УДК 517.3/621.745.74

В. З. Тыднюк, *науч.сотр., e-mail: tvfly@ukr.net*
О. И. Шинский, *д-р техн.наук, зав. отделом, e-mail: aluprt@ukr.net*
В. П. Кравченко*, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., e-mail: sary942@ukr.net*
С. И. Клименко, *канд.техн. наук, ст. науч. сотр., e-mail: ukrdeplit15@ukr.net*
Физико-технологический институт металлов и сплавов НАН Украины, Киев

КОНЦЕПЦИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЛН И ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИИ НА ТЕПЛООБМЕН И ПРОЦЕССЫ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ В ОТЛИВКАХ

Получено волновое решение первой начально-краевой задачи для однородного гиперболического уравнения Каттанео–Лыкова, что позволяет более эффективно исследовать выбор оптимальных режимов влияния вибрации на охлаждение отливок с учетом конечной скорости распространения теплового потока.

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение теплопроводности, механизмы теплопередачи, температурные волны, фононная теплопередача, кристаллизация отливок, влияние вибрации на интенсивность теплоотвода, влияние вибрации на микроструктуру сплавов.*

Отримано хвильове рішення першої початково-крайової задачі для однорідного гіперболічного рівняння Каттанео–Ликова, що дозволяє більш ефективно досліджувати вибір оптимальних режимів впливу вібрації на охолодження виливків з урахуванням кінцевої швидкості поширення теплового потоку.

Ключові слова: *гіперболічне рівняння теплопровідності, механізми теплопередачі, температурні хвилі, фононна теплопередача, кристалізація виливків, вплив вібрації на інтенсивність тепловідводу, вплив вібрації на мікроструктуру сплавів.*

The wave solution of the first initial-boundary value problem for the homogeneous hyperbolic Kattaneo–Lykov equation is obtained, which makes it possible to study more effectively the choice of optimal modes of vibration influence on casting cooling taking into account the finite velocity of heat flux propagation.

Keywords: *hyperbolic equation of heat conductivity, heat transfer mechanisms, temperature waves, phonon heat transfer, crystallization of castings, influence of vibration on heat removal intensity, influence of vibration on the microstructure of alloys.*

Введение

В практических приложениях теории теплопереноса используются в разнообразных модификациях, как правило, лишь два типа уравнений в частных производных: классическое параболическое уравнение теплопроводности и гиперболическое уравнение теплопроводности. При этом численные значения коэффициентов рассматриваются либо как постоянные величины в некоторой ячейке пространственно-временных координат и температуры, либо как переменные (функции).

Традиционно распространение тепла в твердой, жидкой части отливки или в двухфазной зоне кристаллизации, так или иначе соотносится с параболическим уравнением теплопроводности и классическим законом Фурье [1]. Но такая теоретическая модель, заложенная и в экспериментальных исследованиях, предполагает парадокс бесконечной скорости распространения тепловых возмущений, ограничивает исследования множественных механизмов тепломассопереноса и не учитывает значительную роль фононной теплопередачи совместно с основной «решеточной» компонентой теплопереноса.

Одновременно в многочисленном ряде работ, затрагивающих вопрос о конечной скорости распространения теплоты, чаще всего используется теория Максвелла–Каттанео–Лыкова и обобщенный закон Фурье [2–5]. Тем не менее, область применения линейного гиперболического уравнения теплопроводности Каттанео – Лыкова [4], которое следует из обобщенного закона Фурье [3], ограничивалась лишь высокоинтенсивными тепловыми процессами, так как время релаксации τ_r вязкоупругих тепловых деформаций, определяемое на основании классических теоретических позиций, чрезвычайно малое, $\tau_r \approx 10^{-12}$ с [4].

