УДК 517.5

©2017. **О. А. Новиков, О. Г. Ровенская, Ю. В. Козаченко**

ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА ЛИНЕЙНЫМИ МЕТОДАМИ

Работа касается вопросов приближения периодических дифференцируемых функций высокой гладкости повторными средними арифметическими сумм Фурье. Одна из наиболее общих классификаций периодических функций в настоящее время — классификация, предложенная А. И. Степанцом. Она позволяет единым образом классифицировать суммируемые периодические функции, начиная от функций, ряд Фурье которых может расходиться, и заканчивая бесконечно дифференцируемыми функциями, включая аналитические и целые. При соответствующем выборе параметров, классы Степанца совпадают с известными классами Вейля, классами Соболева и классами сверток с фиксированными ядрами. Установлены асимптотические формулы для точных верхних граней отклонений в равномерной метрике тригонометрических полиномов, порождаемых повторным применением метода суммирования Валле Пуссена, на классах периодический функций, которые задаются мультипликаторами и сдвигами по аргументу при условии, что последовательности, определяющие указанные классы, убывают к нулю со скоростью геометрической прогрессии (в этом случае функции из таких классов допускают регулярное продолжение в соответствующую полосу комплексной плоскости). В соответствующих случаях эти равенства гарантируют решение задачи Колмогорова–Никольского для повторных сумм Валле Пуссена и классов интегралов Пуассона. Указаны условия, при которых повторные суммы предоставляют лучший порядок приближения, чем обычные суммы Валле Пуссена.

MSC: 42A10.

Ключевые слова: *интегралы Пуассона, суммы Валле Пуссена, асимптотическое равенство.*

1. Введение.

Обозначим $C^q_{\beta,\infty}$ и $C^q_\beta H_\omega$ — классы непрерывных 2π–периодических функций $f(x)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)P^q_\beta(t)\ dt,$$

в которой

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q\in(0;1), \quad \beta\in\mathbb{R}$$

– ядро Пуассона, а функция $\varphi(\cdot)$, соответственно, такая что $\operatorname{esssup}|\varphi(\cdot)| \le\ 1$ или

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \le \omega(|t'-t''|), \quad \forall t',\ t''\in\mathbb{R},$$

где $\omega(t)$ – произвольный фиксированный модуль непрерывности [1].

Известно (см., напр., [1]), что классы $C^q_{\beta,\infty}$ и $C^q_\beta H_\omega$, которые принято называть классами интегралов Пуассона, состоят из функций $f(x)$, которые являются сужениями на действительную ось функций $F(z)$, аналитических в полосе $|\mathrm{Im} z| \le \ln\frac{1}{q}$.

Пусть L пространство 2π-периодических суммируемых на периоде функций. Обозначим через $S_n(f;x)$ частичные суммы ряда Фурье функции $f \in L$. Суммы Валле Пуссена функции $f \in L$ определяются соотношением

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x).$$

Пусть $\bar{p} = \{p_1, p_2, ..., p_r\}$ – набор произвольных натуральных чисел таких, что $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k < n$. Функции $f \in L$ поставим в соответствие последовательность тригонометрических многочленов

$$V_{n,\bar{p}}^{(r)}(f;x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1} ... \frac{1}{p_r} \sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} S_{k_r}(f;x), \tag{1}$$

которые будем называть r-повторними суммами Валле Пуссена.

Задача приближения классов интегралов Пуассона имеет свою историю. В 1946 году С. М. Никольский [2] показал, что для верхних граней уклонений частичных сумм Фурье, взятых по классам $C^q_{\beta,\infty}$, имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; S_n\right) := \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} ||f(x) - S_n(f;x)||_C = \frac{8q^n}{\pi^2} K(q) + O(1)\frac{q^n}{n},$$

где

$$K(q) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}}$$

– полный эллиптический интеграл первого рода, величина $O(1)$ не зависит от n. В 1980 году С. Б. Стечкин [3] показал, что остаточный член в этой формуле можно записать в виде $O(1)\frac{q^{n+1}}{(1-q)n}$, где величина $O(1)$ равномерно ограничена по n и q.

Аналогичная задача для классов $C^q_\beta H_\omega$ была решена в 2001 году А. И. Степанцом. В работе [1] было показано, что при $n \to \infty$ выполняется асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; S_n\right) := \sup_{f \in C^q_\beta H_\omega} ||f(x) - S_n(f;x)||_C =$$

$$= \frac{4q^n}{\pi^2} K(q) \theta_n(\omega) \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \; dt + \frac{O(1) q^n}{(1-q)^2 n} \omega(1/n),$$

где $\theta_n(\omega) \in [1/2; 1]$, причем $\theta_n(\omega) = 1$, если $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности.

В работах [4, 5] для верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена на классах интегралов Пуасона получены формулы

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; V_{n,p}\right) = \frac{2\theta_n(\omega) q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n-p}\right) \sin t dt + \\ + \frac{O(1)}{p}\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\left(\frac{q^{n-p+1}}{(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{(1-q)}\right), \quad (2)$$

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + \frac{O(1)}{p}\left(\frac{q^{n-p+1}}{(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{(1-q)}\right).$$

А. С. Сердюком [6] также было показано, что имеет место более общий результат, чем формула (2):

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{q,p} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

где в случае произвольного $p = 1, 2, ..., n$ поведение константы $K_{q,p}$ определяется следующим соотношением, доказанным в [7]:

$$K_{q,p} = 2\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}K(q^p), \quad s = s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1, \\ 3, & p = 2, 3, ... \end{cases}$$

Исследование вопросов приближения классов функций $C^q_{\beta,\infty}$ и $C^q_\beta H_\omega$ повторными суммами Валле Пуссена является естественным продолжением изучения аппроксимативных свойств метода суммирования Валле Пуссена. Асимптотические формулы для верхних граней уклонений r-повторных сумм Валле Пуссена при $r = 2$ на классах интегралов Пуассона получены в работах [8, 9]. Для классов $C^q_\beta H_\omega$ в случае произвольного $r \in \mathbb{N}$ подобная экстремальная задача решена в работе [10].

