УДК 517.5

©2015. **Е. С. Афанасьева, Р. Р. Салимов**

О ВЕСОВОМ (p, ω)-МОДУЛЕ СЕМЕЙСТВ КРИВЫХ ПРОХОДЯЩИХ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ

В работе найдены достаточные условия на вес ω, при которых весовой (p, ω)-модуль семейства всех кривых, проходящих через фиксированную точку, равен нулю.

Ключевые слова: *весовой (p, ω)-модуль, кривые, семейство кривых, допустимая функция.*

1. Введение.

Напомним некоторые определения. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, пишут $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, ds \geqslant 1$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Пусть $p \geqslant 1$ и $\omega \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$. Определим (p, ω)-модуль с весом ω

$$M_p^{\omega}(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, \omega(x)\, dm(x).$$

Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Основными свойствами (p, ω)-модуля являются следующие:

1) (p, ω)-модуль пустого семейства кривых равен нулю:

$$M_p^{\omega}(\varnothing) = 0;$$

2) (p, ω)-модуль обладает свойством монотонности относительно семейств кривых:

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \Rightarrow M_p^{\omega}(\Gamma_1) \leqslant M_p^{\omega}(\Gamma_2);$$

3) (p, ω)-модуль обладает свойством полуаддитивности:

$$M_p^{\omega}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} M_p^{\omega}(\Gamma_i),$$

см. теорему 1 в [1].

4) Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2, пишут $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. Известно, что если $\Gamma_1 > \Gamma_2$, то $M_p^{\omega}(\Gamma_1) \leqslant M_p^{\omega}(\Gamma_2)$, см. с. 178, свойство (c) в [1].

Известно, что при $p \in (1, n]$, p-модуль семейства всех кривых, проходящих через фиксированную точку, равен нулю, см. теорему 6.2 в [2].

В данной работе мы приводим целый ряд условий на вес ω, когда весовой (p, ω)-модуль семейства всех кривых, проходящих через фиксированную точку, равен нулю.

Отметим, что весовые модули сейчас, как и ранее, изучаются в самых различных аспектах многими авторами, см., напр., [3]–[6] и [7].

2. Функции классов BMO и FMO.

Говорят, что вещественная функция $\varphi \in L^1_{\rm loc}(D)$ имеет *ограниченное среднее колебание* в области $D \subset \mathbb{R}^n$, пишут $\varphi \in {\rm BMO}(D)$, либо просто $\varphi \in {\rm BMO}$, если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B \subset D} \frac{1}{|B|} \int\limits_B |\varphi(x) - \varphi_B| \, dm(x) < \infty, \tag{1}$$

где точная нижняя грань в (1) берётся по всем шарам B, лежащим в области D, а

$$\varphi_B = \fint_B \varphi(x) \, dm(x) \colon = \frac{1}{|B|} \int\limits_B \varphi(x) \, dm(x) \tag{2}$$

обозначает среднее интегральное значение функции φ над шаром B.

Пространство BMO, введенное Джоном и Ниренбергом в работе [8], на сегодняшний день является одним из важнейших понятий гармонического анализа, комплексного анализа, теории уравнений с частными производными и смежных областей, см. монографии [9] и [10].

Следуя работе [11], будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \fint_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon| \, dm(x) < \infty, \tag{3}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) \, dm(x) \tag{4}$$

обозначает среднее интегральное значение функции φ над шаром $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon\}$. Как известно, с условием (3) совместима ситуация, когда $\widetilde{\varphi_\varepsilon} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Говорим также, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в области D, пишем $\varphi \in {\rm FMO}(D)$, либо просто $\varphi \in {\rm FMO}$, когда недоразумение невозможно, если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x_0 \in D$.

Известно, что при всех $1 \leqslant p < \infty$ имеют место включения ${\rm L}^\infty(D) \subset {\rm BMO}(D) \subset {\rm L}^p_{\rm loc}(D)$, см., напр., [8] и [10]. Однако, ${\rm FMO}(D)$ не является подклассом $L^p_{\rm loc}(D)$ ни для какого $p > 1$, хотя ${\rm FMO}(D) \subset L^1_{\rm loc}(D)$, см. соответствующий пример в разд. 11.2 в [12]. Таким образом, FMO существенно шире ${\rm BMO}_{\rm loc}$.