Фактически время релаксации, как дополнительный параметр в гиперболическом уравнении теплопроводности, определялось из средней длины свободного пробега (или времени жизни) отдельного фонона. Такая интерпретация справедлива в пределах отдельной квантовой системы, однако, «физической точкой» в основных формулах и уравнениях теплопереноса следует считать объем, который содержит не менее двух квантовых систем. И тепловое фононное излучение такого объема будет уже не квантовым и дискретным, а непрерывным. К тому же, релаксация (диссипация) вязкоупругих тепловых деформаций зависит как от излучения, так и от рассеивания тепловых фононов, поэтому и определяется средним временем жизни отдельного фонона. Но энергия упругих и неупругих механических столкновений атомных единиц (атомов, ионов, молекул) в процессе теплопередачи существенно изменяется лишь при поглощении и переизлучении тепловой фононной компоненты.

Иными словами, в реальных тепловых процессах при тепловом движении атомных единиц постоянно происходит излучение фононов. Фононная волна обгоняет решеточную теплопередачу, поглощается и снова переизлучается, при этом расстояние между фронтом фононной компоненты точечного мгновенного источника и фронтом решеточного теплового возмущения увеличивается. Таким образом, в процессах релаксации фононного излучения следует учитывать не столько свободный пробег отдельного фонона, как тепловое акустическое макроизлучение от совокупности многих квантовых систем, и, собственно, релаксация фононной компоненты будет преимущественно определяться поглощением квантованной фононной волны максимальной длины λ_{max} и скоростью звука.

Поэтому параметр времени релаксации в гиперболическом уравнении теплопроводности в такой интерпретации определяется коэффициентами затухания для поперечной и продольной тепловой фононной волны, спектр которой ограничен снизу размерами кристаллитов (зерен) или кластеров в расплавах, и скоростью звука в среде [6].

Постановка задач для исследования

Линейное гиперболическое уравнение А. В. Лыкова определяется следующим уравнением [4]:

$$\tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \qquad (1)$$

где u– температура, ^{0}С или К; t – время, с; τ^2 – постоянная времени, или время релаксации, с; a^2 – коэффициент температуропроводности, м^2/с; $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Коэффициенты τ^2 и a^2 предполагаются постоянными в пределах определенных температурных интервалов. Интерпретация параметра τ изложена выше.

В одномерном варианте уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{\tau^2}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Уравнение (2) (и, соответственно, (1)) имеет гиперболический тип согласно общепринятой классификации [7] для уравнений с частными производными второго порядка. В общем случае такое уравнение с двумя независимыми переменными имеет вид:

$$a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0, \quad (3)$$

тогда для уравнения (2) форма записи будет следующей:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \tau^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Дискриминант уравнения с постоянными коэффициентами формулы (4) относительно старших производных равен:

$$D = b^2(x,t) - a(x,t)\cdot c(x,t) = a^2\tau^2 > 0. \quad (5)$$

Из соотношения (5) следует, что уравнения (1–2) относятся к гиперболическому типу во всей области определения температурного интервала, в пределах которого коэффициенты a^2 и τ^2 можно считать постоянными величинами. Так как в этом случае уравнение Каттанео–Лыкова – гиперболического типа и должно иметь волновые решения, то очевидно, что решения основных начально-краевых задач для уравнений (1–2) будут значительно отличаться от решений классического параболического уравнения теплопроводности, к тому же, такие решения содержат дополнительный параметр τ.

Расширение области применения гиперболического уравнения Каттанео–Лыкова на все температурные режимы позволяет рассматривать влияние вибраций на процессы кристаллизации и отвердевания отливок с учетом существования как температурных волн при решеточной (кластерной – в жидкой фазе) теплопередаче, так и тепловой фононной компоненты. Методы воздействия низкочастотной и высокочастотной вибрации на процессы кристаллизации в металлах и сплавах, а также на скорость теплоотвода от отливки к форме, используются давно, но рассматривались, в основном, как способы принудительного перемешивания расплава в незатвердевшей части отливки [8]. Обширная библиография работ и основные выводы по исследованиям влияния, а также технологическому применению вибрационных устройств и технологий в металлургии и литейном производстве приведены в [9, 10].