В данной работе изучено асимптотическое поведение при $n \to \infty$ величины

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V^{(r)}_{n,\bar{p}}\right) := \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} ||f(x) - V^{(r)}_{n,\bar{p}}(f;x)||_C.$$

2. Результаты.

Будем использовать схему исследования, предложенную в работе [1]. Сначала найдем удобные интегральные представления величин

$$\delta^{(r)}_{n,\bar{p}}(f;x) := f(x) - V^{(r)}_{n,\bar{p}}(f;x).$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $q \in (0;1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\overline{r} = \{1;2;...;r\}$, $\bar{p} = \bar{p}(\overline{r}) = \{p_1, p_2, ..., p_r\}$ — *множество натуральных чисел таких, что* $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k < n$. *Тогда для всякой функции* $f \in C^q_{\beta,\infty}$ *в каждой точке* $x \in [-\pi;\pi]$ *справедливо равенство*

$$\delta^{(r)}_{n,\bar{p}}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\left(\sigma^{(r)}_1 \cos\frac{\beta\pi}{2} - \sigma^{(r)}_2 \sin\frac{\beta\pi}{2}\right)dt, \tag{3}$$

где величины $\sigma^{(r)}_1 = \sigma^{(r)}_1(t,q,n)$, $\sigma^{(r)}_2 = \sigma^{(r)}_2(t,q,n)$ *заданы соотношениями*

$$\sigma^{(r)}_1 = \frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod_{i=1}^{r} p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r}}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{r-|\alpha|+\nu}C^\nu_{r+1}q^{n-\Sigma^\alpha_{\bar{p}}+r+\nu}\cos(n-\Sigma^\alpha_{p}+r-\nu)t, \tag{4}$$

$$\sigma^{(r)}_2 = \frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod_{i=1}^{r} p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r}}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{r-|\alpha|+\nu}C^\nu_{r+1}q^{n-\Sigma^\alpha_{\bar{p}}+r+\nu}\sin(n-\Sigma^\alpha_{\bar{p}}+r-\nu)t, \tag{5}$$

$\Sigma^\alpha_{\bar{p}} = \sum\limits_{j\in\alpha} p_j$, $|\alpha|$ — *количество элементов множества* $\alpha \subset \overline{r}$,

$$Z_q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2q\cos x+q^2}}, \tag{6}$$

$C^k_n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — *коэффициенты биномиального разложения.*

Доказательство. Применим метод математической индукции. В работе [4] показано, что при $r = 1$ формула (3) справедлива. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Предположим, что для $\overline{r'} = \{2,3,...,r+1\}$ и произвольного набора натуральных чисел $\bar{p}(\overline{r'}) = \{p_2, p_3, ..., p_{r+1}\}$ таких, что $\sum\limits_{i=2}^{r+1} p_i < k_1$, справедлива формула (3), в которой величины

$$\sigma^{(\overline{r'})}_1(t,q,k_1+1) = \frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod_{i=2}^{r+1} p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r'}}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{r-|\alpha|+\nu}C^\nu_{r+1}q^{k_1-\Sigma^\alpha_{\bar{p}(\overline{r'})}+r+\nu}\cos(k_1-\Sigma^\alpha_{\bar{p}(\overline{r'})}+r-\nu)t,$$

заданы формулой (4). Найдем выражение для $\delta^{(r+1)}_{k_0,\bar{p}(r+1)}(f;x)$ с набором чисел $\bar{p}(r+1) = \{p_1\} \cup \bar{p}(\overline{r'})$, для которого выполнены условия $p_1 \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{r+1} p_i < k_0$. В силу соотношения (1) имеем

$$\delta^{(r+1)}_{k_0+1,\bar{p}(r+1)}(f;x)=\delta^{(r+1)}_{k_0+1,p_1,p_2,\ldots,p_{r+1}}(f;x)=\frac{1}{p_1}\sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0}\frac{1}{p_2}\times$$

$$\times\sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1}\frac{1}{p_3}\sum_{k_3=k_2-p_3+1}^{k_2}\ldots\frac{1}{p_{r+1}}\sum_{k_{r+1}=k_r-p_{r+1}+1}^{k_r}(f(x)-S_{k_{r+1}}(f,x))=$$

$$=\frac{1}{p_1}\sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0}(\sigma_1^{(\overline{r'})}(t,q,k_1+1)\cos\frac{\beta\pi}{2}-\sigma_2^{(\overline{r'})}(t,q,k_1+1)\sin\frac{\beta\pi}{2}).$$

Тогда

$$\sigma_1^{(r+1)}(t,q,k_0+1)=\frac{1}{p_1}\sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0}\sigma_1^{(\overline{r'})}(t,q,k_1+1)=\frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{p_1\prod\limits_{i=2}^{r+1}p_i}\times$$

$$\times\sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0}\sum_{\alpha\subset\overline{r'}}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{r-|\alpha|+\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{k_1-\Sigma^{\alpha}_{\bar{p}(\overline{r'})}+r+\nu}\cos(k_1-\Sigma^{\alpha}_{\bar{p}(\overline{r'})}+r-\nu)t=$$

$$=\frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{2\prod\limits_{i=1}^{r+1}p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r'}}\sum_{\nu=0}^{r+1}((-1)^{r-|\alpha|+\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{2\nu}\sum_{k=k_0-p_1+1}^{k_0}((qe^{it})^{k-\Sigma^{\alpha}_{\bar{p}(\overline{r'})}+r-\nu}+(qe^{-it})^{k-\Sigma^{\alpha}_{\bar{p}(\overline{r'})}+r-\nu}).$$

