УДК 531.38

©2017. **И. С. Дмитришин**

СИНХРОНИЗАЦИЯ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ ИДЕНТИЧНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Рассмотрена задача синхронизации угловых скоростей вращений двух и более идентичных твердых тел, соединенных по схеме ведущее–ведомое тело (master–slave). В предположении, что ведомое тело является управляемым, приведен закон управления по состоянию, который решает задачу синхронизации. В случае, если информация о движении ведущего тела неполная, изучается возможность использования в законе управления вместо компонент фазового вектора их оценок, полученных в результате решения задачи наблюдения. Для получения этих оценок в работе используется метод синтеза инвариантных соотношений в задачах наблюдения, который эффективен в случае систем дифференциальных уравнений, правые части которых являются линейными относительно неизмеряемых компонент фазового вектора. С помощью второго метода Ляпунова показано, что полученное таким образом модифицированное управление по выходу решает исходную задачу синхронизации.

MSC: 34A60, 34D20, 34N05.

Ключевые слова: *синхронизация, нелинейный наблюдатель, инвариантные соотношения, асимптотическая устойчивость.*

1. Введение.

Для многих приложений математической теории управления характерной является ситуация когда объектом управления является совокупность активных взаимосвязанных подсистем. К таким, в частности, относят задачу о согласованном движении космических, авиационных, наземных и других движущихся аппаратов. Поиск алгоритмов управления такими объектами по выходу является достаточно сложной задачей, для которой до сих пор нет эффективного общего решения.

В работе рассматривается механическая система, состоящая из двух твердых тел, одно из которых ведущее (master), а другое – ведомое (slave) [1]. Предполагается, что ведомое тело имеет управление, зависящее от собственного состояния и состояния ведущего тела. Предложено управление, решающее задачу синхронизации угловых скоростей тел, в виде обратной связи по состоянию этих систем. Так как многие практические приложения теории управления сталкиваются с задачами, в которых невозможно измерить все компоненты переменных состояния, актуальной является задача построения обратной связи по выходу. В работе рассмотрена такая ситуация, а именно, предполагается, что отсутствует информация об одной из компонент вектора угловой скорости ведущего тела. Отметим, что ранее была рассмотрена задача синхронизации угловых скоростей идентичных гиростатов в случае "потери" информации о двух компонентах вектора угловой скорости гиростата [2].

Используемое управление по выходу в нашем случае – это управление, получаемое из найденной ранее обратной связи заменой неизвестной компоненты состояния ведущей системы ее оценкой, найденной в результате решения задачи наблюдения. При этом возникает вопрос: будет ли такое “приближенное” управление решением исходной задачи? Подобные вопросы в теории стабилизации рассматривались, например, в работе [3], где сформулирован соответствующий принцип разделения.

Основной целью работы является построение нелинейного наблюдателя для неизвестной компоненты вектора угловой скорости ведущего тела и определение возможности использования управления по выходу для синхронизации угловых скоростей тел. Нелинейный наблюдатель построен с помощью метода инвариантных соотношений, который разработан в аналитической механике для поиска точных решений задач динамики твердого тела [4]. Схема синтеза вспомогательных инвариантных соотношений для построения нелинейного наблюдателя описана в [5]. С применением второго метода Ляпунова установлено, что использование в управлении вместо состояния системы ее оценки при одновременном решении задач наблюдения и синхронизации приводит к решению рассматриваемой задачи.

2. Задача синхронизации угловых скоростей идентичных твердых тел.

Рассмотрим два идентичных твердых тела, одно из которых является управляемым. В качестве уравнений их движения рассмотрим уравнения Эйлера, описывающие вращение твердого тела в системе координат, связанной с самим телом. Тогда для ведущего тела имеем:

$$A_1\dot\omega_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3,\ A_2\dot\omega_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1,\ A_3\dot\omega_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2, \qquad (1)$$

где A_1, A_2, A_3 – главные центральные моменты инерции, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела. Введем обозначения

$$a_1 = \frac{A_2 - A_3}{A_1},\ a_2 = \frac{A_3 - A_1}{A_2},\ a_3 = \frac{A_1 - A_2}{A_3}.$$

В этом случае, система (1) примет вид:

$$\dot\omega_1 = a_1\omega_2\omega_3,\ \dot\omega_2 = a_2\omega_3\omega_1,\ \dot\omega_3 = a_3\omega_1\omega_2. \qquad (2)$$

Рассмотрим ведомое тело, которое имеет такие же моменты инерции, поэтому описывается такими же уравнениями, но содержащими дополнительное управление $u = (u_1, u_2, u_3)$. Обозначив $p = (p_1, p_2, p_3)$ – вектор угловой скорости ведомого тела, получаем

$$\dot p_1 = a_1p_2p_3 + u_1,\ \dot p_2 = a_2p_3p_1 + u_2,\ \dot p_3 = a_3p_1p_2 + u_3. \qquad (3)$$

Сформулируем задачу синхронизации.