Действие вибрации на твердую, жидкую фазу и зону кристаллизации металлов и сплавов состоит из двух основных факторов. Это механическое действие упругих волн, которое сопровождается разрушением фронта кристаллизации, созданием дополнительных центров кристаллизации, влиянием на процессы кавитации, возникновением повышенных переохлаждений в областях периодического растяжения расплава и другими эффектами непосредственного действия вибрации.

Но во многих работах, преимущественно экспериментального направления, показана связь действия вибрации с теплофизическими параметрами кристаллизации и охлаждения отливок, в частности, со скоростью теплоотвода [11–16]. Одну из оценок такого направления исследований можно процитировать из [17]: «В работах [11–15] экспериментально подтверждено мнение о том, что вибрационное воздействие на расплав связано с теплофизическими условиями его затвердевания. При формировании кристаллических структур вибрационная энергия расходуется не только на разрушение ветвей дендритов и создание в системе дополнительных центров кристаллизации, но и на повышение интенсивности теплоотвода от расплава к стенкам изложницы. Это приводит к повышению темпа кристаллизации расплава и значительному (на 25–30 %) ускорению затвердевания слитка. Как видно из представленного материала, среди исследователей нет единого мнения и четкого математического описания процесса вибрационного воздействия на кристаллизующиеся металлы. Имеющиеся теоретические исследования и математические модели условно можно разбить на несколько групп».

Таким образом, разнообразие теоретических и экспериментальных работ свидетельствует о том, что достаточно эффективного и обоснованного выбора оптимальных частот для низкочастотной и высокочастотной вибрации пока не существует. Концепция температурных волн и фононной теплопередачи дает дополнительные возможности для исследований в этом направлении с использованием обобщенного закона Фурье и гиперболического уравнения теплопроводности. Она позволяет объяснить механизмы влияния вибрации непосредственно и на теплофизические параметры процессов кристаллизации и отвердевания отливок.

Но для построения эффективной физико-математической модели влияния вибрации на теплоперенос, соответствующих экспериментальных исследований и практических приложений следует знать основные характеристики и параметры как температурных волн, так и фононной компоненты теплопередачи: тип волны и аналитическое выражение, скорость распространения, присутствие или отсутствие дисперсии, характер затухания и т. д. Для этого необходим анализ общего решения для гиперболического уравнения теплопроводности (2) и волновой тип решения одной из основных начально-краевых задач. Такие решения позволяют с помощью известных методов математической физики дальнейшие обобщения на решения с произвольными условиями на границе, а также на двухмерный и пространственный варианты решений гиперболического уравнения теплопроводности.

Решение первой начально-краевой задачи для однородного гиперболического уравнения теплопроводности

Согласно вышеприведенной интерпретации, обобщенное время релаксации для продольной фононной тепловой волны будет определяться по следующей формуле [6] при этом порядок коэффициента τ^2 для металлов и их расплавов 10^{-5}–10^{-4} с:

$$\tau^2 = \frac{1}{\delta \cdot v};\ \tau^2 \approx 0{,}6 \cdot 10^{-4}\,\text{c}, \qquad (6)$$

где v – скорость звука для продольной фононной волны, м/с; δ – коэффициент затухания в пространстве по координатной оси, 1/м.

Сформулируем для гиперболического уравнения (2) на произвольном отрезке длины l первую краевую задачу при нулевых граничных условиях и заданных начальных условиях:

$$\frac{\tau^2}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<l,\ t>0;$$
$$u(x,0)=\phi(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\ 0<x<l; \quad (7)$$
$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t>0.$$

После процедуры разделения переменных $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$ получим два обыкновенных дифференциальных уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''(x)+p_nX(x)=0, X(x)\neq 0;$$
$$T''(t)+\frac{1}{\tau^2}T'(t)+\frac{a^2}{\tau^2}p_n\,T(t)=0, T(t)\neq 0. \quad (8)$$

Собственные значения и собственные функции для решений $X(x)$ известны и наиболее простые [7]. В одномерном случае они имеют вид:

$$p\notin\left\{p_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2;\ n=1,2,...\right\};\ X_n(x)=C_n\sin\frac{\pi\,n}{l}x, \quad (9)$$

где C_n – произвольная постоянная. Так как $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$, то постоянные C_n «поглощаются», то есть входят сомножителями для постоянных в частных решениях для второго уравнения в (8).

