

УДК 517.54

©2016. И. В. Денега, Я. В. Заболотный

ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ О НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЯХ

В данной работе изучается одна из классических проблем геометрической теории функций об экстремальном разбиении комплексной плоскости.

Ключевые слова: внутренний радиус области, непересекающиеся области, лучевые системы точек, разделяющее преобразование, квадратичный дифференциал, функция Грина.

1. Обозначения и определения.

Пусть \mathbb{N} , \mathbb{R} – множество натуральных и вещественных чисел соответственно, \mathbb{C} – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$. Пусть $r(B, a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$. Внутренний радиус области B связан с обобщенной функцией Грина $g_B(z, a)$ области B (см. [1 – 4]) соотношениями

$$g_B(z, a) = -\ln |z - a| + \ln r(B, a) + o(1), \quad z \rightarrow a,$$

$$g_B(z, \infty) = \ln |z| + \ln r(B, a) + o(1), \quad z \rightarrow \infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Системой непересекающихся областей называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1, n}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Систему точек $A_n := \{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1, n}\}$ назовем n -лучевой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1, n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi$.

Обозначим при этом $P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$.

Данная работа базируется на применении кусочно-разделяющего преобразования, развитого в работах [1 – 3]. Пусть $\zeta = \pi_k(w)$, $k = \overline{1, n}$, обозначает ту однозначную ветвь многозначной аналитической функции $-i(e^{-i\theta_k w})^{\frac{1}{\alpha_k}}$, которая осуществляет однолистное и конформное отображение P_k на правую полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$.

Для произвольной n -лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ полагаем

$$\mu^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^n \left[\chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \right]^{1 - \frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \prod_{k=1}^n |a_k|^{1 + \frac{1}{4}\gamma(\alpha_k + \alpha_{k-1})}.$$

Пусть D – открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащее лучевую систему точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$. Если $a \in D$, то будем говорить, что $D(a)$ есть связная компонента D ,

содержащая точку a ; $D_k(a_p)$ – связная компонента множества $D(a_p) \cap \overline{P_k(A_n)}$, содержащая точку a_p , $p \in \{k, k-1\}$, $k = \overline{1, n}$; $D_k(0)$ – связная компонента множества $D(0) \cap \overline{P_k(A_n)}$, содержащая точку $w = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Внутренним радиусом $r(D, a_k)$ открытого множества D относительно точки a называется внутренний радиус связной компоненты множества D , содержащей точку a .

Пусть открытое множество D содержит точку $w = 0$ и произвольную n -лучевую систему точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, тогда будем говорить, что такое множество удовлетворяет условию неналегания относительно системы точек A_n , если множества $D_k(a_k)$, $D_k(a_{k+1})$, $D_k(0)$ попарно не пересекаются для каждого $k = \overline{1, n}$.

Пусть $\{B_k\}_{k=0}^n$ – произвольный набор областей таких, что $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$. Пусть $\tilde{D} = \bigcup_{k=0}^n B_k$. Будем говорить, что система $\{B_k\}_{k=0}^n$ удовлетворяет условию частичного налегания относительно некоторой системы A_n , если открытое множество \tilde{D} удовлетворяет условию неналегания относительно этой же n -лучевой системы точек A_n .

2. Постановка задачи.

Задача, которую мы рассматриваем, была сформулирована в работе [1].

Задача. Доказать, что максимум функционала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

где $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, ($n \geq 2$) – попарно неналегающие области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, и $0 < \gamma \leq n$, достигается для некоторой конфигурации областей, обладающей n -кратной симметрией.

На данный момент эта задача полностью не решена, известно только ее решения для некоторых частных случаев. Так, в работе [2] было получено ее решение при произвольном натуральном $n \geq 2$, но при условии $\gamma = 1$. В работе [5] задача 1 была впервые решена при произвольном $\gamma > 1$ и без дополнительных ограничений, но начиная с некоторого, заранее неизвестного номера n . При существенном ограничении на расположение точек a_k , а именно, что максимальный угол с вершинами $(a_k; \widehat{a_0; a_{k+1}})$, $k = \overline{1, n}$, $a_{n+1} = a_1$, не превосходит $2\pi/\sqrt{\gamma}$ и при произвольном $n \geq 5$ задача была решена в работе [6]. Случай $n \geq 2$ и $0 < \gamma < 1$ также был рассмотрен в работе [7].

В данной статье рассматривается аналогичная задача, но при условии что на области B_k и точки a_k накладываются менее жесткие условия, а именно рассматриваются частично налегающие области B_k и точки a_k , принадлежащие лучевым системам A_n .