Задача 1. Требуется найти закон управления $u = (u_1, u_2, u_3)$ таким образом, чтобы решение систем (2) и (3) асимптотически стремились друг к другу, т.е.:

$$\lim_{t\to\infty}(p_i(t) - \omega_i(t)) = 0,\ i = 1, 2, 3.$$

Естественно предположить, что при реальном движении угловые скорости тел ограничены.

Предположение 1. Далее будем считать, что $||\omega||, ||p|| \leq M$ для некоторого конечного M. При этом будем предполагать, что при любых построенных нами управлениях u_1, u_2, u_3 это предположение справедливо.

Введем обозначения для отклонений соответствующих компонент фазовых векторов каждого из тел: $e_1 = p_1 - \omega_1,\ e_2 = p_2 - \omega_2,\ e_3 = p_3 - \omega_3$. С учетом сделанных обозначений, продифференцировав разности $\dot{e_1} = \dot{p_1} - \dot{\omega_1},\ \dot{e_2} = \dot{p_2} - \dot{\omega_2},\ \dot{e_3} = \dot{p_3} - \dot{\omega_3}$, получаем уравнения для отклонений:

$$\begin{aligned}
\dot{e_1} &= a_1(p_2p_3 - \omega_2\omega_3) + u_1,\\
\dot{e_2} &= a_2(p_1p_3 - \omega_1\omega_3) + u_2,\\
\dot{e_3} &= a_3(p_1p_2 - \omega_1\omega_2) + u_3,
\end{aligned} \tag{4}$$

Если найдется управление $u(.)$ такое, что $||e|| \to 0$, при $t \to \infty$, то Задача 1 будет решена. В случае, когда все компоненты веторов угловой скорости ведущего и ведомого тел измеряются в процессе движения, таким управлением $u(.)$ может быть, в частности:

$$\begin{aligned}
u_1 &= a_1(\omega_2\omega_3 - p_2p_3) + k_1(\omega_1 - p_1),\\
u_2 &= a_2(\omega_1\omega_3 - p_1p_3) + k_2(\omega_2 - p_2),\\
u_3 &= a_3(\omega_1\omega_2 - p_1p_2) + k_3(\omega_3 - p_3),
\end{aligned} \tag{5}$$

где постоянные $k_i < 0,\ i = 1, 2, 3$.

Действительно, в этом случае, уравнения для отклонений принимают тривиальный вид

$$\dot{e_i}(t) = k_ie_i,\ i = 1, 2, 3,$$

откуда следует, что нулевое решение системы дифференциальных уравнений (4) является экспоненциально устойчивым.

3. Нелинейный наблюдатель ω_3.

Предположим, что одна из компонент вектора угловой скорости ведущего тела, например $\omega_3(t)$, недоступна непосредственному измерению т.е. известными величинами, которые могут быть аргументами управления (5), являются: ω_1, ω_2, p_1, p_2, p_3, e_1, e_2. Как уже отмечалось, основная цель работы состоит в проверке возможности использования вместо ω_3 его оценки $\hat{\omega}_3$, полученной в результате решения следующей задачи наблюдения.

Задача 2. Требуется найти асимптотически точные оценки $\hat{\omega}_3(t)$ компоненты угловой скорости ω_3 по информации о $\omega_1(t),\ \omega_2(t)$.

В соответствии с [5], для решения задачи наблюдения воспользуемся методом синтеза дополнительных инвариантных соотношений, выражающих неизвестные через известные величины. А именно: представим наше неизвестное в виде суммы двух неопределенных величин:

$$\omega_3(t) = \Phi(\omega_1, \omega_2) + \xi(t). \tag{6}$$

Равенство (6) определяет некоторую поверхность в пространстве $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$, поэтому, в общем случае, имеем

$$\omega_3(t) = \Phi(\omega_1, \omega_2) + \xi(t) + \varepsilon, \tag{7}$$

где ε – характеризует отклонение от этой поверхности. Запишем дифференциальное уравнение для такого отклонения:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\omega}_3 - \Phi_{\omega_1}\dot{\omega}_1 - \Phi_{\omega_2}\dot{\omega}_2 - \dot{\xi}(t). \tag{8}$$

