однофазний вихідний трансформатор. Побудовано математичну модель цього джерела у вигляді нелінійної сингулярно-збуреної системи диференціальних рівнянь. Отримано умови існування інтегрального многовиду в системі з невідомим наперед керуванням в узагальненому вигляді. Показано можливість пониження порядку математичної моделі джерела за допомогою інтегрального многовиду у формі степеневого ряду. Проведено синтез стратегії керування шляхом встановлення зв'язку між модулюючою функцією та коефіцієнтами функції Ляпунова. Наведено результати моделювання. Бібл. 14, рис. 2.

Ключові слова: перетворювач частоти, вихідний LC-фільтр, нелінійний трансформатор, сингулярно-збурена система, інтегральний многовид, теорема існування, пониження порядку.

Вступ. Частоти і амплітуди напруги в мережах електроживлення автономних рухомих об'єктів відмінні від частот і напруг у стаціонарних мережах. З іншого боку, споживачі у таких автономних системах можуть отримувати живлення як від зовнішніх стаціонарних мереж, так і від внутрішніх генераторів та/або альтернативних джерел. Джерела живлення у цих мережах мають забезпечувати мінімальні відхилення амплітуд вихідної напруги та частоти як у квазістаціонарних, так і в перехідних режимах за наявності гальванічної розв'язки між входом та виходом. Для забезпечення прийняттого значення коефіцієнта спотворень вихідної напруги у всьому діапазоні струмів навантаження в схемах завжди наявні одно- або багатополосні фільтри [8], що викликає виникнення сплесків напруги при стрибках навантаження.

Постановка задачі. Електричну схему однофазного автономного джерела живлення, яка традиційно складається з перетворювача частоти (ПЧ), LC-фільтра, вихідного трансформатора та навантаження, представлено на рис. 1. Перший контур модуляції є детермінованим ШІМ-регулятором, в якому команда на керування ключами формується за допомогою оцінки знака різниці еталонного синусоїдального сигналу та високочастотного модулюючого сигналу трикутної форми. Додатково для підтримання мінімального відхилення напруги на навантаженні вводиться підмодулюючий сигнал, який у загальному випадку обчислюється з величин, пропорційних вимірюванім у реальному часі напругам та струмам. Тому можна вважати, що згідно з класифікацією [2] має місце двоступенева модуляція.

Нові генерації силових напівпровідникових приладів виправдовують загальноприйняте припущення про ідеальність ключів ПЧ, що дає змогу вважати силову частину перетворю-

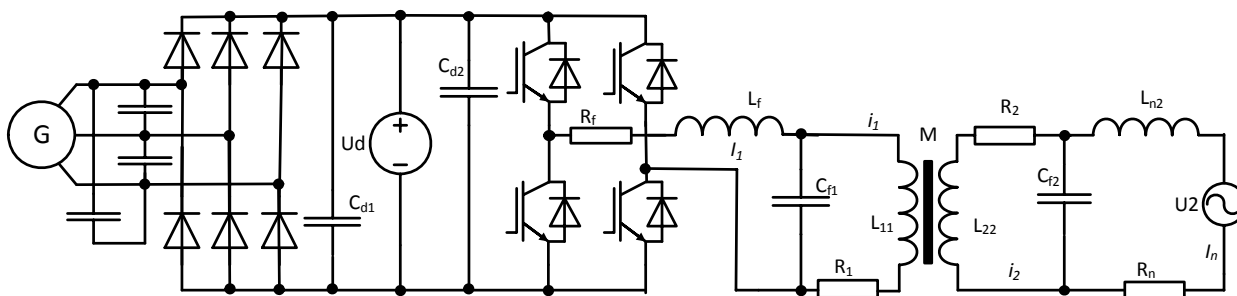


Рис. 1

вача безінерційною. Якщо використовується достатньо висока базова частота ШІМ, можна вважати вихідну напругу ПЧ рівною її середньому значенню за один період ШІМ [13]. Для розв'язання задачі побудови вихідного сигналу другого контура модуляції систему, електричну схему якої показано на рис. 1, можна описати диференціальними рівняннями (ДР):

$$\begin{aligned} L_f \frac{dI_1}{dt} &= U_{FC} - U_1 - R_f I_1; \quad \frac{dU_1}{dt} = \frac{1}{C_{f1}} (I_1 - i_1); \quad \frac{dU_2}{dt} = \frac{1}{C_{f2}} (-i_2 - I_n); \\ U_1 &= R_1 i_1 + \frac{d\Psi_1}{dt}; \quad U_2 = -R_2 i_2 - \frac{d\Psi_2}{dt}; \quad I_n = X(U_2, I_n, t), \end{aligned} \quad (1)$$

де U_1, U_2 – миттєві значення напруги на фільтрових конденсаторах; Ψ_1, Ψ_2 – миттєві значення потокозчеплень обмоток трансформатора; U_{FC} – миттєве значення напруги на виході ПЧ; I_1, I_n – вихідний струм ПЧ та навантаження (як деяка невідома функція X); R, L, C – активні опори, індуктивності та ємності відповідно до електричної схеми рис. 1.

У трансформаторах з феромагнітним магнітопроводом магнітна проникність матеріалу осердя не є постійною. Тому протягом всього циклу перемагнічування не є константами також власні індуктивності L та взаємоіндуктивність M обмоток трансформатора. В результаті такої девіації магнітної проникності може виникати спотворення струму намагнічування [1]. Для багатьох задач керування нехтування струмом намагнічування не можна вважати коректним, оскільки в деяких режимах магнітопроводи можуть входити до стану насичення. Величина і форма струмів обмоток змінюються при насиченні магнітопроводу трансформатора, яке проявляється як нелінійна залежність індукції B від напруженості H магнітного поля $B(H)$ (крива намагнічування). Тобто передостанні два рівняння з (1), які стосуються процесу передачі енергії трансформатором, відповідають схемі заміщення з нелінійними індуктивностями та взаємоіндуктивностями, які враховують ступінь насичення магнітопроводу по кривій намагнічування [1]. Для того щоб отримати в аналітичному вигляді вирази для L_{11}, L_{22}, M , скористаємось способом апроксимування, запропонованим в [10]. У загальному випадку, при n експериментально знятих точках характеристики намагнічування, можна побудувати апроксимуючий поліном степені $m < n$, який матиме вигляд

$$B(H) = \sum_{k=0}^n \alpha_{2k+1} H^{2k+1}, \quad (2)$$

де α_{2k+1} – сталі, які мають визначатись за реальною кривою намагнічування.