3. Результаты и доказательства.

В данной работе получен следующий результат.

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0,42}$ при $n = \overline{8, 540}$, и $\gamma_n = \sqrt{n}$ при $n \geq 541$. Тогда для любой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mu^{(\gamma)}(A_n) \leq 1$, $\mu^{(0)}(A_n) \leq 1$ и любого набора областей B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, ($k = \overline{1, n}$), удовлетворяющего условию частичного налегания относительно лучевой системы A_n , справедливо неравенство

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(\Lambda_0, 0) \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k, \lambda_k), \quad (1)$$

где Λ_k , λ_k , $k = \overline{0, n}$, $\lambda_0 = 0$, – круговые области и полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2. \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим открытое множество $\tilde{D} = \bigcup_{k=0}^n B_k$. Очевидно, что $r(B_k, a_k) \leq r(\tilde{D}, a_k) = r(\tilde{D}(a_k), a_k)$. Отсюда

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(\tilde{D}, 0) \prod_{k=1}^n r(\tilde{D}, a_k).$$

Рассмотрим введенную ранее систему функций $\zeta = \pi_k(w) = -i(e^{-i\theta_k} w)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1, n}$. Семейство функций $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ называется допустимым для разделяющего преобразования областей B_k , $k = \overline{0, n}$, относительно углов $\{P_k\}_{k=1}^n$.

Пусть $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1, n}$, обозначает область плоскости ζ , полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k \cap \overline{P_k})$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. В свою очередь, через $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, обозначаем область плоскости \mathbb{C}_ζ , полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1} \cap \overline{P_k})$, содержащей точку $\pi_k(a_{k+1})$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Кроме того, $\Omega_k^{(0)}$ будет обозначать область плоскости \mathbb{C}_ζ , полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0 \cap \overline{P_k})$, содержащей точку $\zeta = 0$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. Обозначим

$$\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)}, \quad \pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)}, \quad k = \overline{1, n}, \quad \pi_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}.$$

Из определения функций π_k вытекает, что

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| \sim \frac{1}{\alpha_k} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k} - 1} \cdot |w - a_k|, \quad w \rightarrow a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(2)}| \sim \frac{1}{\alpha_k} |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k} - 1} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \rightarrow a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \rightarrow 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Тогда, используя соответствующие результаты работ [1, 2], имеем неравенства

$$r(\tilde{D}, a_k) \leq \left[\frac{r(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}) \cdot r(\Omega_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)})}{\frac{1}{\alpha_k} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$r(\tilde{D}, 0) \leq \left[\prod_{k=1}^n r^{\alpha_k^2}(\Omega_k^{(0)}, 0) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Условия реализации знака равенства в неравенствах (3), (4) полностью описаны в теореме 1.9 [1]. На основании этих соотношений получаем неравенство

$$\begin{aligned} I_n(\gamma) &\leq \prod_{k=1}^n \left[r(\Omega_k^{(0)}, 0) \right]^{\frac{\alpha_k^2}{2} \gamma} \cdot \prod_{k=1}^n \left[\frac{r(\Omega_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}) r(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)})}{\frac{1}{\alpha_{k-1} \cdot \alpha_k} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1} \cdot |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}} \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \prod_{k=1}^n \alpha_k \cdot \prod_{k=1}^n \frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \left[\prod_{k=1}^n r^{\gamma \alpha_k^2}(\Omega_k^{(0)}, 0) r(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}) r(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда, согласно работам [2, 4, 5], имеем

$$\begin{aligned} I_n(\gamma) &\leq \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \cdot \prod_{k=1}^n \frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \left[\prod_{k=1}^n |\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma \alpha_k^2} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma \alpha_k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{r^{\gamma \alpha_k^2}(\Omega_k^{(0)}, 0) \cdot r(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}) \cdot r(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)})}{|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma \alpha_k^2} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma \alpha_k^2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где $|\omega_k^{(1)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(2)}| = |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1, n}$. Далее используя методику, развитую в [5, с. 243–247], получаем оценку

$$\begin{aligned} I_n(\gamma) &\leq 2^{n-\frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2} \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \cdot \mu^{(\gamma)}(A_n) \cdot 2^{-n+\frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2} \times \\ &\times \left[\prod_{k=1}^n r^{\alpha_k^2 \gamma}(G_k^{(0)}, 0) r(G_k^{(1)}, -i) r(G_k^{(2)}, i) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \mu^{(\gamma)}(A_n) \left[\prod_{k=1}^n r^{\alpha_k^2 \gamma}(G_k^{(0)}, 0) r(G_k^{(1)}, -i) r(G_k^{(2)}, i) \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где $G_k^{(0)}, G_k^{(1)}, G_k^{(2)}$ – круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4 - \alpha_k^2 \gamma)w^2 - \alpha_k^2 \gamma}{w^2(w^2 + 1)^2} dw^2$$