Общее решение [18] второго уравнения в (8) будет представлять собой сумму затухающих температурных колебаний при $\sqrt{p_n}=\frac{\pi n}{l}>\frac{1}{2\tau\,a}$, и экспоненциальных решений при $\frac{\pi n}{l}\leq\frac{1}{2\,\tau\,a}$. Если обозначить

$$K_l=\frac{l}{2\pi\tau a};K=\mathrm{int}\left(K_l\right)+1, \quad (10)$$

где $\mathrm{int}(x)$ – целая часть числа x, то общее решение для функции $T(t)$ будет иметь следующий вид:

$$T(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\tau^2}\cdot t}\sum_{k=1}^{K-1}\left(M_k e^{-\omega_k\cdot t}+N_k e^{\omega_k\cdot t}\right)+e^{-\frac{1}{2\tau^2}\cdot t}\sum_{n=K}\left(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t\right);$$
$$\omega_k=\frac{a}{\tau}\frac{\pi k}{l}\sqrt{\left(\frac{l}{2\pi\tau a\cdot k}\right)^2-1}=\frac{a}{\tau}\frac{\pi\,k}{l}\sqrt{\left(\frac{K_l}{k}\right)^2-1}, 1\leq k\leq K-1; \quad (11)$$
$$\omega_n=\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}\sqrt{1-\left(\frac{l}{2\pi\tau a\cdot n}\right)^2}=\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}\sqrt{1-\left(\frac{K_l}{n}\right)^2},\ n\geq K, K=\mathrm{int}\left(K_l\right)+1.$$

Решения $N_k e^{\left(-\frac{1}{2\tau^2}+\omega_k\right)\cdot t}$ в (11) имеют и физический смысл, так как

$-\frac{1}{2\tau^2}+\omega_k=-\frac{1}{2\tau^2}+\sqrt{\frac{1}{4\tau^4}-\frac{a^2}{\tau^2}\cdot\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2}<0$. Представление общего аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности как суммы волновых решений и параболических решений используется у многих авторов, например [19]. Однако, наличие параболических решений не соответствует гиперболическому типу оператора задачи (7).

Для более подробного исследования этого оператора временную составляющую $T(t)$ гиперболического поля температуры преобразуем с помощью известной замены переменных к более простому уравнению, без первой производной по времени. Для этого положим в системе уравнений для частных решений $T_n(t)$ в (8): $T_n(t)=\tilde{T}_n(t)\,e^{-\frac{1}{2\tau^2}t}$. Тогда получим следующие дифференциальные уравнения второго порядка относительно функций $\tilde{T}_n(t)$ в канонической форме:

$$\tilde{T}_n''(t)+\left[\frac{a^2}{\tau^2}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2-\frac{1}{4\tau^4}\right]\tilde{T}_n(t)=0. \qquad (12)$$

Разделение решений для уравнений (12) на экспоненциальные и режима колебаний происходит при том же значении $n=K$, что и в общем решении (11) для функций $T_n(t)$. Учитывая замену переменной, общее решение для $\tilde{T}(t)$ будет выражаться аналитической формулой:

$$\begin{aligned}
&\tilde{T}(t)=\sum_{n=1}^{K-1}\left(\tilde{M}_n e^{-\omega_n\cdot t}+\tilde{N}_n e^{\omega_n\cdot t}\right)+\sum_{n=K}^{\infty}\left(\tilde{A}_n\cos\omega_n t+\tilde{B}_n\sin\omega_n t\right);\\
&\omega_n=\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}\sqrt{\left(\frac{l}{2\pi\tau a\cdot n}\right)^2-1}=\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}\sqrt{\left(\frac{K_l}{n}\right)^2-1},\ 1\le n\le K-1;\\
&\omega_n=\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}\sqrt{1-\left(\frac{l}{2\pi\tau a\cdot n}\right)^2}=\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}\sqrt{1-\left(\frac{K_l}{n}\right)^2},\ n\ge K.
\end{aligned} \qquad (13)$$