Для побудови емпіричних поліномів при апроксимації характеристик намагнічування можна використовувати метод середніх [10]. Він є дещо простішим у своїй реалізації в порівнянні з методом найменших квадратів, проте точність визначення коефіцієнтів у нього нижча. Застосування аналітичної апроксимації кривої намагнічування трансформатора дає змогу перейти від потокозчеплення до індукції залежно від напруженості магнітного поля, з якої, в свою чергу, врахувавши диференціальну магнітну проникність $\mu(H)$, нескладно вивести з двох передостанніх рівнянь в (1) диференціальні рівняння відносно незалежних струмів обмоток (або індукції та одного із струмів) [14]:

$$U_1 = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \quad U_2 = -R_2 i_2 - L_{22} \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}, \quad (3)$$

де L_{11}, L_{22} – індуктивності короткого замикання та M – взаємоіндуктивність, які є нелінійними функціями, що залежать від напруженості магнітного поля H , геометричних параметрів обмоток та їх взаєморозташування на магнітному осерді, магнітних властивостей самого осердя.

Зважаючи на те, що індуктивність короткого замикання з достатньою точністю враховує падіння напруги на трансформаторі, обумовлене полями розсіювання [1], маємо можливість перейти до запису нелінійних величин L_{11}, L_{22}, M , виразивши напруженість магнітного поля через струм намагнічування в такому вигляді:

$$L_{11} = L_{110} v(i_{\text{magn}}), \quad L_{22} = L_{220} v(i_{\text{magn}}), \quad M = M_0 v(i_{\text{magn}}), \quad v(i_{\text{magn}}) = V_m^{-1} \left(\sum_{k=0}^n (2k+1) \alpha_{2k+1} i_{\text{magn}}^{2k} \right)^{-1}, \quad (4)$$

де L_{110} , L_{220} , M_0 – початкові значення індуктивностей та взаємодуктивності, які мали б місце при відсутності насичення [3]; V_m – масштабний коефіцієнт; $i_{magn}=i_1+i_2$ – струм намагнічування.

Отже, існує можливість рівняння (3) з урахуванням (4) звести до такого вигляду:

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{di_1}{dt} &= V_m \left(\sum_{k=0}^n (2k+1) \alpha_{2k+1} i_{magn}^{2k} \right) \left(-R_1 \frac{L_{220}}{M_0} i_1 + R_2 i_2 + \frac{L_{220}}{M_0} U_1 + U_2 \right); \\ \varepsilon \frac{di_2}{dt} &= V_m \left(\sum_{k=0}^n (2k+1) \alpha_{2k+1} i_{magn}^{2k} \right) \left(R_1 i_1 - R_2 \frac{L_{110}}{M_0} i_2 - \frac{L_{110}}{M_0} U_2 - U_1 \right),\end{aligned}\quad (5)$$

де $\varepsilon=(L_{110}L_{220}/M_0^2-1)M_0$ є достатньо малою величиною у порівнянні з іншими коефіцієнтами.

Наведені припущення дають змогу з (1) та (5) одержати систему ДР:

$$\begin{aligned}L_f \frac{dI_1}{dt} &= U_{FC} - U_1 - R_f I_1; \quad \frac{dI_n}{dt} = f_2(X_1, I_n, t) + U_2; \quad \frac{dX_1}{dt} = f_1(X_1, I_n, t); \\ \frac{dU_1}{dt} &= \frac{1}{C_{f1}}(I_1 - i_1); \quad \frac{dU_2}{dt} = \frac{1}{C_{f2}}(-i_2 - I_n); \\ \varepsilon \frac{di_1}{dt} &= V_m \left(\sum_{k=0}^n (2k+1) \alpha_{2k+1} i_{magn}^{2k} \right) \left(-R_1 \frac{L_{220}}{M_0} i_1 + R_2 i_2 + \frac{L_{220}}{M_0} U_1 + U_2 \right); \\ \varepsilon \frac{di_2}{dt} &= V_m \left(\sum_{k=0}^n (2k+1) \alpha_{2k+1} i_{magn}^{2k} \right) \left(R_1 i_1 - R_2 \frac{L_{110}}{M_0} i_2 - \frac{L_{110}}{M_0} U_2 - U_1 \right),\end{aligned}\quad (6)$$

яка є нелінійною. Обчислення додаткового модулюючого сигналу з величин, доступних для вимірювання, виявляється досить складним, оскільки величина $L_{110}L_{220}/M_0^2-1$ є різницею дуже близьких величин [1], тому є значно меншою від інших коефіцієнтів системи (6).

Рішення задачі. Для полегшення подальшого викладення промасштабуємо систему ДР (6) до безрозмірного вигляду [9], для чого проведемо заміну змінних таким чином:

$$x_1 = I_1 L_f / R_f, \quad x_2 = U_1 / U_1(t_0), \quad x_3 = U_2 / U_2(t_0), \quad x_4 = I_n R_n / U_2(t_0), \quad z_1 = i_1 R_1 / U_1(t_0), \quad z_2 = i_2 R_2 / U_2(t_0),$$

де $U_{1,2}(t_0)$ – максимально можливі початкові значення напруг для даної фізичної реалізації. У такому випадку (6) з урахуванням підстановок

$$I_1 = x_1 R_f / L_f; \quad U_1 = x_2 U_1(t_0); \quad U_2 = x_3 U_2(t_0); \quad I_n = x_4 U_2(t_0) / R_n, \quad i_1 = z_1 U_1(t_0) / R_1; \quad i_2 = z_2 U_2(t_0) / R_2 \quad (7)$$

матиме вигляд

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + Bu; \quad \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{26}z_1; \quad \frac{dx_3}{dt} = a_{34}x_4 + a_{37}z_2; \\ \frac{dx_4}{dt} &= f_2(X_1, x_4, t) + a_{43}x_3; \quad \frac{dX_1}{dt} = f_1(X_1, x_4, t); \\ \varepsilon \frac{dz_1}{dt} &= V_{m1} \left(\sum_{k=0}^n (2k+1) \alpha_{2k+1} i_{mg0}^{2k} \right) (a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{66}z_1 + a_{67}z_2); \\ \varepsilon \frac{dz_2}{dt} &= V_{m2} \left(\sum_{k=0}^n (2k+1) \alpha_{2k+1} i_{mg0}^{2k} \right) (a_{72}x_2 + a_{73}x_3 + a_{76}z_1 + a_{77}z_2),\end{aligned}\quad (8)$$

де u – модуляційна функція; коефіцієнти

$$\begin{aligned}a_{11} &= -R_f L_f^{-1}; \quad a_{12} = -U_1(t_0) R_f^{-1}; \quad a_{21} = -a_{11} (U_1(t_0) C_{f1})^{-1}; \quad a_{26} = -R_1^{-1} C_{f1}^{-1}; \quad a_{34} = -C_{f2}^{-1} R_n^{-1}; \quad a_{37} = C_{f2}^{-1} R_2^{-1}; \\ a_{62} &= L_{220} M_0^{-1} U_1(t_0); \quad a_{43} = a_{63} = U_2(t_0); \quad a_{66} = -a_{62}, \quad a_{67} = a_{63}; \quad V_{m1,2} = R_{1,2} U_{1,2}^{-1}(t_0); \quad B = R_f^{-1}; \\ a_{72} &= -U_1(t_0); \quad a_{73} = -L_{110} M_0^{-1} U_2(t_0); \quad a_{76} = -a_{72}; \quad a_{77} = a_{73}; \quad i_{mg0} = z_1 a_{76} R_1^{-1} + z_2 a_{63} R_2^{-1}.\end{aligned}$$