Применяя формулу суммы элементов бесконечной убывающей геометрической прогрессии и полагая $\tilde{k}=k_0-\Sigma^{\alpha}_{\bar{p}(\overline{r'})}+r$, получаем

$$\sum_{k=k_0-p_1+1}^{k_0}\left(qe^{it}\right)^{k-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j+r-\nu}=\left(qe^{it}\right)^{\tilde{k}+1-\nu}\frac{\left(qe^{-it}\right)^{p_1}-1}{1-qe^{it}}.$$

Поэтому, выполняя элементарные преобразования, получаем

$$q^{2\nu}\sum_{k=k_0-p_1+1}^{k_0}\left(\left(qe^{it}\right)^{k-\Sigma^{\alpha}_{\bar{p}(\overline{r'})}+r-\nu}+\left(qe^{-it}\right)^{k-\Sigma^{\alpha}_{\bar{p}(\overline{r'})}+r-\nu}\right)=\frac{q^{\tilde{k}+1+\nu}}{1-2q\cos t+q^2}q^{\tilde{k}+1-\nu}\times$$

$$\times\left\{q^{-p_1}\cos{(\tilde{k}+1-p_1-\nu)t}-q^{1-p_1}\cos{(\tilde{k}-p_1-\nu)t}-\cos{(\tilde{k}+1-\nu)t}+q\cos{(\tilde{k}-\nu)}\right\}.$$

Таким образом,

$$\sigma_1^{(r+1)}(t,q,k_0+1)=\frac{Z_q^{2(r+2)}(t)}{\prod_{i=1}^{r+1}p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r'}}(-1)^{r-|\alpha|}q^{\tilde{k}+1}\Bigg[\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}\times$$

$$\times\, q^{\nu-p_1}\cos{(\tilde{k}+1-p_1-\nu)t}-\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu+1-p_1}\cos{(\tilde{k}-p_1-\nu)t}-$$

$$-\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu}\cos{(\tilde{k}+1-\nu)t}+\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu+1}\cos{(\tilde{k}-\nu)}\Bigg].$$

Выполняя преобразования, с учетом легко проверяемого равенства

$$C_{r+1}^{\nu}+C_{r+1}^{\nu-1}=C_{r+2}^{\nu}, \tag{7}$$

получаем

$$\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu}\cos{(\tilde{k}+1-p_1-\nu)t}-\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu+1}\times$$

$$\times\cos{(\tilde{k}-p_1-\nu)t}=C_{r+1}^{0}\cos{(\tilde{k}+1-p_1)t}+\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu}\times$$

$$\times\cos{(\tilde{k}+1-p_1-\nu)t}+\sum_{\nu=1}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu-1}q^{\nu}\cos{(\tilde{k}-p_1-\nu+1)t}+$$

$$+\,(-1)^{r+2}C_{r+1}^{r+1}q^{r+2}\cos{(\tilde{k}-p_1-r-1)t}=C_{r+1}^{0}\cos{(\tilde{k}+1-p_1)t}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r+1}[C_{r+1}^{\nu}+C_{r+1}^{\nu-1}](-1)^{\nu}q^{\nu}\cos{(\tilde{k}+1-p_1-\nu)t}+$$

$$+\,(-1)^{r+2}C_{r+1}^{r+1}q^{r+2}\cos{(\tilde{k}-p_1-r-1)t}=$$

$$=C_{r+2}^{0}\cos{(\tilde{k}+1-p_1)t}+\sum_{\nu=1}^{r+1}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu}\cos{(\tilde{k}+1-p_1-\nu)t}+$$

$$+\,(-1)^{r+2}C_{r+2}^{r+2}q^{r+2}\cos{(\tilde{k}+1-p_1-(r+2))t}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{r+2}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu}\cos{(\tilde{k}+1-p_1-\nu)t}.$$

Аналогично

$$\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu}\cos{(\tilde{k}+1-\nu)t}-\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu+1}\cos{(\tilde{k}-\nu)t}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{r+2}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu}\cos{(\tilde{k}+1-\nu)t}.$$

Таким образом, полагая $\alpha' = \alpha \cup \{1\}$ и имея в виду, что $\overline{r+1} = \overline{r'} \cup \{1\}$, получаем

$$\sum_{\alpha\subset\overline{r'}}(-1)^{r-|\alpha|}q^{\tilde{k}+1}\left[\sum_{\nu=0}^{r+2}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu-p_1}\cos{(\tilde{k}+1-p_1-\nu)t}-\right.$$
$$\left.-\sum_{\nu=0}^{r+2}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu}\cos{(\tilde{k}+1-\nu)t}\right]=\sum_{\alpha\subset\overline{r'}}(-1)^{r-|\alpha|}\times$$
$$\times\left[\sum_{\nu=0}^{r+2}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{k_0-\Sigma^{\alpha}_{\bar{p}(\overline{r'})}+r+1-p_1+\nu}\cos{(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\bar{p}(\overline{r'})}+r+2-p_1-\nu)t}-\right.$$

$$\left.-\sum_{\nu=0}^{r+2}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{k_0-\Sigma^{\alpha}_{\bar{p}(\overline{r'})}+r+1+\nu}\cos{(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\bar{p}(\overline{r'})}+r+2-\nu)t}\right]=$$
$$=\sum_{\alpha'\subset\overline{r+1}}(-1)^{r+1-|\alpha'|}\sum_{\nu=0}^{r+2}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{k_0-\Sigma^{\alpha'}_{\bar{p}()\overline{r+1}}+(r+1)+\nu}\times$$
$$\times\cos{(k_0-\Sigma^{\alpha\cup\{1\}}_{\bar{p}(\overline{r+1})}+(r+1)+1-\nu)t}+\sum_{\alpha\subset\overline{r+1},1\notin\alpha}(-1)^{r+1-|\alpha|}\times$$
$$\left.\times\sum_{\nu=0}^{r+2}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{k_0-\Sigma^{\alpha}_{\bar{p}(\overline{r'})}+r+1+\nu}\cos{(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\bar{p}(\overline{r'})}+1+(r+1)-\nu)t}\right].$$