При этом начальные условия для функции $\tilde{u}(x,t)$ будут следующими:

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{T}_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\Big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{2\tau^2}\cdot t}T_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\Big|_{t=0}=\phi(x);\\
&\frac{\partial\tilde{u}(x,0)}{\partial t}=\frac{1}{2\tau^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{2\tau^2}\cdot t}T_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\Big|_{t=0}+\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{2\tau^2}\cdot t}\frac{\partial T_n(t)}{\partial t}\sin\frac{\pi n}{l}x\Big|_{t=0}=\frac{1}{2\tau^2}\phi(x)+\psi(x);\ 0<x<l.
\end{aligned} \qquad (14)$$

Теперь запишем (12) следующим образом, как совокупность частных решений для уравнения с оператором:

$$L\left[\tilde{T}(t), g(t)\right] = \tilde{T}''(t) - \frac{1}{4\tau^4}\tilde{T}(\mathrm{t}) = -\frac{a^2}{\tau^2}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tilde{T}(t). \qquad (15)$$

Оператор уравнения (15) ((12)) представляет собой оператор Штурма–Лиувилля, который в общем виде определяется выражением:

$$L\left[\tilde{T}(t), g(t)\right] = \tilde{T}''(t) - g(t)\tilde{T}(t) = -\lambda_n \tilde{T}(t). \qquad (16)$$

Функцию $g(t)$ называют потенциалом оператора L. В рассматриваемом случае $g(t) = \dfrac{1}{4\tau^4} = \mathrm{const}$. Числа $\lambda_n = \dfrac{a^2}{\tau^2}\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$ являются собственными значениями, а функции $\tilde{T}_n(t)$ – собственными функциями оператора L задачи Штурма–Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций при произвольном потенциале $g(t)$ задачи Штурма–Лиувилля достаточно изучены [20–22]. Одно из основных свойств собственных функций оператора L: они должны быть ортогональными. Но экспоненциальные решения $e^{-q_n t}$ (или $e^{q_n t}$) при действительном показателе степени $q_n = \sqrt{\dfrac{1}{4\tau^4} - \dfrac{a^2}{\tau^2}\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2}$, $\quad \dfrac{1}{4\tau^4} > \dfrac{a^2}{\tau^2}\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)$, не являются попарно ортогональными на любом промежутке $t_T[0,2T]$ в смысле скалярного произведения, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Поэтому общее решение (13) не является корректным относительно задачи Штурма–Лиувилля.

Для перехода к оператору, у которого собственные значения и собственные функции удовлетворяют необходимым условиям задачи Штурма–Лиувилля, запишем (15) в эквивалентном виде неоднородного уравнения второго порядка:

$$\tilde{T}''(t) + \frac{a^2}{\tau^2}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tilde{T}(t) = \frac{1}{4\tau^4}\tilde{T}(t) = \frac{1}{4\tau^4}\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{K-1}\left(\tilde{M}_n e^{-\omega_n \cdot t} + \tilde{N}_n e^{\omega_n \cdot t}\right), 1 \le n < K;\\ \sum\limits_{n=K}^{\infty}\left(\tilde{\mathrm{F}}_n \cos\omega_n t + \tilde{G}_n \sin\omega_n t\right), n \ge K.\end{cases} \qquad (17)$$

Общее решение неоднородного уравнения второго порядка, как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, будет определяться суммой общего решения для однородного уравнения $\tilde{T}_0(t)$ с одним из частных решений $\tilde{T}_1(t)$ неоднородного. Общее решение для однородного уравнения относительно (17), в свою очередь, будет иметь вид:

$$\tilde{T}_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{\tilde{A}}_n \cos\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}t + \tilde{\tilde{B}}_n \sin\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}t\right). \qquad (18)$$

Сначала определим частное решение неоднородного уравнения для экспоненциальных функций. Выберем произвольное $n = \alpha$ при $1 \le n < K$, и положим $\tilde{M}_\alpha = \tilde{N}_\alpha = 4\tau^4$.