Отже, ДР вигляду (8) є нелінійною афінною сингулярно-збуреною динамічною системою високого порядку, для якої треба побудувати закон керування u . Пошук стабілізуючої модуляційної функції для системи повного порядку є достатньо складною задачею [4]. В узагальненому вигляді рівнянням (8), які описують схему згідно з рис. 1, відповідає система $m+n$ ДР, яка може бути представлена у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x, z, u, t); \varepsilon \frac{dz}{dt} = F(x, z, t), \quad (9)$$

де x – m -вимірний, z – n -вимірний вектор-стовпці змінних стану; f – m -вимірний, F – n -вимірний вектор-функції, неперервні за всіма своїми аргументами; ε – малий параметр, $\varepsilon > 0$; u – m -вимірний вектор керування.

Розглянемо також вироджену систему рівнянь:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x}, \bar{z}, u, t); F(\bar{x}, \bar{z}, t) = 0. \quad (10)$$

Нехай $z = \varphi(x, t)$ є розв'язком системи рівнянь $F(x, z, t) = 0$. У цьому випадку дослідження виродженої системи (10) на розв'язках $z = \varphi(x, t)$ призводить до дослідження системи m ДР:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x}, \varphi(\bar{x}, t), u, t). \quad (11)$$

Можна довести, що для сингулярно-збуреної системи (9) існує деяке співвідношення $z = W(x, t, \varepsilon)$, яке дає змогу замінити систему рівнянь (9) системою більш низького порядку, аналогічно тому, як це було зроблено в [7, 12] для випадку $u = 0$.

Також вважаємо, що будь-якому $t \in R$ відповідає множина

$$S_t : z = W(x, t, \varepsilon), \quad (12)$$

яка є інтегральним многовидом системи (9), якщо для будь-якого розв'язку $(x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ цієї системи із співвідношення $z(t, \varepsilon) = W(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$, яке справедливе у деякий момент часу $t = t_0$, витікає його справедливості для $\forall t \in R$ та будь-якого $\varepsilon > 0$, зважаючи, що $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, де ε^* довільне наперед фіксоване [7].

Теорема (існування). Припустимо, що для системи (9) виконуються такі умови:

1. $\forall x \in D_x$ та $t \in R$, де $D_x \in R^m$, система рівнянь

$$F(x, z, t) = 0 \quad (13)$$

має ізольований розв'язок $z = \varphi(x, t)$, причому функції $\varphi(x, t)$, $\partial\varphi/\partial t$, $\partial\varphi/\partial x$, $\partial^2\varphi/\partial x^2$, $\partial^2\varphi/\partial x\partial t$ рівномірно неперервні та обмежені.

2. В областях $G = \{x \in D_x, |z - \varphi(x, t)| \leq \rho, t \in R\}$ функції $f(x, z, t)$, $\partial f/\partial t$, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial u$, $F(x, z, t)$, $\partial^2 F/\partial x^2$, $\partial^2 F/\partial z^2$ рівномірно неперервні та обмежені.

3. Характеристичне рівняння $|U(x, t) - \lambda E| = |F_z(x, \varphi(x, t), t) - \lambda E| = 0$ має характеристичні корені $\lambda_j(x, t)$, які задовольняють умові $Re\{\lambda_j(x, t)\} \leq -2\gamma < 0, \forall x \in D_x$ та $t \in R$, тоді $\exists \varepsilon_0 > 0$ таке, що $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$ система (9) має єдиний m -параметричний інтегральний многовид

$$S_t : \{z = \varphi(x, t) + \psi(x, t, \varepsilon)\}, \quad (14)$$

де $\psi(x, t, \varepsilon)$ визначені $\forall x \in D, t \in R, \forall \varepsilon < \varepsilon_0$, рівномірно неперервні по всіх своїх аргументах та задовольняють умові $|\psi(x, t, \varepsilon)| \leq \rho(\varepsilon)$, а для будь-якої пари x', x'' має місце нерівність $|\psi(x', t, \varepsilon) - \psi(x'', t, \varepsilon)| \leq l(\varepsilon) |x' - x''|$, де $\rho(\varepsilon) \rightarrow 0, l(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доведення. У системі (9) виконаємо заміну змінних таким чином:

$$z = \varphi(x, t) + y. \quad (15)$$

Завдяки цій заміні (9) матиме вигляд

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \varphi + y, u, t), \varepsilon \frac{dy}{dt} = F(x, \varphi + y, t) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi \Big|_{i=1 \dots m} (x, y, u, t) - \varepsilon \frac{d\varphi}{dt}, \quad (16)$$

де $\Phi(x, y, u, t) = f(x, \varphi + y, u, t)$.

Додамо та віднімемо в другому рівнянні (16) величину $y \cdot \partial/\partial z_i F(x, \varphi, t) \Big|_{i=1 \dots n}$, що з використанням розкладання у ряд Тейлора дасть можливість записати

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = F(x, \varphi + y, t) - \frac{\partial}{\partial z_i} F(x, \varphi, t) \Big|_{i=1 \dots n} y + \frac{\partial}{\partial z_i} F(x, \varphi, t) \Big|_{i=1 \dots n} y - \varepsilon \left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \Big|_{k=1 \dots m} \Phi(x, y, u, t) \right).$$

Введемо позначення

$$A(x, t) = \frac{\partial}{\partial z_i} F(x, \varphi, t) \Big|_{i=1 \dots n};$$

$$Q(x, y, u, t, \varepsilon) = F(x, \varphi + y, t) - \frac{\partial}{\partial z_i} F(x, \varphi, t) \Big|_{i=1 \dots n} y - \varepsilon \left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \Big|_{k=1 \dots m} \Phi(x, y, u, t) \right), \quad (17)$$

з урахуванням яких можна записати:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x, y, u, t), \quad \varepsilon \frac{dy}{dt} = A(x, t)y + Q(x, y, u, t, \varepsilon). \quad (18)$$

Вектор-функції $\Phi(x, y, u, t)$ та $Q(x, y, u, t, \varepsilon)$ задовольняють нерівностям

$$\begin{aligned} |\Phi(x, y, u, t)| &\leq L; |Q(x, y, u, t, \varepsilon)| \leq M|y|^2 + \varepsilon N; \\ |\Phi(x', y', u', t) - \Phi(x'', y'', u'', t)| &\leq A(|x' - x''| + |y' - y''| + |u' - u''|); \\ |Q(x', y', u', t, \varepsilon) - Q(x'', y'', u'', t, \varepsilon)| &\leq (B|\bar{y}| + \varepsilon C)(|x' - x''| + |y' - y''| + |u' - u''|), \end{aligned} \quad (19)$$

де L, M, N, A, B, C – додатні сталі, а $|\bar{y}| = \max\{|y'|, |y''|\}$.