($0 \in G_k^{(0)}, -i \in G_k^{(1)}, i \in G_k^{(2)}$). Учитывая условия теоремы 1, имеем

$$I_n(\gamma) \leq \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \left[\prod_{k=1}^n r^{\alpha_k^2 \gamma} \left(G_k^{(0)}, 0 \right) r \left(G_k^{(1)}, -i \right) r \left(G_k^{(2)}, i \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

При $\gamma \in (0, 1]$ из неравенства (5) согласно [2, 4, 5] можно получить оценку

$$I_n(\gamma) \leq \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \left[\prod_{k=1}^n S(\alpha_k \sqrt{\gamma}) \right]^{1/2}, \quad (6)$$

$S(\sigma) = 2\sigma^{2+6} \cdot \sigma^{\sigma^2} \cdot (2 - \sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2} \cdot (2 + \sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2}$, $\sigma \in [0, 2]$. Для произвольного $\gamma > 1$ неравенство (6) не справедливо. Для того, чтобы провести дальнейшие рассуждения, нам необходимо исследовать случай $\alpha_0 \sqrt{\gamma} \geq 2$, $\alpha_0 = \max_k \alpha_k$. Для этого, используем метод работы [5, с. 255–258]. Следуя ему

$$I_n(\gamma) = \prod_{k=1}^n [r(B_0, 0)r(B_k, a_k)]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right]^{1 - \frac{\gamma}{n}}.$$

Из теоремы М. А. Лаврентьева [11] имеет место неравенство $r(B_0, 0)r(B_k, a_k) \leq |a_k|^2$. За теоремой 5.1.1 [5] справедлива оценка

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n \prod_{k=1}^n \alpha_k \cdot \mu^{(0)}(A_n).$$

Из условия $\mu^{(0)}(A_n) \leq 1$ следует, что $\prod_{k=1}^n |a_k| \leq 1$. Тогда имеем

$$I_n(\gamma) \leq \left[2^n \cdot \prod_{k=1}^n \alpha_k \right]^{1 - \frac{\gamma}{n}}.$$

Поскольку $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2$, то используя неравенство Коши между средним геометрическим и средним арифметическим приходим к соотношению

$$I_n(\gamma) \leq \left[2^n \alpha_0 (2 - \alpha_0)^{n-1} (n - 1)^{-(n-1)} \right]^{1 - \frac{\gamma}{n}}.$$

Из результатов работ [1, 2, 5] и свойств разделяющего преобразования

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma(\Lambda_0, 0) \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k, \lambda_k) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Рассмотрим величину

$$O_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{r^\gamma(\Lambda_0, 0) \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k, \lambda_k)}.$$

Справедливо следующее неравенство

$$O_n(\gamma) \leq \frac{[2 \cdot 2^{n-1} \cdot \alpha_0 (2 - \alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}},$$

где $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}} > \frac{2}{n}$. Таким образом,

$$O_n(\gamma) \leq \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}} \cdot \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \times \\ \times \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

При получении оценки числового значения $O_n(\gamma)$ решающую роль сыграл результат А. К. Бахтина [5, с.204]. Рассмотрим значение $O_n(\gamma)$ при $\gamma = n^{\frac{1}{2}}$ и $n \geq 541$. В этом случае

$$O_n(\sqrt{n}) \leq \prod_{k=1}^6 y_k(n),$$

где $y_1(n) = \left[\frac{n}{4}\right]^{\sqrt{n}+1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right]^{n-1-\frac{n-1}{\sqrt{n}}}$, $y_2(n) = \left(\frac{n^{\frac{3}{2}}}{4}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$, $y_3(n) = \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^{n+\frac{1}{\sqrt{n}}}$,

$y_4(n) = \left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\right)^{2n^{\frac{1}{4}}}$, $y_5(n) = \left(\frac{4}{n^{\frac{1}{4}}}\right)^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}$, $y_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{\sqrt{n}}}$. Далее, используя рассуждения, приведенные в [10], получим, что при $n \geq 541$ справедливо неравенство $O_n(\sqrt{n}) \leq 1$, а значит

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(\Lambda_0, 0) \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k, \lambda_k) = I_n^0(\gamma)$$

для произвольной конфигурации областей $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$. Случай $\gamma = n^{0,42}$ при $n = \overline{8, 540}$ рассматривается аналогично (см. работу [8]).