Далее разложим функцию $e^{-\omega\alpha \cdot t} + e^{\omega\alpha \cdot t}$ (удвоенный гиперболический косинус) в ряд Фурье. Разложение в ряд Фурье экспоненты с произвольным показателем ω_α на промежутке $-\pi<t<\pi$ имеет вид [23]:

$$e^{-\omega\alpha t} = \frac{2}{\pi} sh(\omega_\alpha \pi)\left[\frac{1}{2\omega_\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega_\alpha^2 + n^2}\left(\omega_\alpha \cos nt + n \sin nt\right)\right];$$

$$e^{\omega\alpha t} = \frac{2}{\pi} sh(\omega_\alpha \pi)\left[\frac{1}{2\omega_\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega_\alpha^2 + n^2}\left(\omega_\alpha \cos nt - n \sin nt\right)\right]. \qquad (19)$$

Здесь учитывается, что $sh(-\omega_\alpha \pi) = -sh(\omega_\alpha \pi)$. Если сложить равенства в (19) и перейти от промежутка $\left[-\pi, \pi\right]$ к разложению в ряд Фурье функции $e^{-\omega_\alpha \cdot t} + e^{\omega_\alpha \cdot t}$ на промежутке $[0, 2l \cdot \tau / a]$, то получим следующее общее решение $\tilde{T}_1^{(1)}(t)$ для неоднородного уравнения (17) при $1 \le n < K$:

$$\tilde{T}_1^{(1)}(t) = \tilde{T}_0(t) + \tilde{T}_1^{(-K)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{\tilde{A}}_n \cos\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}t + \tilde{\tilde{B}}_n \sin\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}t\right) +$$

$$+\left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{D}}_n \cos\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}t + \frac{\tilde{\tilde{D}}}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{\tilde{P}}_n{}' \cos\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}t + \tilde{\tilde{B}}_n \sin\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}t\right) + \frac{\tilde{\tilde{D}}}{2}. \qquad (20)$$

Постоянная $\tilde{\tilde{D}} / 2$ в (20) определяется из разложения в ряд Фурье функции $e^{-\omega_\alpha \cdot t} + e^{\omega_\alpha \cdot t}$ по косинусам на промежутке $[0, 2\, l \cdot \tau / a]$.

Частное решение неоднородного уравнения (17) для произвольного $n = \beta$ при $n \ge K$ определим следующим образом. Любое такое решение имеет вид суммы двух гармонических колебаний с одной и той же частотой ω_β, но разными фазами. Внешних и внутренних источников теплоты физическая система тонкого однородного стержня длины l с нулевыми условиями на границе не имеет. Поэтому правую часть неоднородного уравнения (17) при $n \ge K$ нельзя рассматривать как внешнюю возмущающую силу, но как одно из собственных колебаний.