Так как для множеств $A=\{p_i, i\in\alpha\subset\overline{r+1}, 1\in\alpha\}$, $B=\{p_i, i\in\alpha\subset\overline{r+1}, 1\notin\alpha\}$, $C=\{p_i, i\in\alpha\subset\overline{r+1}\}$ выполняется $A\cup B=C$, то окончательно получаем

$$\sigma_1^{(r+1)}(t,q,k_0+1)=\frac{Z_q^{2((r+1)+1)}(t)}{\prod\limits_{i=1}^{r+1}p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r+1}}\sum_{\nu=0}^{(r+1)+1}(-1)^{(r+1)-|\alpha|+\nu}\times$$
$$\times C_{(r+1)+1}^{\nu}q^{n-\Sigma^{\alpha}_{\bar{p}(\overline{r+1})}+(r+1)+\nu}\cos(n-\Sigma^{\alpha}_{\bar{p}(\overline{r+1})}+(r+1)-\nu)t.$$

Это значит, что из справедливости выражения (5) для величины $\sigma_1^{(m)}$ для $m=r$ вытекает его справедливость для $m=r+1$. Поэтому по индукции для всякого $r\in\mathbb{N}$ справедливо соотношение (5) для величины $\sigma_1^{(r)}(t;q;n)$. Аналогично проверяется справедливость соотношения (5) для величины $\sigma_2^{(r)}(t;q;n)$. Таким образом, имеет место формула (3). Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть* $q\in(0;1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{r}p_k:=\Sigma_{\bar{p}}<n$. *Тогда при* $n-\Sigma_p\to\infty$

справедлива асимптотическая формула

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V^{(r)}_{n,\bar{p}}\right) = \frac{4q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+r}}{\pi^2 \prod_{i=1}^r p_i} \int\limits_0^{\pi} Z_q^{r+1}(x)dx + \frac{O(1)q^{n-\Sigma_{\bar{p}}}}{\prod_{i=1}^r p_i} \left(\frac{(n-\Sigma_{\bar{p}})^{-1}}{(1-q)^{r+2}} + \frac{\sum_{j=1}^r q^{p_j}}{(1-q)^{r+1}}\right), \tag{8}$$

где величина $Z_q(x)$ задана соотношением (6).

Доказательство. На основании теоремы 1, имеем

$$\delta^{(r)}_{n,\bar{p}}(f;x) = \frac{1}{\pi \prod\limits_{i=1}^{r} p_i} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f^q_\beta(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}} \sum_{\alpha\subset\bar{r}} (-1)^{(r-|\alpha|)} q^{n-\Sigma^\alpha_{\bar{p}}+r} \times$$
$$\times \left[\sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C^\nu_{r+1} q^\nu \cos\nu t \cos\left((n-\Sigma^\alpha_{\bar{p}}+r)t + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu C^\nu_{r+1} q^\nu \sin\nu t \sin\left((n-\Sigma^\alpha_{\bar{p}}+r)t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right]. \tag{9}$$

Введем обозначения

$$b^{q,\beta}_m(t) = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C^\nu_{r+1} q^\nu \cos\nu t}{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}} \cos(mt + \frac{\beta\pi}{2}) + \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu C^\nu_{r+1} q^\nu \sin\nu t}{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}} \sin(mt + \frac{\beta\pi}{2}). \tag{10}$$

Тогда на основании (9) получаем

$$\delta^{(r)}_{n,p}(f,x) = \frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{\pi \prod_{i=1}^r p_i} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t) b^{q,\beta}_{n-\Sigma_{\bar{p}}+r}(t)dt +$$
$$+ O(1)\frac{1}{\pi \prod_{i=1}^r p_i} \left(\sum_{\alpha\subset\bar{r},\alpha\neq\bar{r}} q^{n-\Sigma^\alpha_{\bar{p}}+r} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f^q_\beta(x+t) b^{q,\beta}_{n-\Sigma^\alpha_{\bar{p}}+r}(t)|dt \right). \tag{11}$$

Изучим функцию $b^{q,\beta}_m(t)$. Применяя формулы Эйлера, получаем

$$\left(\sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C^\nu_{r+1} q^\nu \cos\nu t\right)^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu C^\nu_{r+1} q^\nu \sin\nu t\right)^2 = (1-2q\cos t+q^2)^{r+1}. \tag{12}$$

Обозначим $\xi(t) = \operatorname{arctg}\frac{q\sin t}{1-q\cos t}$. Применяя метод математической индукции несложно показать, что для всякого $n \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{-\sum_{\nu=1}^n (-1)^\nu C^\nu_n q^\nu \sin\nu t}{\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu C^\nu_n q^\nu \cos\nu t}\right) = n\xi(t). \tag{13}$$