Дійсно, умова першої нерівності з (19) виконується на підставі того, що функція $f(x, z, u, t)$ рівномірно неперервна та обмежена в області G . Справедливість другої нерівності впливає з того, що розклавши $Q(x, y, u, t, \varepsilon)$ по степенях y в ряд Тейлора, відкинувши члени зі степенями вище другої та врахувавши, що $F(x, \varphi, t) = 0$, оскільки $\varphi(x, t)$ є розв'язком, маємо:

$$Q(x, y, u, t, \varepsilon) = F(x, \varphi, t) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} F(x, \varphi, t) \Big|_{i=1 \dots n} y^2 + \varepsilon \left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \Big|_{k=1 \dots m} \Phi(x, y, u, t) \right) \leq M|y^2| + \varepsilon N.$$

Також можемо впевнитись у виконанні третьої нерівності з (19), виходячи з підстановки $\Phi(x, y, u, t) = f(x, \varphi + y, u, t)$:

$$\begin{aligned} |\Phi(x', y', u', t) - \Phi(x'', y'', u'', t)| &= \frac{\partial f}{\partial x} |x' - x''| + \frac{\partial f}{\partial (\varphi + y)} |(\varphi + y)' - (\varphi + y)''| + \frac{\partial f}{\partial u} |u' - u''| \leq \\ &\leq A_1 |x' - x''| + A_2 |y' - y''| + A_3 |u' - u''| \leq A(|x' - x''| + |y' - y''| + |u' - u''|), \end{aligned}$$

де $A = \max_i \{A_1, A_2, A_3\}$.

Перевіримо виконання четвертої умови з системи нерівностей (19). Для цього розглянемо з урахуванням зроблених вище підстановок для пар \bullet', \bullet'' вираз

$$\begin{aligned} |Q(x', y', u', t, \varepsilon) - Q(x'', y'', u'', t, \varepsilon)| &\leq \frac{\partial F}{\partial x} |x' - x''| + \frac{\partial F}{\partial z} |(\varphi + y)' - (\varphi + y)''| - \\ &- \max\{|y'|, |y''|\} \left[\frac{\partial F(x', \varphi, t)}{\partial \varphi} - \frac{\partial F(x'', \varphi, t)}{\partial \varphi} \right] + \varepsilon C_1 C_2 (|x' - x''| + |y' - y''| + |u' - u''|), \end{aligned}$$

верхню оцінку для якого можна одержати, підсиливши цю нерівність до вигляду

$$|Q(x', y', u', t, \varepsilon) - Q(x'', y'', u'', t, \varepsilon)| \leq (B|\bar{y}| + \varepsilon C)(|x' - x''| + |y' - y''| + |u' - u''|),$$

де $B = \{\max((A_{1m} + B_1), A_{2m}, 0, A_{1m} > A_1, A_{2m} > A_2)$.

Будемо вважати, що в області $S = \{\forall x \in D_x, t \in R, \varepsilon \in E\varepsilon_0\}$ визначено сімейство \mathbf{Y} n -вимірних функцій $Y(x, t, \varepsilon)$, які задовольняють нерівностям $|Y(x, t, \varepsilon)| \leq \rho_0 < \rho$, $|Y(x', t, \varepsilon) - Y(x'', t, \varepsilon)| \leq \ell |x' - x''|$, де ρ та ℓ – сталі додатні числа.

Розглянемо $\forall Y \in \mathbf{Y}$ наступне рівняння з початковими умовами $x(t_0) = x_0$:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x, Y(x, t, \varepsilon), u, t). \quad (20)$$

Позначимо розв'язок $x(t, \varepsilon)$, який задовольняє початковим умовам в (20), через

$$x(t, \varepsilon) = X(s, t_0, x_0 | Y), \quad (21)$$

де $x_0 | Y$ – початкові значення для функцій Y , $s = t - t_0$.

Введемо ще одну групу вектор-функцій \tilde{Y} , які також належать тому самому сімейству \mathbf{Y} , таку, яка при підстановці \tilde{Y} в (20) має розв'язком величину $\bar{x}(t, \varepsilon) = X(s, t_0, x_0 | \bar{Y})$. У такому випадку різниця між цими розв'язками має вигляд

$$\bar{x}(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon) = \bar{x}_0 - x_0 + \int_{t_0}^t \Phi[\bar{x}(\tau, \varepsilon), \bar{Y}(\bar{x}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon), \bar{u}, \varepsilon] - \Phi[x(\tau, \varepsilon), Y(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon), u, \varepsilon] d\tau. \quad (22)$$

Беручи до уваги нерівності (19), запишемо

$$\begin{aligned} |\bar{x}(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon)| &= |X(s, t_0, \bar{x}_0 | \bar{Y}) - X(s, t_0, x_0 | Y)| \leq |\bar{x}_0 - x_0| + \int_{t_0}^t \Phi[\bar{x}(\tau, \varepsilon), \bar{Y}(\bar{x}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon), \bar{u}, \tau] - \Phi[x(\tau, \varepsilon), Y(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon), u, \tau] d\tau \leq \\ &\leq |\bar{x}_0 - x_0| + A \int_{t_0}^t [(1 + \ell) |\bar{x} - x| + \sup_t |\bar{u} - u| + \sup_t |\bar{Y} - Y|] d\tau. \end{aligned}$$

Також введемо метрику

$$\rho(Y, \bar{Y}) = \sup_y \| \bar{Y}(x, t, \varepsilon) - Y(x, t, \varepsilon) \| = \| \bar{Y} - Y \|, \quad \| \bar{u} - u \| = \sup_t |\bar{u}(t) - u(t)|.$$

У такому випадку матимемо:

$$|\bar{x} - x| \leq |\bar{x}_0 - x_0| + A \int_{t_0}^t [(1 + \ell) |\bar{x} - x| + \| \bar{Y} - Y \| + \| \bar{u} - u \|] dt. \quad (23)$$

Окрім цього, розглянемо інтегральне рівняння

$$\eta(t) = |\bar{x}_0 - x_0| + A \int_{t_0}^t [(1 + \ell) \eta(t) + \| \bar{Y} - Y \| + \| \bar{u} - u \|] dt, \quad (24)$$

якому відповідає диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt} \eta(t) = A(1 + \ell) \eta(t) + A(\| \bar{Y} - Y \| + \| \bar{u} - u \|), \quad (25)$$

де початкові умови визначено як

$$\eta(t_0) = |\bar{x}_0 - x_0|. \quad (26)$$

Розв'язок рівняння (25) можна записати у вигляді

$$\eta(t) = \exp \left[A \int_{t_0}^t (1 + \ell) dt \right] \cdot \left[A \int_{t_0}^t (\| \bar{Y} - Y \| + \| \bar{u} - u \|) \exp \left(- \int_{t_0}^t A(1 + \ell) dt \right) d\tau + C \right].$$