Тогда равенство (6) может иметь место для таких функций Φ, ξ, для которых дифференциальное уравнение (8) имеет тривиальное решение $\varepsilon \equiv 0$. С учетом (2) и (7), дифференциальное уравнение (8) принимает вид:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \dot{\omega}_3 - \Phi_{\omega_1}\dot{\omega}_1 - \Phi_{\omega_2}\dot{\omega}_2 - \dot{\xi}(t) = a_3\omega_1\omega_2 - \Phi_{\omega_1}a_1\omega_2\omega_3 - \Phi_{\omega_2}a_2\omega_1\omega_3 - \dot{\xi}(t) = \\ &= a_3\omega_1\omega_2 - \left(\Phi_{\omega_1}a_1\omega_2 + \Phi_{\omega_2}a_2\omega_1\right)\left(\Phi(\omega_1,\omega_2) + \xi(t) + \varepsilon\right) - \dot{\xi}(t).\end{aligned}$$

Для того, чтобы уравнение (8) стало однородным, т.е. допускало нулевое решение, потребуем чтобы неопределенные пока функции Φ, ξ удовлетворяли следующим соотношениям:

$$\lambda = -(\Phi_{\omega_1}a_1\omega_2 + \Phi_{\omega_2}a_2\omega_1), \tag{9}$$

где λ – отрицательная постоянная, и,

$$\dot{\xi}(t) = a_3\omega_1\omega_2 - (\Phi_{\omega_1}a_1\omega_2 + \Phi_{\omega_2}a_2\omega_1)(\Phi + \xi). \tag{10}$$

В результате уравнение для отклонений принимает вид

$$\dot{\varepsilon}(t) = \lambda\varepsilon,$$

откуда следует, что при соответствующих $\Phi(\omega_1, \omega_2), \xi(t)$, неопределенная составляющая в соотношении (7), $\varepsilon(t)$ экспоненциально убывает с ростом t.

Рассмотрим полученные условия на имеющиеся свободные функции. Равенство (10) является обыкновенным дифференциальным уравнением для функции $\xi(t)$ и при выбранной тем или иным способом функции $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ его правая часть является известной функцией времени. Поэтому в формуле (6) качестве $\xi(t)$ может быть использовано любое частное решение задачи Коши для этого уравнения.

Условие (9) определяет для возможных функций $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ уравнение в частных производных первого порядка. Вид общего решения (9) зависит от знаков a_1, a_2. Далее будем полагать, что $A_3 \neq A_1, A_3 \neq A_2$, т.е. $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$. При этом возможны два случая: знаки параметров a_1, a_2 могут быть различными либо одинаковыми. Первый из них имеет место, когда A_3 является либо максимальным, либо минимальным моментом инерции твердого тела. Тогда общее решение (9) имеет вид

$$\Phi_1 = -\frac{\lambda}{\sqrt{a_1 a_2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a_1 a_2}\omega_1}{a_1 \omega_2}\right) + F(.). \tag{11}$$

Если же A_3 не является экстремальным моментом инерции, то общее решение задается выражением

$$\Phi_2 = -\frac{\lambda}{\sqrt{a_1 a_2}} ln(\omega_1 \sqrt{a_1 a_2} + a_1 \omega_2) + F(.). \tag{12}$$

В формулах (11), (12) $F(.)$ – произвольная дифференцируемая функция, имеющая следующий вид

$$F\left(\omega_2^2 - \frac{a_2}{a_1}\omega_1^2\right).$$

Таким образом определение функции $\Phi(\omega_1, \omega_2)$, позволяет получить асимптотическую оценку для переменной $\omega_3(t)$. Для этого достаточно выполнение условий по следующей схеме:

1) В семействе решений (11) или (12) выбираем функцию $F(.)$, например $F(.) = 0$, и тем самым, в зависимости от известного распределения масс в твердом теле, получаем конкретную функцию $\Phi(e_1, e_2, \omega_1, \omega_2)$.

2) Находим частное решение дифференциального уравнения (10).

3) По формуле (6) получаем искомую оценку $\hat{\omega}_3(t)$, которая отличается от $\omega_3(t)$ на величину $\varepsilon(t)$.

4. Синхронизация по выходу.