Поэтому

$$b_m^{q,\beta}(t)=\frac{\sqrt{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}}}{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}}\sin(mt+\frac{\beta\pi}{2}+(r+1)\xi(t))=$$

$$=Z_q^{r+1}(t)\sin(mt+\frac{\beta\pi}{2}+(r+1)\xi(t)).$$

Найдем нули функции $\sin(mt+\frac{\beta\pi}{2}+(r+1)\xi(t))$. Для этого изучим свойства функции $\xi(t)$. Поскольку $1-2q\cos t+q^2>0$, то функция $b_m^{q,\beta}(t)$ обращается в нуль на промежутке $(0;\pi)$ с изменением знака в точках t_k, удовлетворяющих условию

$$mt_k+\frac{\beta\pi}{2}+(r+1)\xi(t_k)=k\pi,\quad k=1,2,...m-1. \tag{14}$$

Так как $\xi'(t)=(-q^2+q\cos t)Z_q^2(t)$, то на промежутке $(0;\pi)$ функция $\xi(t)$ имеет максимум в точке $t=\arccos q$. Поэтому для всякого $t\in(0;\pi)$ выполняется

$$0\le\xi(t)\le\operatorname{arctg}\frac{q}{\sqrt{1-q^2}}$$

и для всякого $k=1,2,...,m-1$ выполняется

$$|\xi(t_{k+1})-\xi(t_k)|\le 2\operatorname{arctg}\frac{q}{\sqrt{1-q^2}}<\pi.$$

Следовательно,

$$|t_{k+1}-t_k|=\left|\frac{\pi}{m}-(r+1)\frac{\xi(t_{k+1})-\xi(t_k)}{m}\right|\le\frac{(r+2)\pi}{m}. \tag{15}$$

С другой стороны, для всякого $k=1,2,...,m-1$ существует $c_k\in(t_k;t_{k+1})$ такая, что $\xi(t_{k+1})-\xi(t_k)=\xi'(c_k)(t_{k+1}-t_k)$. Так как $\xi''(t)=(q^3-q)Z_q^4(t)\sin t$, то для всякого $t\in(0;\pi)$ выполняется

$$\frac{-q}{1+q}=\xi(\pi)\le\xi'(t)\le\xi'(0)=\frac{q}{1-q}$$

и для всякого $k=1,2,...,m-1$

$$|\xi(t_{k+1})-\xi(t_k)|\le\frac{q}{1-q}|t_{k+1}-t_k|. \tag{16}$$

В силу соотношений (14) и (16), для достаточно больших m имеет место неравенство

$$t_{k+1}-t_k\ge\frac{\pi}{m}-\frac{r+1}{m}|\xi(t_{k+1})-\xi(t_k)|\ge\frac{\pi}{m}-\frac{2(r+1)(r+2)\pi q}{m^2(1-q)}\ge\frac{\pi}{2m}.$$

Поэтому при достаточно больших m набор чисел t_k монотонно возрастает и количество промежутков, на которых функция $b^{q,\beta}_{m,1}(t)$,
$t \in (0;\pi)$, изменяет знак $\leq 2m$.

Учитывая (16), получаем

$$|(t_{k+2}-t_{k+1})-(t_{k+1}-t_k)| \leq (r+1)\frac{|\xi(t_{k+2})-\xi(t_{k+1})|+|\xi(t_{k+1})-\xi(t_k)|}{m} \leq$$
$$\leq \frac{2(r+1)(r+2)\pi q}{m^2(1-q)}.$$

Функция $b^{q,\beta}_{m}(t)$ на промежутках $[t_k;t_{k+1}]$; $[t_{k+1};t_{k+2}]$ сохраняет знаки, причем, справа и слева от t_{k+1} эти знаки различные.

Поэтому, функцию $\mathrm{sign} b^{q,\beta}_{m}(t)$ на отрезке $[t_k;t_{k+2}]$ можно изменить на множестве, мера которого $\leq \frac{2(r+1)(r+2)\pi q}{(1-q)m^2}$, так, что полученная функция $b^{q,\beta}_{m,1}(t)$ будет обладать свойством:

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+2}} b^{q,\beta}_{m,1}(t)dt = 0.$$

Выполнив аналогичные рассуждения для промежутка $(-\pi;0)$, видим, что существует функция $b^{q,\beta}_{m,1}(t)$, построенная на $(-\pi;\pi)$, которая обладает свойством

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} b^{q,\beta}_{m,1}(t)dt = 0$$

и отличается от $\mathrm{sign} b^{q,\beta}_{m}(t)$ на множестве, мера которого не превосходит величину $\frac{8(r+1)(r+2)\pi q}{m(1-q)}$.

Таким образом,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|b^{q,\beta}_{m}(t)\right| dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} b^{q,\beta}_{m}(t)\mathrm{sign}\left(b^{q,\beta}_{m}(t)\right) dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} b^{q,\beta}_{m}(t)\left[b^{q,\beta}_{m,1}(t) + O(1)\frac{q}{m(1-q)}\right] dt$$

и, учитывая, что

$$|b^{q,\beta}_{m}(t)| = \frac{|\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2}+(r+1)\xi(t))|}{(1-2q\cos t+q^2)^{\frac{r+1}{2}}} \leq \frac{1}{(1-q)^{r+1}},$$

находим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|b^{q,\beta}_{m}(t)\right| dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} b^{q,\beta}_{m}(t)b^{q,\beta}_{m,1}(t) + O(1)\frac{q}{m(1-q)^{r+2}}dt.$$

Принимая во внимание, что $b^{q,\beta}_{m,1}(t) \in S^0_M$, заключаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |b^{q,\beta}_{n-\Sigma_p+r}(t)|dt \geq \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f^q_\beta(x+t) b^{q,\beta}_{n-\Sigma_p+r}(t)|dt \right) \geq$$

$$\geq \int_{-\pi}^{\pi} b^{q,\beta}_{n-\Sigma_p+r}(t) b^{q,\beta}_{n-\Sigma_p+r,1}(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} |b^{q,\beta}_{n-\Sigma_p+r}(t)|dt + \frac{O(1)(n-\Sigma_p)^{-1}}{(1-q)^{r+2}}.$$

Поэтому получаем

$$\sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} \left(\frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{\pi \prod\limits_{i=1}^{r} p_i} \int_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t) b^{q,\beta}_{n-\Sigma_p+r}(t)dt \right)$$

$$= \frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{\pi \prod\limits_{i=1}^{r} p_i} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |b^{q,\beta}_{n-\Sigma_p+r}(t)|dt + O(1) \frac{(n-\Sigma_p)^{-1}}{(1-q)^{r+2}} \right).$$