Приведем еще некоторые факты о функциях конечного среднего колебания из работы [11], см. также раздел 6.2 в [12].

Предложение 1. *Если для некоторых чисел $\varphi_\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$,*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \fint_{B(x_0,\varepsilon)}|\varphi(x)-\varphi_\varepsilon|\,dm(x)<\infty\,, \tag{5}$$

то функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0.

Следствие 1. *В частности, если в точке $x_0\in D$ выполнено условие*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \fint_{B(x_0,\varepsilon)}|\varphi(z)|\,dm(x)<\infty\,, \tag{6}$$

то функция φ имеет конечное среднее колебание в x_0.

Напомним, что точка $x_0\in D$ называется *точкой Лебега* функции $\varphi:D\to\mathbb{R}$, если φ интегрируема в окрестности x_0 и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \fint_{B(x_0,\,\varepsilon)}|\varphi(x)-\varphi(x_0)|\,dm(x)=0\,. \tag{7}$$

Следствие 2. *Пусть x_0 — точка Лебега для функции φ. Тогда функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0.*

Известно, что для функции $\varphi\in L^1_{\rm loc}(D)$ почти все точки D являются ее точками Лебега и, таким образом, конечного среднего колебания.

Следствие 3. *Любая локально интегрируемая функция $\varphi:D\to\mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание почти во всех точках D.*

Лемма 1. *Пусть D область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, и $\varphi:D\to\mathbb{R}$ – неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке $x_0\in D$. Тогда*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0}\frac{\varphi(x)\,dm(x)}{\left(|x-x_0|\log\frac{1}{|x-x_0|}\right)^n}=O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{8}$$

при $\varepsilon\to 0$ для некоторого положительного числа $\varepsilon_0<{\rm dist}\,(x_0,\partial D)$.

Приведенная выше лемма играет важную роль в теории вырожденных уравнений Бельтрами, равно как и в современной теории отображений, см. по этому поводу монографии [12] и [13].

3. Основные результаты.

Ключевое значение для наших дальнейших приложений имеет следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть, для некоторого* $R_0 \in (0, \infty)$, *выполнено условие*

$$\int\limits_{A(x_0,r,R_0)} \psi^p(|x-x_0|)\,\omega(x)\,dm(x) = o\left(\left[\int\limits_r^{R_0} \psi(t)\,dt\right]^p\right) \tag{9}$$

при $r \to 0$, *где* $A(x_0,r,R_0) = \{x \in X : r < |x-x_0| < R_0\}$ *и* $\psi(t)$ *– неотрицательная функция на* $(0,\infty)$ *такая, что*

$$0 < \int\limits_r^{R_0} \psi(t)\,dt < \infty \qquad\qquad \forall\, r \in (0, R_0)$$

Тогда семейство всех кривых в $\mathbb{R}^n$, *проходящих через точку* x_0, *имеет нулевой* (p,ω)*-модуль.*

Доказательство. Пусть Γ – семейство всех путей в $\mathbb{R}^n$, проходящих через точку x_0. Тогда $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$, где Γ_k - семейство всех путей, проходящих через x_0 и пересекающих сферу $S_k = S(x_0, r_k)$, для некоторой последовательности $r_k \in (0, R_0)\,, r_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Однако, $M_{p,\omega}(\Gamma_k) = 0$. Действительно, функция

$$\rho(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\psi(|x-x_0|)}{\left(\int\limits_r^{r_k} \psi(t)\,dt\right)}, & x \in A_k(r), \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \backslash A_k(r), \end{cases}$$

где $A_k(r) = A(x_0, r, r_k)$ является допустимой для семейства $\Gamma_k(r)$ всех путей, пересекающих сферы S_k и $S(x_0,r)$, $r \in (0, r_k)$. Так как $\Gamma_k > \Gamma_k(r)$, то

$$M_{p,\omega}(\Gamma_k) \leqslant M_{p,\omega}(\Gamma_k(r)) \leqslant \left(\int\limits_r^{r_k} \psi(t)\,dt\right)^{-p} \int\limits_{A_k(r)} \psi^p(|x-x_0|)\,\omega(x)\,dm(x)$$

и по условию (9), из произвола $r \in (0, r_k)$ вытекает, что $M_{p,\omega}(\Gamma_k) = 0$.