Поэтому частоту ω_β при выбранном $n = \beta$ запишем в формульном виде:

$$\omega_\beta = \frac{a}{\tau}\frac{\pi\beta}{l}\sqrt{1 - \left(\frac{K_l}{\beta}\right)^2} = \frac{a}{\tau}\frac{\pi\beta}{l}\left(1 - N_\beta\right) = \frac{a}{\tau}\frac{\pi\beta}{l} - N_\beta \cdot \frac{a}{\tau}\frac{\pi\beta}{l} = \frac{a}{\tau}\frac{\pi\beta}{l} - \omega_\beta'.$$

Тогда, после преобразований для косинуса разности и синуса разности в (17) двух частот, $\frac{a}{\tau}\frac{\pi\beta}{l}$ и ω'_β:

$$\cos\left(\frac{a}{\tau}\frac{\pi\beta}{l}-\omega'_\beta\right)=\cos\omega'_\beta\cdot\cos\frac{a}{\tau}\frac{\pi\beta}{l}+\sin\omega'_\beta\cdot\sin\frac{a}{\tau}\frac{\pi\beta}{l};$$

$$\sin\left(\frac{a}{\tau}\frac{\pi\beta}{l}-\omega'_\beta\right)=\cos\omega'_\beta\cdot\sin\frac{a}{\tau}\frac{\pi\beta}{l}-\sin\omega'_\beta\cdot\cos\frac{a}{\tau}\frac{\pi\beta}{l};$$

$$\tilde{F}_\beta\cos\omega'_\beta t+\tilde{G}_\beta\sin\omega'_\beta t=\left(\tilde{F}_\beta\cos\omega'_\beta-\tilde{G}_\beta\sin\omega'_\beta\right)\cdot\cos\frac{a}{\tau}\frac{\pi\beta}{l}+ \tag{21}$$

$$+\left(\tilde{F}_\beta\sin\omega'_\beta+\tilde{G}_\beta\cos\omega'_\beta\right)\cdot\sin\frac{a}{\tau}\frac{\pi\beta}{l}.$$

И общее решение для неоднородного уравнения как сумму общего решения (18) и частного решения в (21) для частоты ω_β можно записать в виде:

$$\tilde{T}_1^{(2)}(t)=\tilde{T}_0(t)+\tilde{T}_1^{(+K)}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{\tilde{P}}_n\cos\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}t+\tilde{\tilde{Q}}_n\sin\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}t\right), n\geq K. \tag{22}$$

Суммируя решения (18), (20) и (22), получим общее решение неоднородного уравнения (17):

$$\tilde{T}(t)=\tilde{T}_0(t)+\tilde{T}_1^{(1)}(t)+\tilde{T}_1^{(2)}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{\tilde{P}}_n\cos\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}\mathrm{t}+\tilde{\tilde{Q}}_n\sin\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}t\right)+\frac{\tilde{\tilde{D}}}{2}. \tag{23}$$

Общее решение (23) удовлетворяет оператору (12) и, соответственно, после обратного перехода к исходным переменным функции температуры $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)=X(x)\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)=X(x)\cdot e^{-\frac{1}{2\tau^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{T}_n(t)$ – является общим решением для оператора (2) уравнения Каттанео–Лыкова. Это решение эквивалентно общему решению (13), но качественно отличается по аналитическому выражению, так как определяет существование температурных волн во всем диапазоне длин волн, в том числе и соизмеримых с размерами отливки.

Постоянные $\tilde{\tilde{P}}_n$ и $\tilde{\tilde{Q}}_n$ в (23) определяются из начальных условий (14), а также по разложению функций начальных условий $\phi(x)$ и $\Psi(x)$ в ряды Фурье [7]. При этом постоянная $\tilde{\tilde{D}}/2$ входит как слагаемое в один из коэффициентов $\tilde{\tilde{P}}_n$ при его определении с помощью разложения функции $\phi(x)$ по синусам. Опуская подробные выкладки, волновое решение краевой задачи (7) будет иметь вид:

$$u(x,t)=e^{-\frac{1}{2\tau^2}\cdot t}\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{\tilde{P}}_n\cos\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}\mathrm{t}+\tilde{\tilde{Q}}_n\sin\frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l}\mathrm{t})\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{24}$$

и удовлетворяет гиперболическому типу уравнения Каттанео–Лыкова (2).