Таким образом, на основании соотношения (11) при $p_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, ..., r$, $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i < n$, получаем

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V^{(r)}_{n,\bar{p}}\right) = \frac{q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+r}}{\pi \prod\limits_{i=1}^{r} p_i} \int_{-\pi}^{\pi} |b^{q,\beta}_{n-\Sigma_{\bar{p}}+r}(t)|dt +$$

$$+ \frac{O(1)}{\prod\limits_{i=1}^{r} p_i} \left(\frac{q^{n-\Sigma_p}}{(n-\Sigma_{\bar{p}})(1-q)^{r+2}} + \sum_{\alpha \subset \bar{r}, \alpha \neq \bar{r}} q^{n-\Sigma^\alpha_{\bar{p}}} \int_{-\pi}^{\pi} |b^{q,\beta}_{n-\Sigma^\alpha_{\bar{p}}+r}(t)|dt \right). \quad (17)$$

Для $m = n - \Sigma^\alpha_{\bar{p}} + r$ вычислим интеграл $J_m = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |b^{q,\beta}_m(t)|dt$. В силу соотношения (10) имеем

$$b^{q,\beta}_m(t) = \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C^\nu_{r+1} q^\nu \cos\left((m-\nu)t + \frac{\beta\pi}{2}\right) Z^{2(r+1)}_q(t).$$

Следовательно,

$$J_m = \int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos\left((m-\nu)t + \frac{\beta\pi}{2}\right) Z_q^{2(r+1)}(t) \right| =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos\left(\left(1-\frac{\nu}{m}\right)t + \frac{\beta\pi}{2}\right) \times \right.$$

$$\left. \times\, Z_q^{2(r+1)}\left(\frac{t}{m}\right) \right| dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2\pi}{m} \left| \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \times \right.$$

$$\left. \times \cos\left(t - \frac{\nu(t+2k\pi)}{m} + \frac{\beta\pi}{2}\right) Z_q^{2(r+1)}\left(\frac{t+2k\pi}{m}\right) \right| dt. \quad (18)$$

При фиксированных t, β, q, m положим

$$F(x) = \left| \sum_{\nu=0}^{r+1} (-q)^\nu C_{r+1}^\nu \cos\left(t - \nu\left(\frac{t}{m} + x\right) + \frac{\beta\pi}{2}\right) Z_q^{2r+2}\left(\frac{t}{m} + x\right) \right|.$$

Легко заметить, что под знаком интеграла в соотношении (18) стоит интегральная сумма, составленная для функции $F(x)$, которая соответствует разбиению $x_k = \frac{2k\pi}{m}$, $\Delta x_k = \frac{2\pi}{m}$, $k = 0, 1, ..., m-1$, отрезка $[0; 2\pi]$.

Имеет место оценка

$$\left| \int\limits_0^{2\pi} F(x)dx - \sum_{k=0}^{m-1} F(x_k)\frac{2\pi}{m} \right| \le \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |F(x) - F(x_k)| dx \le 2\pi\omega\left(F; \frac{2\pi}{m}\right),$$

где $\omega(F; t)$ — модуль непрерывности функции $F(x)$. Производная $F'(x)$ существует и ограничена всюду, за исключением точек, где $F(x) = 0$. Поэтому функция $F(x)$ принадлежит классу KH^1, где K — постоянная, которую можно выбрать независящей ни от t, ни от β, ни от m. Поэтому

$$\left| \int\limits_0^{2\pi} F(x)dx - \sum_{k=0}^{m-1} F(x_k)\frac{2\pi}{m} \right| < (2\pi)^2 \frac{K}{m}.$$

Таким образом,

$$J_m = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos((t - \nu(\frac{t}{m} + x)) + \frac{\beta\pi}{2}) Z_q^{2r+2}\left(\frac{t}{m} + x\right) \right| dx dt + O(\frac{1}{m}).$$

Переходя к новым переменным, и учитывая 2π-периодичность подинтегральной функции, имеем

$$J_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu}\cos(t-\nu x)Z_q^{2r+2}(x)\right|dtdx + O\Big(\frac{1}{m}\Big).$$

Применяя соотношения (12) и (13) получаем при каждом фиксированном $x \in (0;2\pi)$

$$\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu}\cos(t-\nu x) = Z_q^{-(r+1)}(x)\sin(t+(r+1)\xi(x)).$$

Поэтому функция $\sum\limits_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu}\cos(t-\nu x)$, как функция переменной t, при фиксированном $x \in (0;2\pi)$ обращается в нуль с переменой знака в точках вида $t_0 + k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$, где $t_0 = (r+1)\xi(x)$. Поэтому, принимая во внимание, что

$$\cos t_0 = -\sum_{\nu=1}^{r+1}\frac{(-q)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}\sin x}{Z_q^{r+1}(x)}, \quad \sin t_0 = \sum_{\nu=0}^{r+1}\frac{(-q)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}\cos x}{Z_q^{r+1}(x)},$$

на основании (12) для всякого $x \in (0;2\pi)$ находим

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{r+1}(-q)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}\cos(t-\nu x)\right|dt = \Bigg|\int\limits_{t_0}^{t_0+\pi}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-q)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}\cos(t-\nu x)dt -$$

$$-\int\limits_{t_0+\pi}^{t_0+2\pi}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-q)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}\cos(t-\nu x)dt\Bigg| = 4\left|\sum_{\nu=0}^{r+1}(-q)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}\sin(t_0-\nu x)\right| =$$

$$= 4\left[\left(\sum_{\nu=0}^{r+1}\frac{(-q)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}}{Z_q^{r+1}(x)}\cos\nu x\right)^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{r+1}\frac{(-q)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}}{Z_q^{r+1}(x)}\sin\nu x\right)^2\right] = 4Z_q^{r+1}(x).$$