Наконец, из полуаддитивности модуля следует, что

$$M_{p,\omega}(\Gamma) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} M_{p,\omega}(\Gamma_k) = 0.$$

□

Выбирая в лемме 2 $\psi(t) = \frac{1}{t}$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть для некоторого* $R_0 \in (0, \infty)$ *при* $r \to 0$

$$\int\limits_{A(x_0,\,r,\,R_0)} \frac{\omega(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p} = o\left(\left[\log\frac{R_0}{r}\right]^p\right). \tag{10}$$

Тогда семейство всех кривых в $\mathbb{R}^n$, проходящих через точку x_0, имеет нулевой (p,ω)-модуль.

Теорема 2. *Пусть $\omega \in L^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \geqslant n/(n-p)$ и $1<p<n$, тогда семейство всех кривых в $\mathbb{R}^n$, проходящих через фиксированную точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$, имеет нулевой (p,ω)-модуль.*

Доказательство. Покажем, что из условия теоремы 2 вытекает условие теоремы 1. Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int\limits_A \frac{\omega(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p} \leqslant \left(\int\limits_A \omega^{\alpha}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int\limits_A \frac{dm(x)}{|x-x_0|^{\frac{\alpha p}{\alpha-1}}}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, \tag{11}$$

где $A = A(x_0,\,r,\,R_0)$.

Рассмотрим неравенство (11) при $\alpha > \frac{n}{n-p}$. Заметим, что

$$\int\limits_{A(x_0,\,r,\,R_0)} \frac{dm(x)}{|x-x_0|^{\frac{\alpha p}{\alpha-1}}} = \omega_{n-1}\int\limits_r^{R_0} t^{-\frac{\alpha p}{\alpha-1}+n-1}dt = \frac{\omega_{n-1}(\alpha-1)}{\alpha(n-p)-n}\left(R_0^{\frac{\alpha(n-p)-n}{\alpha-1}} - r^{\frac{\alpha(n-p)-n}{\alpha-1}}\right). \tag{12}$$

И, следовательно, имеем

$$\int\limits_{A(x_0,\,r,\,R_0)} \frac{\omega(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p} \leqslant c_0\|\omega\|_{\alpha}\left(R_0^{\frac{\alpha(n-p)-n}{\alpha-1}} - r^{\frac{\alpha(n-p)-n}{\alpha-1}}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \leqslant c_0\|\omega\|_{\alpha}R_0^{\frac{\alpha(n-p)-n}{\alpha}}, \tag{13}$$

где $\|\omega\|_{\alpha} = \left(\int\limits_{B(x_0,R_0)} \omega^{\alpha}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ и c_0 – положительная постоянная, зависящая только от размерности n, α и p.

При $\alpha = \frac{n}{n-p}$ справедливо неравенство

$$\int\limits_A \frac{\omega(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p} \leqslant \|\omega\|_{\frac{n}{n-p}} \int\limits_{A(x_0,\,r,\,R_0)} \frac{dm(x)}{|x-x_0|^n} = \omega_{n-1}\|\omega\|_{\frac{n}{n-p}}\,\log\frac{R_0}{r}, \tag{14}$$

где $\|\omega\|_{\frac{n}{n-p}} = \left(\int\limits_{B(x_0,R_0)} \omega^{\frac{n}{n-p}}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n-p}{n}}$.

Из соотношений (13) и (14) легко видеть, что вес ω удовлетворяет условию теоремы 1. $\square$

Комбинируя леммы 1 и 2, выбирая $\psi(t) \equiv \frac{1}{\left(t\log\frac{1}{t}\right)^{\frac{n}{p}}}$, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $\omega \in FMO(x_0)$, тогда семейство всех кривых в $\mathbb{R}^n$, проходящих через точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$, имеет нулевой (p,ω)-модуль.*

Комбинируя следствие 1 и теорему 3, получаем следующее утверждение.
Следствие 4. *Если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\,\varepsilon)} \omega(x)\,dm(x) < \infty,$$

то семейство всех кривых в $\mathbb{R}^n$, проходящих через точку x_0, имеет нулевой (p,ω)-модуль.