Тоді виконавши інтегрування та провівши перетворення з урахуванням, що

$$\eta(t_0) = \exp(A(1 + \ell) \cdot 0) \left[C - \frac{(\| \bar{Y} - Y \| + \| \bar{u} - u \|)}{(1 + \ell)} (\exp(A(1 + \ell) \cdot 0) - 1) \right] = 1 \cdot \left[C - \frac{(\| \bar{Y} - Y \| + \| \bar{u} - u \|)}{(1 + \ell)} (1 - 1) \right] = C,$$

матимемо

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \exp(A(1 + \ell)s) \left[\eta(t_0) + \frac{(\| \bar{Y} - Y \| + \| \bar{u} - u \|)}{(1 + \ell)} (1 - \exp(-A(1 + \ell)s)) \right] = \eta(t_0) \exp(A(1 + \ell)s) + \\ &+ \frac{(\| \bar{Y} - Y \| + \| \bar{u} - u \|)}{(1 + \ell)} (\exp(A(1 + \ell) \cdot s) - 1). \end{aligned} \quad (27)$$

Після чого з (23) та (27) можна визначити обмеження $|\bar{x}(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon)| \leq \eta(t)$.

Розглянемо систему з n ДР:

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = A(x, t)v. \quad (28)$$

Позначимо через $V(t, s, \varepsilon)$ фундаментальну матрицю для системи ДР (28) так, що для неї мають місце рівності $V(s, s, \varepsilon) = [\mathbf{1}]$, $\text{rank}[\mathbf{1}] = n$.

Якщо матриця $A(x, t)$ обмежена $\forall t \in R$ та задовольняє умові Ліпшиця, а характеристичні корені $\lambda_j(x, t)$ задовольняють умові $\text{Re}\{\lambda_j(x, t)\} \leq -2\gamma < 0$, $\forall x \in D_x$ та $t \in R$, то для матриці $V(t, s, \varepsilon)$ справедлива оцінка [3]

$$|V(t, s, \varepsilon)| \leq K \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}(t - s)\right), \quad (29)$$

де $-\infty < s \leq t < \infty$, K та γ – додатні константи.

Представимо друге рівняння системи (18) в інтегральній формі:

$$y(t) = V(t, t_0, \varepsilon)y(t_0) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t V(t, s, \varepsilon) Q[x(s), y(s), u(s), s, \varepsilon] ds. \quad (30)$$

Розглянемо перетворення функції $Y(x, t, \varepsilon)$ з сімейства \mathbf{Y} в іншу функцію $Y^*(x, t, \varepsilon)$ таким чином, що

$$V(t, t_0, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^0 V(t, s+t, \varepsilon) Q[X(s, t, x|Y), Y(X(s, t, x|Y)), u(s), s+t, \varepsilon] ds.$$

По аналогії з нерівностями (19) за допомогою формальної підстановки $X \rightarrow x$, $Y \rightarrow y$ отримаємо таку оцінку:

$$\begin{aligned} & \left| Q \left[X(s, t, x|Y), Y(X(s, t, x|Y)), u(s), s, \varepsilon \right] \right| \leq M|Y|^2 + \varepsilon N \leq M\rho^2 + \varepsilon N; \\ & \left| Q \left[X(s, t, x|\bar{Y}), \bar{Y}(X(s, t, x|\bar{Y})), \bar{u}(s), s+t, \varepsilon \right] - Q \left[X(s, t, x|Y), Y(X(s, t, x|Y)), u(s), s+t, \varepsilon \right] \right| \leq \\ & \leq (B\rho + \varepsilon C) \left(\left| (1+\ell)(X(s, t, x|\bar{Y}) - X(s, t, x|Y)) \right| + \|\bar{u} - u\| + \|\bar{Y} - Y\| \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Другу нерівність можна представити у вигляді, зручному для подальшого використання:

$$\begin{aligned} & \left| Q \left[X(s, t, x|\bar{Y}), \bar{Y}(X(s, t, x|\bar{Y})), \bar{u}(s), s+t, \varepsilon \right] - Q \left[X(s, t, x|Y), Y(X(s, t, x|Y)), u(s), s+t, \varepsilon \right] \right| \leq \\ & \leq (B\rho + \varepsilon C)(1+\ell) \left(\left| X(s, t, x|\bar{Y}) - X(s, t, x|Y) \right| + \frac{\|\bar{u} - u\| + \|\bar{Y} - Y\|}{(1+\ell)} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

З урахуванням (26), (28) та (32) для функції $Y^*(x, t, \varepsilon)$ можна виписати оцінки:

$$\begin{aligned} & \left| Y^*(x, t, \varepsilon) \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^0 V(t, s+t, \varepsilon) Q \left[X(s, t, x|Y), Y(X(s, t, x|Y)), u(s), s+t, \varepsilon \right] ds \leq \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} (M\rho_0^2 + \varepsilon N) \int_{-\infty}^0 K \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}(t-s)\right) ds = \frac{1}{\varepsilon} (M\rho_0^2 + \varepsilon N) K \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}\right) \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}s\right) ds \leq \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} (M\rho_0^2 + \varepsilon N) K \exp\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right) \frac{\varepsilon}{\gamma} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{K}{\gamma} (M\rho_0^2 + \varepsilon N) (\exp 0 - 0) = \frac{K}{\gamma} (M\rho_0^2 + \varepsilon N) \end{aligned} \quad (33)$$

та

$$\begin{aligned} & \left| Y^*(\bar{x}_0, t, \varepsilon) - Y^*(x_0, t, \varepsilon) \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^0 V(t, s+t, \varepsilon) \bullet \\ & \bullet \left| Q \left[X(s, t, \bar{x}_0|Y), \bar{Y}(X(s, t, \bar{x}_0|Y)), \bar{u}(s), s+t, \varepsilon \right] - Q \left[X(s, t, x_0|Y), Y(X(s, t, x_0|Y)), u(s), s+t, \varepsilon \right] \right| ds \leq \\ & \leq \frac{K}{\varepsilon} (B\rho_0 + \varepsilon C)(1+\ell) \left[|\bar{x}_0 - x_0| + \frac{\|\bar{u} - u\| + \|\bar{Y} - Y\|}{(1+\ell)} \right] \frac{\varepsilon}{\gamma + \varepsilon A(1+\ell)} = \frac{K}{\gamma} (B\rho_0 + \varepsilon C) \left[(1+\ell)|\bar{x}_0 - x_0| + \|\bar{u} - u\| + \|\bar{Y} - Y\| \right]. \end{aligned}$$

Знехтувавши величиною $\varepsilon A(1+\ell)$ у знаменнику, в результаті одержуємо оцінку

$$\left| Y^*(\bar{x}_0, t, \varepsilon) - Y^*(x_0, t, \varepsilon) \right| \leq \frac{K}{\gamma} (B\rho_0 + \varepsilon C) \left[(1+\ell)|\bar{x}_0 - x_0| + \|\bar{u} - u\| + \|\bar{Y} - Y\| \right]. \quad (34)$$