Как уже отмечалось выше, основной целью работы является определение возможности использования в найденном законе управления вместо неизвестной компоненты фазового вектора ω_3 его оценки $\hat{\omega}_3(t) = \omega_3(t) - \varepsilon(t)$. В этом случае управление (5) принимает вид:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= a_1(\omega_2(\omega_3 - \varepsilon) - p_2 p_3) + k_1(\omega_1 - p_1), \\ \hat{u}_2 &= a_2(\omega_1(\omega_3 - \varepsilon) - p_1 p_3) + k_2(\omega_2 - p_2), \\ \hat{u}_3 &= a_3(\omega_1 \omega_2 - p_1 p_2) + k_3((\omega_3 - \varepsilon) - p_3). \end{aligned} \tag{13}$$

В результате использования такого управления зависимость от времени отклонений траекторий систем (2),(3) и ошибки в решении задачи наблюдения $\varepsilon(t)$ будет удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= k_1 e_1 - a_1\omega_2\varepsilon, \\
\dot{e}_2 &= k_2 e_2 - a_2\omega_1\varepsilon, \\
\dot{e}_3 &= k_3 e_3 - k_3\varepsilon, \\
\dot{\varepsilon} &= \lambda\varepsilon.
\end{aligned} \tag{14}$$

В случае, если параметры $\lambda, k_i,\ i = 1,2,3$ могут быть подобраны так, что тривиальное решение системы (14) окажется асимптотически устойчивым, то соответствующее им управление (13) решит поставленную задачу синхронизации. Для определения условий на эти параметры воспользуемся теоремой:

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. *Если для системы дифференциальных уравнений вида* $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$*, существует положительно определенная функция Ляпунова* $V(t,x)$*, допускающая бесконечно малый высший предел и имеющая отрицательно определенную производную* $\dot{V}(t,x)$ *по времени в силу данной системы, то нулевое решение рассматриваемой системы асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

В качестве функции Ляпунова возьмем положительно определенную функцию

$$V = \frac{1}{2}\left(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \varepsilon^2\right). \tag{15}$$

Очевидно, что V непрерывна в нуле и имеет бесконечно малый предел в нуле. Покажем, что производная в силу системы (14) от положительно определенной функции V выбором постоянной $\varepsilon > 0$ может быть выбрана определено отрицательной. Действительно,

$$\dot{V} = \dot{e_1}e_1 + \dot{e_2}e_2 + \dot{e_3}e_3 + \dot{\varepsilon}\varepsilon, \tag{16}$$

где после подстановки из (11) получаем следующую оценку производной:

$$\dot{V} \le \left(k_1 + |\frac{a_1\omega_2}{2}|\right)e_1^2 + \left(k_2 + |\frac{a_2\omega_1}{2}|\right)e_2^2 + \frac{k_3}{2}e_3^2 + \left(\lambda + |\frac{a_1\omega_2}{2}| + |\frac{a_2\omega_1}{2}| - \frac{k_3}{2}\right)\varepsilon^2, \tag{17}$$

В силу сделанного предположения об ограниченности угловых скоростей тел, можно записать:

$$\dot{V} \le (k_1 + |a_1|M)\,e_1^2 + (k_2 + |a_2|M)\,e_2^2 + \frac{k_3}{2}e_3^2 + \left(\lambda + |a_1|M + |a_2|M - \frac{k_3}{2}\right)\varepsilon^2. \tag{18}$$

Утверждение Пусть на константы наложены следующие ограничения:

$$|k_1| > |a_1|M,\ |k_2| > |a_2|M,\ |\lambda| > |a_1|M + |a_2|M - \frac{k_3}{2}. \tag{19}$$

Тогда (15) является отрицательно определенной функцией Ляпунова. Тем самым, согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости, установлен факт стремления переменных $e_1(t), e_2(t), e_3(t), \varepsilon(t)$ к нулю.

Таким образом установлено, что управления

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= a_1(\omega_2\hat{\omega}_3 - p_2p_3) + k_1(\omega_1 - p_1), \\ \hat{u}_2 &= a_2(\omega_1\hat{\omega}_3 - p_1p_3) + k_2(\omega_2 - p_2), \\ \hat{u}_3 &= a_3(\omega_1\omega_2 - p_1p_2) + k_3(\hat{\omega}_3 - p_3), \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\hat{\omega}_3(t) = \Phi(\omega_1, \omega_2) + \xi(t),$$

а $\xi(t)$ – произвольное частное решение задачи Коши для уравнения (10),которое с учетом ограничений (19), приводит к решению исходной Задачи 1. Отметим, что при этом, с помощью частного решения дифференцциального уравнения (10), одновременно решается Задача 2.