Теорема 4. *Пусть ω удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{0}^{R_0} \frac{dt}{\left(\int\limits_{|x-x_0|=t} \omega(x)\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{p-1}}} = \infty\,, \tag{15}$$

тогда семейство всех кривых в $\mathbb{R}^n$, проходящих через точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$, имеет нулевой (p,ω)-модуль.

Доказательство. Действительно, выбирая в лемме 2

$$\psi(t) = \left(\int\limits_{|x-x_0|=t} \omega(x)\,d\mathcal{A}\right)^{-\frac{1}{p-1}},$$

по теореме Фубини получаем

$$\int\limits_{A(x_0,r,R_0)} \psi^p(|x-x_0|)\,\omega(x)\,dm(x) = \int\limits_{r}^{R_0} \psi^p(t) \int\limits_{|x-x_0|=t} \omega(x)\,d\mathcal{A}\,dt =$$

$$= \int\limits_{r}^{R_0} \left(\int\limits_{|x-x_0|=t} \omega(x)\,d\mathcal{A}\right)^{-\frac{1}{p-1}} dt\,.$$

Откуда вытекает равенство

$$\frac{\int\limits_{A(x_0,r,R_0)} \psi^p(|x-x_0|)\,\omega(x)\,dm(x)}{\left(\int\limits_{r}^{R_0} \psi(t)\,dt\right)^p} = \left(\int\limits_{r}^{R_0} \left(\int\limits_{|x-x_0|=t} \omega(x)\,d\mathcal{A}\right)^{-\frac{1}{p-1}} dt\right)^{1-p}.$$

Таким образом, из условия (15) вытекает условие (9). Наконец, применяя лемму 2, приходим к заключению теоремы 4.

1. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – V. 98. – P. 171-219.
2. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. – Lecture Notes in Math., V. 229. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971, 144 p.
3. *Демшин И.Н., Шлык В.А.* Критерии устранимых множеств для весовых пространств гармонических функций // Аналитическая теория чисел и теория функций, 18. – Зап. научн. сем. ПОМИ, 286. – 2002. – С. 62-73.
4. *Дымченко Ю.В., Шлык В.А.* О достаточности семейства полиэдральных поверхностей в методе модулей и устранимые множества // Матем. заметки. – 2011. – Т. 90, № 2. – С. 216-230.
5. *Dymchenko Y.V., Shlyk V.A.* A relation between weighted condenser capacity and weighted module of a family of separating surfaces // Mat. Sb. – 1996. – Vol. 2. – P. 72-80.
6. *Ohtsuka M.* Extremal length and precise functions. – Tokyo: Gakkotosho Co., Ltd., 2003.
7. *Тамразов П.М.* Модули и экстремальные метрики в неориентируемых и скрученных римановых многообразиях // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 10. – С. 1388-1398.
8. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. – 1961. – 14. – P. 415-426.
9. *Heinonen J., Kilpelainen T., Martio O.* Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations. – Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford–New York–Tokio, 1993.
10. *Reimann H.M., Rychener T.* Funktionen Beschränkter Mittlerer Oscillation. – Lecture Notes in Math., 487, 1975.
11. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вісник. – 2005. – Т. 2, № 3. – С. 395-417; transl. Ukrainian Math. Bull. – 2005. – Vol. 2, № 3. – P. 403-424.
12. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. Springer Monographs in Mathematics. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
13. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach, Developments in Mathematics, vol. 26. – New York: Springer, 2012. – 301 p.

O. S. Afanas'eva, R. R. Salimov

On weighted (p, ω)-modulus of curve families passing through a point.

Sufficient conditions for vanishing weighted (p, ω)- modulus of curve families which pass through a point are established.

Keywords: *weighted (p, ω)-modulus, curves, a family of curves, admissible function.*

О. С. Афанасьєва, Р. Р. Салімов

Про ваговий (p, ω)-модуль сім'ї кривих, що проходять через точку.

У роботі знайдено достатні умови на вагу ω, при яких ваговий (p, ω)-модуль сім'ї усіх кривих, що проходять через фіксовану точку, дорівнює нулю.

Ключові слова: *ваговий (p, ω)-модуль, криві, сім'я кривих, допустима функція.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
Ин-т математики НАН Украины, Киев
`es.afanasjeva@yandex.ru, ruslan623@yandex.ru`

Получено 30.06.15