Після цього задамося такими значеннями $\rho_0(\varepsilon)$ та $\ell(\varepsilon)$, що мають місце границі

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_0(\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ell(\varepsilon) = 0$$

та $\varepsilon_0 > 0$ таким чином, щоб при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ одночасно виконувались нерівності

$$\frac{K}{\gamma} (M\rho_0^2 + \varepsilon N) \leq \rho_0, \quad \frac{K}{\gamma} (B\rho_0 + \varepsilon C)(1+\ell) \leq \ell(\varepsilon) \leq \ell, \quad \frac{K}{\gamma} (B\rho_0 + \varepsilon C) = k \leq 1. \quad (35)$$

З нерівностей (34), (35) випливає, що

$$\left| Y^*(x, t, \varepsilon) \right| \leq \rho(\varepsilon_0) < \rho, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} |Y^*(\bar{x}_0, t, \varepsilon) - Y^*(x_0, t, \varepsilon)| &\leq \frac{K}{\gamma} (B\rho_0 + \varepsilon C)(1 + \ell) |\bar{x}_0 - x_0| + \frac{K}{\gamma} (B\rho_0 + \varepsilon C) [\|\bar{u} - u\| + \|\bar{Y} - Y\|] \leq \\ &\leq \frac{K}{\gamma} (B\rho_0 + \varepsilon C)(1 + \ell) |\bar{x}_0 - x_0| + k [\|\bar{u} - u\| + \|\bar{Y} - Y\|] \leq \ell(\varepsilon_0) |\bar{x}_0 - x_0| + k [\|\bar{u} - u\| + \|\bar{Y} - Y\|]. \end{aligned} \quad (37)$$

Якщо припустити, що $\bar{Y} = Y$, $\bar{u} = u$ (тобто функції співпадають), то з (36) та (37) випливає (умова Ліпшиця)

$$|Y^*(\bar{x}_0, t, \varepsilon) - Y^*(x_0, t, \varepsilon)| \leq \ell(\varepsilon_0) |\bar{x}_0 - x_0|, \quad (38)$$

а нерівність (38) дає можливість зробити висновок, що Y^* так само належить сімейству \mathbf{Y} .

При $\bar{x}_0 = x_0$ матимемо

$$\|\bar{Y}^* - Y\| \leq \ell(\varepsilon_0) |\bar{x}_0 - x_0| + k [\|\bar{u} - u\| + \|\bar{Y} - Y\|] \text{ або } \|\bar{Y}^* - Y\| \leq k [\|\bar{u} - u\| + \|\bar{Y} - Y\|], k < 1. \quad (39)$$

Нерівності (36) та (38) показують, що Y^* також належить сімейству \mathbf{Y} , а (35) гарантує наявність єдиного розв'язку рівняння

$$V(x, t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^0 V(t, s+t, \varepsilon) Q[X(s, t, x)Y, Y(X(s, t, x|Y), s+t, \varepsilon), u(s), s+t, \varepsilon] ds. \quad (40)$$

Якщо позначити цей єдиний розв'язок рівняння (40) через $\psi(x, t, \varepsilon)$, то можна впевнитись, що $y = \psi(x, t, \varepsilon)$ визначає інтегральний многовид для системи (9). Задля цього, виходячи з рівняння (40), запишемо таку тотожність:

$$\psi(x, t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^0 V(t, s+t, \varepsilon) Q[X(s, t, x)\Psi, \Psi(X(s, t, x|\Psi), s+t, \varepsilon), u(s), s+t, \varepsilon] ds. \quad (41)$$

Проведемо в тотожності (41) заміну $x \rightarrow X(t-t_0, t_0, x|\Psi)$, а $u(s) \rightarrow u(s+t-t_0)$. Ця заміна є можливою, оскільки тотожність (41) справедлива для будь-якого $s > 0$.

Виходячи з існування єдиного розв'язку системи рівнянь, маємо

$$X[s, t_0 + t - t_0, X(t-t_0, t_0, x|\Psi)] = X[s, t, X(t-t_0, t_0, x|\Psi)] \equiv X[s+t-t_0, t_0, x|\Psi].$$

Позначивши

$$x_t = X[s+t-t_0, t_0, x|\Psi], y_t = \Psi[X(t-t_0, t_0, x|\Psi), t, \varepsilon], \quad (42)$$

перепишемо (41) у вигляді

$$\psi(X(t-t_0, t_0, x|\Psi), t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t V(t, s+t, \varepsilon) Q[X(s+t-t_0, t_0, x|\Psi), \Psi(X(s+t-t_0, t_0, x|\Psi)), u(s+t-t_0), s+t, \varepsilon] ds.$$

Введемо в (42) заміну $v = s+t$, яка дасть можливість записати:

$$\psi(X(t-t_0, t_0, x|\Psi), t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t V(t, v, \varepsilon) Q[X(v-t_0, t_0, x|\Psi), \Psi(X(v-t_0, t_0, x|\Psi)), u(v-t_0), v, \varepsilon] dv,$$

або з урахуванням (38):

$$y_t = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t V(t, v, \varepsilon) Q[x_v, y_v, u_v, v, \varepsilon] dv. \quad (43)$$

Продиференціювавши (43) за параметром t , матимемо

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} V(t, t, \varepsilon) Q[x_t, y_t, u_t, t, \varepsilon] + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t V'(t, v, \varepsilon) Q[x_v, y_v, u_v, v, \varepsilon] dv.$$

Оскільки $V(t, v, \varepsilon)$ є фундаментальною матрицею системи (28), одержимо

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} Q[x_t, y_t, u_t, t, \varepsilon] + \frac{1}{\varepsilon} A(x, t) \int_{-\infty}^t V(t, v, \varepsilon) Q[x_v, y_v, u_v, v, \varepsilon] dv = \frac{1}{\varepsilon} Q[x_t, y_t, u_t, t, \varepsilon] + \frac{1}{\varepsilon} A(x, t) y_t.$$

Домноживши на малий параметр ε ліву і праву частини, отримаємо

$$\varepsilon \frac{dy_t}{dt} = A(x, t) y_t + Q[x_t, y_t, u_t, t, \varepsilon]. \quad (44)$$

Оскільки $X[t-t_0, t_0, x|\Psi]$ є розв'язком рівняння (20), а $\frac{dx_t}{dt} = \Phi(x_t, y_t, u_t, t)$, можна записати змінні (42), які є розв'язками системи (18), у вигляді $x_t = X[t-t_0, t_0, x|\Psi]$, $y_t = \Psi[x_t, t, \varepsilon]$. Тоді у

початковій точці, поклавши $t=t_0$, маємо

$$x_i = X[t-t_0, t_0, x|\Psi] = X[0, t_0, x|\Psi] = x, y_i = \Psi[x_{t_0}, t_0, \varepsilon] = \Psi[x_0, t_0, \varepsilon].$$

Повертаємось до підстановки (17). Систему ДР (18) було отримано із системи (9) заміною $z = \varphi(x, t) + y$, внаслідок чого можна зробити висновок, що система ДР (9) має інтегральний многовид $z = \varphi(x, t) + \psi(x, t, \varepsilon)$ (14).