Пусть теперь $\gamma \in (1; \gamma_n]$, где $\gamma_n = n^{0,42}$ при $n = \overline{8, 540}$ и $\gamma_n = n^{0,5}$ при $n \geq 541$. Учитывая, что функция

$$\left[2^n \cdot \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)} \right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

при фиксированном n монотонно возрастает по γ на промежутке $(1; \gamma_n]$, получим, что $I_n(\gamma) \leq I_n(\gamma_n)$. Функция $I_n^0(\gamma)$ монотонно убывает по γ при фиксированном n на том же промежутке, а значит $I_n^0(\gamma) \geq I_n^0(\gamma_n)$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$. Отсюда

$$O_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < \frac{I_n(\gamma_n)}{I_n^0(\gamma_n)} = O_n(\gamma_n) < 1.$$

Значит, при $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\alpha_0 \sqrt{\gamma} \geq 2$, $n \geq 8$, справедливо неравенство $I_n(\gamma) < I_n^0(\gamma)$. Остается рассмотреть случай $\alpha_0 \sqrt{\gamma} < 2$. При этом условии справедливость теоремы 1 следует из работы [9] (см. также [6]). Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. \square

Из теоремы 1 получаем следующие результаты.

Следствие 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $R \in \mathbb{R}^+$, $n \geq 8$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0,42}$ при $n = \overline{8, 540}$, и $\gamma_n = \sqrt{n}$ при $n \geq 541$. Тогда для любой n -лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mu^{(\gamma)}(A_n) \leq R^{n+\gamma}$, $\mu^{(0)}(A_n) \leq R^n$, и любого набора попарно неналегающих областей B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$ ($k = \overline{1, n}$), справедливо неравенство (1), где Λ_k, λ_k , $k = \overline{0, n}$, $\lambda_0 = 0$, – круговые области и полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + R^n\gamma}{w^2(w^n - R^n)^2} dw^2.$$

Следствие 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0,42}$ при $n = \overline{8, 540}$, и $\gamma_n = \sqrt{n}$ при $n \geq 541$. Тогда для любой системы точек a_k такой, что $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_1 = 1$, и любого набора попарно неналегающих областей B_k таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, ($k = \overline{1, n}$), справедливо неравенство (1), где Λ_k, λ_k , $k = \overline{0, n}$, $\lambda_0 = 0$, – круговые области и полюсы квадратичного дифференциала (2).

При условии, что максимальный угол с вершинами $(a_k; \widehat{a_0; a_{k+1}})$, $k = \overline{1, n}$, не превосходит $2\pi/\sqrt{\gamma}$ получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0,1n^2$. Тогда для любой n -лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $\mu(A_n) = 1$ такой, что $0 < \alpha_k \leq 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$ и любого набора областей B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего условию частичного налегания относительно лучевой системы

A_n , справедливо неравенство

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (7)$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k , $k = \overline{0, n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (2).

Доказательство. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, приходим к неравенству (6), из которого получаем следующую оценку

$$I_n(\gamma) \leq \gamma^{-\frac{n}{2}} \left[\prod_{k=1}^n P(\alpha_k \sqrt{\gamma}) \right]^{1/2},$$

где $P(x) = 2x^{2+6} \cdot x^{x^2+2} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} \cdot (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}$, $x \in [0, 2]$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{k=1}^n P(x_k) \rightarrow \max; \quad \sum_{k=1}^n x_k = 2\sqrt{\gamma}, \quad x_k = \alpha_k \sqrt{\gamma}, \quad 0 < x_k \leq 2.$$

Пусть $F(x) = \ln(P(x))$ и $X^{(0)} = \{x_k^{(0)}\}_{k=1}^n$ – произвольная экстремальная точка выше указанной задачи. Согласно [6] имеет место утверждение: если $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, тогда

$$F'(x_k^{(0)}) = F'(x_j^{(0)}), \quad (8)$$

и если некоторое $x_j^{(0)} = 2$, тогда для произвольного $x_k^{(0)} < 2$,

$$F'(x_k^{(0)}) \leq F'(x_j^{(0)}) = F'(2) = 1, \quad (9)$$

где $k, j = \overline{1, n}$, $k \neq j$, $F'(x) = 2x \ln 2x + (2-x) \ln(2-x) - (2+x) \ln(2+x) + \frac{2}{x}$. Покажем, что на основании соотношений (8) и (9) при условиях теоремы 2 выполняется равенство $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \dots = x_n^{(0)}$. Пусть для простоты $x_1^{(0)} \leq x_2^{(0)} \leq \dots \leq x_n^{(0)}$. Функция $F''(x) = \ln(4x^2/(4-x^2)) - 2x^{-2}$ строго возрастает на $(0, 2)$ и существует x_0 , $x_0 \approx 1,324661$ такое, что $\text{sign}F''(x) \equiv \text{sign}(x - x_0)$.