Следовательно,

$$J_m = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi}Z_q^{r+1}(x)dx + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Так как для $r \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{\left(\sqrt{1-2q\cos t+q^2}\right)^{r+1}} = \begin{cases} O(1)\frac{1}{(1-q)^{r+1}}, & r \geq 2; \\ O(1)\frac{1}{(1-q)}, & r = 1, \end{cases} \tag{19}$$

то для $m = n - \sum\limits_{j\in\alpha}p_j + r$ и $\alpha \subset \overline{r}, \alpha \neq \overline{r}$ имеем

$$q^{n-\Sigma_{\overline{p}}^{\alpha}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n-\Sigma_{\overline{p}}^{\alpha}+r}^{q,\beta}(t)|dt = O(1)\left(\frac{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}^{\alpha}}}{(1-q)^{r+1}} + \frac{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}^{\alpha}}}{n-\sum\limits_{j\in\alpha}p_j}\right).$$

Имея в виду соотношение (17), получаем

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V^{(r)}_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-\Sigma_{\bar p}+r}}{\pi^2\prod_{i=1}^r p_i}\int\limits_0^\pi Z_q^{r+1}(x)dx + \frac{O(1)q^{n-\Sigma_{\bar p}}}{\prod_{i=1}^r p_i}\left(\frac{(n-\Sigma_{\bar p})^{-1}}{(1-q)^{r+2}} + \frac{\sum_{j=1}^r q^{p_j}}{(1-q)^{r+1}}\right).$$

Теорема доказана. □

В случае нечетного r существует возможность вычислить интеграл в главном члене равенства (11) при помощи следующего утверждения.

Теорема 3. *Для всякого* $\nu \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_0^\pi \frac{dx}{(1+q^2-2q\cos x)^\nu} = \frac{\pi}{(1-q^2)^{2\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C^k_{\nu-1}\right)^2 q^{2k},$$

где $C^p_k = \frac{p!}{(p-k)!k!}$ *– биномиальные коэффициенты.*

Доказательство. Используя универсальную тригонометрическую подстановку и методы интегрирования рациональных функций, получаем

$$J_\nu := \int\limits_0^\pi \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^\nu} = \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q)^{2\nu-1}(1+q)}\sum_{k=0}^{\nu-1}C^k_{2k}C^{(\nu-k-1)}_{2(\nu-k-1)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2k}. \tag{20}$$

Далее применим соотношение (1.2.7.38) работы [11]

$$\sum_{k=0}^n C^k_{2k}C^{(n-k)}_{2(n-k)}x^{2k} = 2^{2n}x^nP_n\left(\frac{1}{2}(x+1/x)\right),$$

где $P_n(z)$ — полином Лежандра. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\nu-1}C^k_{2k}C^{(\nu-1-k)}_{2(\nu-1-k)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2k} = 2^{2(\nu-1)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\nu-1}P_{\nu-1}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right). \tag{21}$$

На основании соотношения (1.2.7.6) работы [11]

$$(1-y)^nP_n\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \sum_{k=0}^n (C^k_n)^2y^k.$$

Поэтому для $y=q^2$, $n=\nu-1$ имеем

$$P_{\nu-1}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right) = \frac{1}{(1-q^2)^{\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}(C^k_{\nu-1})^2q^{2k}.$$

Тогда, на основании соотношения (21)

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} C_{2k}^{k} C_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)} \left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2k} = \frac{2^{2(\nu-1)}}{(1+q)^{2(\nu-1)}} \sum_{k=0}^{\nu-1} \left(C_{\nu-1}^{k}\right)^2 q^{2k}.$$

Объединяя это соотношение с (20), получаем утверждение теоремы. □

Выводы

Асимптотическая формула (11) обеспечивает решение известной задачи Колмогорова–Никольского, если кроме $n-\Sigma_p \to \infty$ выполняются условия $p_i \to \infty$, $\forall i \in \overline{r}$. При $r = 1$ в качестве следствия из теорем 2 и 3 с учетом (19) получаем соотношение (2) для верхних граней отклонений обычных сумм Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ на классе $C_{\beta,\infty}^{q}$.

Если сравнивать обычные суммы Валле Пуссена и повторные при выполнении естественного условия $p = \sum\limits_{i=1}^{r} p_i$, то несложно заметить, что повторные суммы Валле Пуссена на классе $C_{\beta,\infty}^{q}$ обеспечивают более высокий (при $n \to \infty$) порядок приближения, чем обычные суммы Валле Пуссена. Имея в виду формулы (2) и (3) в случае $p_i = \frac{p}{r}$ видим, что порядок приближения повторными суммами $V_{n,\overline{p}}^{(r)}(f;x)$ составляет $\frac{q^{n-p+r}}{p^r}$, что в p^{r-1} раз лучше, чем порядок приближения соответствующими суммами Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$.

Цитированная литература

1. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова–Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. – 2001. – **192**, № 1. – С. 113–138.
2. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207–256.
3. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126–151.
4. *Рукасов В.И., Новиков О.А.*Приближение аналитических функций суммами Валле–Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения : Праці Ін-ту математики НАН України. – 1998. – **20**. – С. 228–241.
5. *Рукасов В.І., Чайченко С.О.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1653–1668.
6. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 1. – С. 97–107.
7. *Савчук В.В., Савчук М.В., Чайченко С.О.* Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена // Математичні студії. – 2010. – **34**, № 2. – С. 207–219.
8. *Ровенская О.Г., Новиков О.А.* Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 1. – С. 96–99.
9. *Ровенская О.Г.* Приближение периодических аналитических функций повторными суммами Валле Пуссена // Динамические системы. – 2009. – **27**. – С. 81–92.
10. *Новиков О.А., Ровенская О.Г.* Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена // Вестник Од. нац. ун-ту. Матем. и мех. – 2014. – **19**, вып. 3(23). – С. 14–26.
11. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. В 3 т. – СПб. : ФИЗМАТЛИТ, 2003.