Отже, система ДР (8) також має інтегральний многовид, оскільки її нескладно привести до спеціального вигляду у формі (18) та упевнитись, що для неї виконуються нерівності (19), умова Лівшиця та оцінка (29). Універсальних методів для пошуку многовиду в аналітичному вигляді, на жаль, не існує, проте для системи (8) можна одержати його наближене значення з потрібним ступенем точності у вигляді ряду за степенями ε [5, 12]. Розв'язавши рівняння (13) (умова 1 теореми існування), записане на основі системи ДР (8), отримуємо нульове наближення для нашого інтегрального многовиду $|z_1, z_2|^T = |x_2, -x_3|^T$. Це дає можливість, знехтувавши степенями 2 і вище ряду за степенями ε , обмежитись пошуком першого наближення [12] і записати інтегральний многовид у такій формі:

$$\begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 \\ -x_3 \end{vmatrix} + R_1^{-1} R_2^{-1} \left(\sum_{k=0}^n (2k+1) \alpha_{2k+1} (a_{76} R_1^{-1} x_2 - a_{63} R_2^{-1} x_3)^{2k} \right)^{-1} \begin{vmatrix} c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3 + c_{14} x_4 \\ c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + c_{23} x_3 + c_{24} x_4 \end{vmatrix}, \quad (45)$$

де

$$c_{11} = -a_{21} R_2 L_{110} M_0^{-1}, c_{12} = -a_{26} R_2 L_{110} M_0^{-1}, c_{13} = a_{37} R_1 U_2(t_0) U_1^{-1}(t_0), c_{14} = a_{37} R_1 U_2(t_0) U_1^{-1}(t_0), \\ c_{21} = a_{21} R_2 U_2^{-1}(t_0) U_1(t_0), c_{22} = a_{26} R_2 U_2^{-1}(t_0) U_1(t_0), c_{23} = -a_{37} R_2 L_{220} M_0^{-1}, c_{24} = a_{34} R_2 L_{220} M_0^{-1}.$$

Після чого, підставивши (45) у (8), маємо формальне право відкинути два рівняння з малим параметром при похідних, в результаті чого отримуємо нелінійну афінну систему ДР пониженого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + Bu \\ \frac{dx_2}{dt} = b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + b_{23} x_3 + b_{24} x_4 + \zeta_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \frac{dx_3}{dt} = b_{31} x_1 + b_{32} x_2 + b_{33} x_3 + b_{34} x_4 + \zeta_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \frac{dx_4}{dt} = f_2(x_1, x_4, t) + a_{43} x_3; \end{cases} \quad (46)$$

де

$$b_{21} = a_{21}, b_{22} = a_{26}, b_{23} = b_{24} = 0, b_{31} = b_{32} = 0, b_{33} = -a_{37}, b_{34} = a_{34},$$

$$\zeta_o(x_1, x_2, x_3, x_4) = R_1^{-1} R_2^{-1} \left(\sum_{k=0}^n (2k+1) \alpha_{2k+1} (a_{76} R_1^{-1} x_2 - a_{63} R_2^{-1} x_3)^{2k} \right)^{-1} (c_{o1} x_1 + c_{o2} x_2 + c_{o3} x_3 + c_{o4} x_4) \Big|_{o=1,2}.$$

Еквівалентність систем (8) та (46) означає, що немає необхідності проводити синтез керування u для повновимірної системи (8). Із стійкості або асимптотичної стійкості деякого рішення системи (46) випливає стійкість або асимптотична стійкість системи (8). Якщо задатись деякими якісними характеристиками при побудові стратегії керування в (46), то отримане керування для (46) забезпечить ті ж самі якісні властивості при поверненні до розширеної системи (8).

Розглянемо загальноприйнятий випадок зі звичним RL -навантаженням. Для стабілізації вихідної напруги використаємо метод функцій Ляпунова [4], який можна застосувати до першого наближення системи ДР (46) лише у випадку, коли для (46) виконуватимуться умови теореми Пуанкаре-Ляпунова. Для приведення (46) до необхідного вигляду використаємо процедуру перетворення нелінійних функцій ζ , повністю аналогічну наведеній у [6]. Після чого синтез закону керування u можна проводити за рівняннями першого наближення, вибравши модулюючу функцію u у вигляді лінійної комбінації координат системи (46) $u = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + C_4 x_4$. Отже, замість нелінійної системи (46) розглянемо систему ДР першого наближення:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^4 d_{ij} x_j \Big|_{i=1..4}, \quad (47)$$

де $a_{13} = a_{14} = 0$; $d_{1j} = a_{1j} + C_j \Big|_{j=1..4}$; $d_0 = 2 - R_1 R_2 \alpha_1$; $d_{ij} = b_{ij} + d_0 c_{ij} \Big|_{i=2,3; j=i-1}$; $d_{43} = L_n^{-1}$; $d_{44} = -d_{43} R_n$.

Подальша процедура отримання коефіцієнтів модулюючої функції за допомогою встановлення зв'язків між параметрами системи та коефіцієнтами функції Ляпунова M_1, \dots, M_4 , записаної на основі системи (47), повністю збігається з викладеннями в [6], у результаті проведення яких матимемо

$$M_{23} = \frac{d_{23} d_{34} / d_{24} + M_4 d_{43} d_{32} / d_{34}}{d_{22} + d_{33} - \tau - d_{24} d_{32} / d_{34}}; \quad M_2 = -M_{23} \frac{d_{34}}{d_{24}}; \quad M_3 = -\frac{M_4 d_{43} + M_{23} d_{24}}{d_{34}};$$

$$C_2 = -a_{12} - \frac{M_2 d_{21} + M_{23} d_{31}}{M_1}; \quad C_3 = -\frac{M_3 d_{31} + M_{23} d_{21}}{M_1},$$

зважаючи на те, що довільний вибір власне величин $M_1, M_4 > 0$ не впливає на стійкість системи, проте визначатиме характеристики перехідного процесу в (46) та (8).

На рис. 2 показано результати цифрового моделювання для електричних параметрів системи живлення, наведених у роботі [6]. Рис. 2 а дає змогу оцінити спектр вихідної напруги в режимі ХХ, а 2 б – точність стабілізації вихідної напруги U_2 при зникненні навантаження по амплітуді та тривалість перехідного процесу в замкненій системі.