Цитированная литература

1. *Усик Е.В.* Синтез алгоритмов управления на основе пассификации для каскадных систем с возмущениями // Автореферат диссертации. – 2015. – С. 2–18.
2. *Щербак В.Ф., Дмитренко И.С.* Определение угловой скорости гиростата по ее проекции // Механика твердого тела. — 2010. – Вып. 40.– С. 192–199.
3. *Freeman R.* Global internal stabilizability does not imply global external stabilizability for small sensor disturbances // IEEE Transactions on Automatic. Control. – 1995. – V. 40, № 12. – P.2119–2122.
4. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. — 1974. -– Вып. 6.– С. 15–24.
5. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29.– С. 69–76.
6. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Издательство иностранной литературы, 1954. – 216 с.

References

1. *Usik, E.V.* (2015). Synthesis of control algorithms based on passivation for cascade systems with disturbances. The author's abstract of dissertations, pp. 2–18 (in Russian).
2. *Shcherbak, V.F., Dmytrenko, I.S.* (2010). Determination of a gyrostat angular velocity on its projection. Mehanika tverdogo tela, is. 40, pp. 196–199 (in Russian).
3. *Freeman, R.* (1995). Global internal stabilizability does not imply global external stabilizability for small sensor disturbances. IEEE Transactions on Automatic. Control, 40, No. 12, pp. 2119–2122.
4. *Kharlamov, P.V.* (1974). On invariant relations of a system of differential equations, is. 6, pp. 15–24 (in Russian).
5. *Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F.* (2015). Synthesis of additional relations in inverse control problems. Trudy IPMM NAN Ukrainy, 29, pp. 69–76 (in Russian).
6. *Bellman, R.* (1954). The theory of stability of solutions of differential equations. M.: Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 216 p. (in Russian).

I. S. Dmytryshyn

The synchronization of the angular velocities of identical rigid bodies.

The search of algorithms for coordinating movement for a group of identical objects (space, aviation, ground and other moving machines) on output is a difficult task, for which there is still no found effective common solution. Consider a mechanical system consisting of two solid bodies, one of which is the master, and the other is the slave. It is assumed that the slave body has control, depending on its own state and the state of the leading body. We propose control in the form of feedback on the state of these systems. Since many practical applications of control theory are confronted with problems where it is impossible to measure all components of state variables, the problem of constructing feedback on the output is actual. In this paper, we construct a control obtained from the feedback found earlier, in which instead of the initial states of the system, their estimates obtained as a result of constructing the observer are used. The main purpose of the work is to find such an output control. The observer is a specially constructed dynamic system whose state asymptotically approaches the state of the initial system. A natural question arises: will such "approximate" control of the solution of the original problem? Similar questions in the theory of stabilization were considered early. The case of "loss" of information of one of the components of the angular velocity vector of the leading body is considered in this paper. We note that the problem of synchronization of the angular velocities of identical gyrostats in the case of "loss" of information on two components of the angular velocity vector of the gyrostat was considered. To obtain estimates of unknown phase vector components, a nonlinear observer was constructed using the method of invariant relations, which was developed in analytical mechanics to find exact solutions of the problems of rigid body dynamics. With the use of Lyapunov's second method, it is established that the use of control in the control instead of the state of the system, while solving the problems of observation and synchronization, leads to the solution of the problem under consideration.

Keywords: *synchronization, nonlinear observer, invariant relations, asymptotic stability.*

І. С. Дмитришин

Синхронізація кутових швидкостей ідентичних твердих тіл.

Розглянуто задачу синхронізації кутових швидкостей обертань двох і більше ідентичних твердих тіл, з'єднаних за схемою ведуче–ведене тіло (master–slave), яка залежить від всіх компонент фазового вектора. У разі, якщо інформація про рух одного з тіл неповна, вивчається можливість використання замість компонент фазового вектора їх оцінок, отриманих в результаті розв'язання задачі спостереження. Для отримання цих оцінок використовується метод синтезу інваріантних співвідношень в задачах спостереження, який ефективний у разі систем диференційних рівнянь, праві частини яких є лінійними щодо невимірних компонент фазового вектора. Основною метою роботи є пошук управління по виходу. За допомогою другого методу Ляпунова показано, що запропонована конструкція вирішує вихідну задачу синхронізації.

Ключові слова: *синхронізація, нелінійний спостерігач, інваріантні співвідношення, асимптотична стійкість.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
`dmitrishin.ira@gmail.com`

Получено 27.04.18