References

1. *Stepanec, A.I.* (2001). Solution of the Kolmogorov–Nikol'skij problem for the Poisson integrals of continuous functions. Mat. Sb., 192, No. 1, pp. 113–138 (in Russian).
2. *Nikolskiy, S.M.* (1946). Approximation of the functions by trigonometric polynomials in the mean. Izv. Acad. Nauk. SSSR, Ser. Mat., 10, No. 3, pp. 207–256 (in Russian).
3. *Stechkin, S.B.* (1980). Estimation of the remainder of Fourier series for the differentiable functions. Tr. Mat. Inst. Acad. Nauk SSSR, 145, pp. 126–151 (in Russian).
4. *Rukasov, V.I., Novikov, O.A.* (1998). Approximation of analytic functions of de la Valle Poussin sums. Fourier series: theory and applications, 20, pp. 228–241 (in Russian).
5. *Rukasov, V.I., Chaichenko, S.O.* (2002). Approximation of the classes of analytical functions by de la Vallee-Poussin sums. Ukrainian Math. J., 54, No. 12, 1653–1668 (in Ukrainian).
6. *Serdyuk, A.S.* (2004). Approximation of Poisson integrals by de la Vallee Poussin sums. Ukrainian Math. J., 56, No. 1, pp. 97–107 (in Ukrainian).
7. *Savchuk, V.V., Savchuk, M.V., Chaichenko, S.O.* (2010). Approximation of analytic functions by de la Vallee Poussin sums. Mat. Stud., 34, No. 2, pp. 207–219 (in Ukrainian).
8. *Rovenska, O.O., Novikov, O.O.* (2010). Approximation of Poisson integrals by repeated de la Vallee Poussin sums. Nonlinear Oscillations, **13** (1), pp. 96–99 (in Russian).
9. *Rovenska, O.O.* (2009). Approximation of periodic analityc functions by repeated de la Vallee Poussin sums. Dynamic Systems, 27, pp. 81–92 (in Russian).
10. *Novikov, O.O., Rovenska, O.G.* (2014). Approximation of Poisson integrals by repeated de la Vallee Poussin sums. Visnyk Odessk. Nat. Univ.: Mat. i Mech., 19, No. 23, pp. 14–26 (in Russian).
11. *Prudnikov, A.P., Bruchkov, Yu. A., Marichev, O.I.* (2003). Integrals and series. St P.: FIZMATLIT (in Russian).

O. O. Novikov, O. G. Rovenska, Yu. V. Kozachenko

Approximation of Poisson integrals by linear methods.

The work concerns the questions of approximation of periodic differentiable functions of high smoothness by repeated arithmetic means of Fourier sums. One of the classifications of periodic functions nowadays is the classification suggested by A. Stepanets. The given classification allows to distinguish all classes of summable periodic functions from the functions where the Fourier series can deviate to infinitely differentiable functions including analytical and entire ones. When choosing the parameters properly, Stepanets classes exactly coincide with the well-known classes of Vail differentiable functions, Sobolev classes and classes of convolutions with integral kernels. Asymptotic equalities are found for upper bounds of deviations in the uniform metric of the repeated de la Vallee Poussin sums on the classes of periodic functions which are generated by multiplicators and shifts on argument provided that sequences which define the specified classes tend to zero with the rate of geometrical progression. In doing so these classes consist of analytic functions which can be regularly extended in the corresponding strip. Under certain conditions, these equalities guarantee the solvability of the Kolmogorov–Nikol'skiy problem for the repeated de la Vallee Poussin sums and classes of Poisson integrals. We indicate conditions under which the repeated sums guarantee a better order of approximation than ordinary de la Vallee Poussin sums.

Keywords: *Poisson integrals, de la Vallee Poussin sums, asymptotic equality.*

О. О. Новіков, О. Г. Ровенська, Ю. В. Козаченко

Наближення інтегралів Пуассона лінійними методами.

Робота стосується питань наближення періодичних диференційовних функцій високої гладкості повторними середніми арифметичними сум Фур'є. Однією з найбільш загальних класифікацій періодичних функцій є класифікація, запропонована О. I. Степанцем. Ця класифікація дозволяє єдиним чином класифікувати сумовні періодичні функції, починаючи від функцій, ряд Фур'є яких може навіть розходитися, та до нескінченно диференційовних функцій, включаючи аналітичні та цілі. За належного вибору параметрів, класи Степанця збігаються з відомими класами Вейля, класами Соболєва і класами згорток з фіксованими ядрами. Знайдено асимптотичні формули для точних верхніх меж відхилень у рівномірній метриці тригонометричних поліномів, що породжуються повторним застосуваням методу підсумування Валле Пуссена, на класах періодичних функцій, які задаються мультиплікаторами і зсувами за аргументом за умови, що послідовності, що визначають вказані класи, прямують до нуля зі швидкістю геометричної прогресії (в цьому випадку функції з цих класів дозволяють регулярне подовження у відповідну смугу комплексної площини).В деяких випадках ці рівності гарантують розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для повторних сум Валле Пуссена і класів інтегралів Пуассона. Вказано умови, за яких повторні суми Валле Пуссена забезпечують кращий порядок наближення, ніж звичайні суми Валле Пуссена.

Ключові слова: *інтеграли Пуассона, суми Валле Пуссена, асимптотична формула.*

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск
Донбасская государственная машиностроительная академия, Краматорск
sgpi.slav@dn.ua, rovenskaya.olga.math@gmail.com

Получено 19.05.17