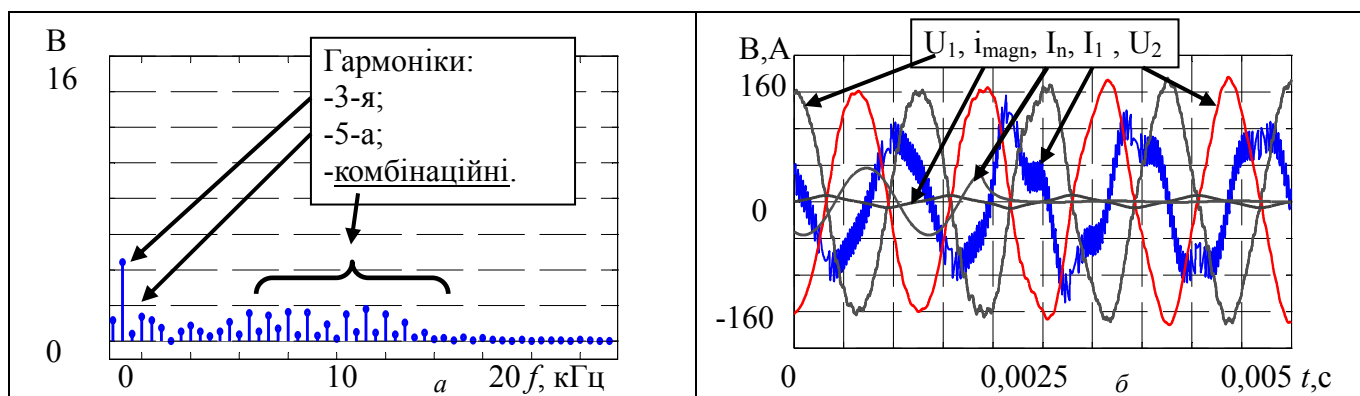


Рис. 2

Відношення миттєвого значення відхилення вихідної напруги від еталонної не перевищує 5 %. Форма вхідного струму фільтра I_1 показує значний вплив нелінійності намагнічування при малих навантаженнях, що треба неодмінно брати до уваги при виборі ключів силової частини ПЧ. При переході до мінімального навантаження погіршується спектральний склад вихідної напруги за рахунок збільшення амплітуд непарних гармонік, виникнення яких обумовлено характером нелінійності типу „насичення”.

Висновки. Розроблено математичну модель джерела у вигляді афінної нелінійної сингулярно-збуреної системи ДР. Доведено існування інтегрального многовиду нелінійної сингулярно-збуреної системи ДР у загальному вигляді, який дає змогу коректно провести пониження її порядку. Запропоновано модулюючу функцію у вигляді лінійної комбінації змінних системи пониженого порядку та встановлено однозначну відповідність її коефіцієнтів коефіцієнтам функції Ляпунова, отриманої з умови рівномірної асимптотичної стійкості системи ДР пониженого порядку за першим наближенням. Показано можливість реалізації достатньо точного (до 4...5 %) формування вихідної напруги спеціального джерела живлення з нелінійним вихідним трансформатором шляхом побудови модулюючої функції для системи пониженого порядку. За допомогою цифрового моделювання продемонстровано можливість забезпечення практичної відсутності впливу стрибків навантаження на форму вихідної напруги з урахуванням обмежень, характерних для реальних навантажень.

1. Вольдек А.И. Электрические машины. Изд. 3-е, перераб. и доп. – Л.: Энергия, 1978. – 832 с.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем / Пер. с англ. – М.–Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 456 с.

4. Крищенко А.П., Кавинов А.В. Стабилизация аффинных систем // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1482–1487.
5. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1981. – 400 с.
6. Мисак Т.В. Стабілізація вихідної напруги однофазного джерела живлення з нелінійним вихідним трансформатором // Пр. Ін-ту електродинаміки НАН України: Зб. наук. пр. – К.: ІЕД НАНУ, 2017. – Вип. 46. – С. 60–70.
7. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука. – 1973. – 512 с.
8. Михальський В.М. Засоби підвищення якості електроенергії на вході та виході перетворювачів частоти та напруги з широтно-імпульсною модуляцією. – К.: Інститут електродинаміки НАН України, 2013. – 340 с.
9. Найфе А. Введение в методы возмущений /Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 534 с.
10. Паньків В.І., Танкевич Є.М., Лутчин М.М. Апроксимація характеристик намагнічування трансформаторів струму // Пр. Ін-ту електродинаміки НАН України: Зб. наук. пр. – К.: ІЕД НАНУ, 2014. – Вип. 37. – С. 82–90.
11. П'яних Б.С. Вентильні перетворювачі параметрів електричної енергії // Електроніка та системи управління. – 2012. – №1(31). – С. 28–30.
12. Стрыгин В.А., Соболев В.В. Разделение движений методом интегральных многообразий. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
13. Yazdani A., Iravani R. Voltage-Sourced Converters In Power Systems. Modeling, Control and Applications. Published by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2010. – 463 p.
14. Zhang L.J., Sun C.Q., Sun J.B. A Nonlinear Model for Marine High-voltage Transformer // Applied Mechanics and Materials, Vols. 602–605. – 2014. – P. 2572–2576.

УДК 621.314.26

Т.В. Мысак, канд. техн. наук

Институт электродинамики НАН Украины,
пр. Победы, 56, Киев-57, 03057, Украина

Построение контура модуляции выходного напряжения источника питания с нелинейным выходным трансформатором с помощью математической модели пониженного порядка

Объектом исследования является источник синусоидального напряжения, имеющий в своем составе преобразователь частоты с выходным LC-фильтром и нелинейный однофазный выходной трансформатор. Построена математическая модель этого источника в виде нелинейной сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений. Получены условия существования интегрального многообразия в системе с неизвестным наперед управлением в общем виде. Показана возможность понижения порядка математической модели источника питания с помощью интегрального многообразия в форме степенного ряда. Проведен синтез стратегии управления путем установления соответствия между модулирующей функцией и коэффициентами функции Ляпунова. Приведены результаты моделирования. Библ. 14, рис. 2.

Ключевые слова: преобразователь частоты, выходной LC-фильтр, нелинейный трансформатор, сингулярно-возмущенная система, интегральное многообразие, теорема существования, понижение порядка.

T.V. Mysak

Institute of Electrodynamics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
Peremohy, 56, Kyiv-57, 03057, Ukraine

Construction of output voltage modulation for power supply with non-linear output transformer by the reduced order mathematical model

The object of study is the sinusoidal voltage source, that is composed of a frequency converter with an output LC-filter and a non-linear single-phase output transformer. A mathematical model of this source is constructed in the form of a nonlinear singularly perturbed system of differential equations. Conditions for the existence of an integral manifold in a system with a not - known -control in advance in general form are obtained. The possibility of decreasing the order of the mathematical model of this power source by means of an integral manifold in the form of a power series is shown. A synthesis of the control strategy is carried out by establishing a correspondence between the modulating function and the coefficients of the Lyapunov function. The results of modeling are presented. References 14, figures 2.

Key words: frequency converter, output LC-filter, nonlinear transformer, singularly-perturbed system, integral manifold, theorem of existence, reduction of order.

Надійшла 23.05.2017

Received 23.05.2017