Далее, опираясь на методику, разработанную в [6], имеем, что для функции $F'(x)$ всегда выполняется соотношение $(x_1 - 0,63)n + (x_2 - x_1) > 0$ для $n \geq 10$. Отсюда $nx_1 + (x_2 - x_1) > 0,63n$. И окончательно имеем

$$(n-1)x_1 + x_2 > 2\sqrt{\gamma_n}, \quad \gamma_n = 0,1n^2, \quad n \geq 10.$$

Таким образом, согласно работе [6], получаем, что в случае $n \geq 10$ набор точек $\{x_k^{(0)}\}_{k=1}^n$ не может быть экстремальным при условии $x_n^{(0)} \in (x_0; 2]$. Следовательно, для экстремального набора $\{x_k^{(0)}\}_{k=1}^n$ возможен только случай, когда $x_k^{(0)} \in (0, x_0]$, $k = \overline{1, n}$, и $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \dots = x_n^{(0)}$. Для всех $\gamma < \gamma_n$, $n \geq 10$, все предыдущие рассуждения сохраняются. Окончательно, с учетом всего выше сказанного, имеем соотношение

$$I_n(\gamma) \leq \gamma^{-\frac{n}{2}} \left[P \left(\frac{2}{n} \sqrt{\gamma} \right) \right]^{n/2}.$$

Используя конкретное выражение для $P(x)$ и несложные преобразования, получаем неравенство (7). Реализация знака равенства проверяется непосредственно. \square

Из теоремы 2 имеем следующие утверждения.

Следствие 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0,1n^2$. Тогда для любой n -лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $\mu(A_n) = R^{n+\gamma}$ такой, что $0 < \alpha_k \leq 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$ и любого набора областей B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего условию частичного налегания относительно лучевой системы A_n , справедливо неравенство

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \mu(A_n) \left(\frac{4}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2} \right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2} \right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак равенства в котором достигается, когда a_k и B_k , $k = \overline{0, n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + R^n\gamma}{w^2(w^n - R^n)^2} dw^2.$$

Следствие 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0,1n^2$. Тогда для любой n -лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$ такой, что $0 < \alpha_k \leq 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$ и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство (7). Знак равенства достигается в том же случае что и в теореме 2.

Авторы выражают благодарность А.К. Бахтину за постановку задачи, ценные советы и замечания по написанию этой работы.

1. Дубинин В. Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1(295). – С. 3–76.
2. Дубинин В. Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – С. 48–66.

3. *Dubinin V. N.* Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory // Springer Basel, 2014. – 344 p.
4. *Колбина Л. И.* Конформное отображение единичного круга на неналегающие области // Вестник Ленингр. ун-та. – 1955. – 5. – С. 37–43.
5. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – 308 с.
6. *Ковалев Л. В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневосточный матем. сборник. – 1996. – 2. – С. 96–98.
7. *Кузьмина Г. В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2003. – 302. – С. 52–67.
8. *Бахтин А. К., Вьон В. Е., Таргонский А. Л.* Неравенства для внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – 2015. – Т. 12, № 3. – С. 38–46.
9. *Бахтина Г. П., Вьон В. Е., Денега И. В.* Задачи об экстремальном разбиении для частично налегающих областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – 2015. – Т. 12, № 3. – С. 31–37.
10. *Заболотный Я. В.* Знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей // Доп. НАН України. – 2016. – № 3. – С. 7–13.
11. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – 5. – С. 159–245.
12. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
13. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Издательство иностр. лит., 1962. – 256 с.

I. V. Denega, Y. V. Zabolotnii

Generalization of the some results on non-overlapping domains.

In this paper one quite general problem of geometric function theory on extremal decomposition of complex plane is consider.

Keywords: *inner radius of domain, non-overlapping domains, radial system of points, separating transformation, quadratic differential, Green function.*

I. В. Денега, Я. В. Заболотний

Узагальнення деяких результатів про області, що не перетинаються.

В даній роботі вивчається одна із класичних проблем геометричної теорії функцій про екстремальне розбиття комплексної площини.

Ключові слова: *внутрішній радіус області, області, що не перетинаються, променеві системи точок, розділяюче перетворення, квадратичний диференціал, функція Гріна.*

Институт математики НАН Украины, Киев
iradenega@yandex.ru,
yaroslavzabolotnii@mail.ru

Получено 8.06.16