Влияние вибрации на температурные волны

Решение (24) определяет для гиперболического поля температуры, кроме фононного спектра, наличие стоячих температурных волн во всем диапазоне, в которых волновой вектор k_n, длина волны λ_n, круговая частота ω_n, и фазовая скорость v_n будут определяться по формулах:

$$k_n = \frac{\pi n}{l};\ \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2l}{n};\ \omega_n = \frac{a}{\tau}\frac{\pi n}{l};\ v_n = \frac{\omega_n}{k_n} = \frac{a}{\tau}. \qquad (25)$$

Формулы (25) описывают параметры температурных волн решеточной теплопередачи. Интерпретация и определяющая формула (6) для коэффициента τ изложены выше. Фазовая скорость температурных волн решеточной теплопередачи в (25), определяемых температурным полем гиперболического типа (24), совпадает с формулой, предложенной П. Вернотт и А. В. Лыковым [4].

Концепция температурных волн объясняет влияние как низкочастотной, так и высокочастотной вибрации на скорость теплоотовода появлением эффекта параметрического резонанса между частотой вибрации f_r и частотами температурных волн, при этом применима формула: $f_r = \dfrac{2f_{\min}}{m}$, где f_r – оптимальные резонансные частоты (Гц), $f_{\min}$ – минимальная частота температурных волн, m – целое число. При резонансных частотах увеличивается амплитуда стоячих температурных волн и, соответственно, скорость теплоотвода. При этом улучшается и микроструктура отливки.

При действии упругой волны вибрации на жидкий расплав давление одинаково передается по всех координатных осях. Если частоту $f_{\min}$ заменить соотношением $f_{\min} = v_u/\lambda_{\max}$, где v_u – скорость температурных волн, а максимальная длина волны $\lambda_{\max}$будет определяться линейным размером отливки l (диаметром – для отливок цилиндрической формы), то резонансные частоты, учитывая (25), можно вычислить из соотношения:

$$f_r = \frac{a}{\tau}\frac{1}{l}\frac{1}{m}. \qquad (26)$$

Рассмотрим один из примеров применения формулы (26) для теоретического объяснения влияния низкочастотной вибрации на частотах, при которых возникает параметрический резонанс. В [24] при помощи регрессионного анализа экспериментальных данных выведены эмпирические зависимости доли столбчатых кристаллов, средней площади сечения зерна, среднего размера дендритной ячейки в структуре слитков меди диаметром 65 мм, полученных наполнительным литьем. При наложении вибрации с оптимальной частотой f = 18 Гц размер дендритной ячейки уменьшается в 5 раз, уменьшается и средняя площадь сечения зерна, кроме того, наблюдается выравнивание параметров структуры и улучшение механических свойств меди по сечению слитка. Полученные экспериментальные данные положены в основу разработки технологического регламента полунепрерывного литья меди и бронзы с применением вибрационной обработки расплава в процессе кристаллизации. Параметры вибрационной обработки меди следующие [24]: частота f = 18–19 Гц, амплитуда А = 1,4–1,6 мм.

Влияние амплитуды и частоты вибрации связано также с действием упругой волны на двухфазную зону кристаллизации, которая, в свою очередь, тоже состоит из двух зон: зоны полностью разупорядоченного расплава и кристаллоподобных микрогруппировок различных атомов с ближним порядком в их расположении – кластеров. Поэтому в сложном феномене влияния вибрации на процесс кристаллизации отливки оценим только по формуле (26) резонансные частоты для перегретого расплава меди в цилиндрической изложнице диаметром 65 мм.

По справочным данным температуропроводность меди при температуре 1000 K $a_{\mathrm{Cu}}^2 = 0{,}9 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{м}^2/\mathrm{с}$, среднее обобщенное время релаксации для продольной фононной тепловой волны определим на основании формулы (6) $\tau^2 \approx 0{,}6\cdot10^{-4}$ с. Тогда скорость температурных волн в расплаве меди будет равна $v_{\mathrm{Cu}} = a/\tau \approx 1{,}22$ м/с. Если в формуле (26) диаметр изложницы l = 65 мм = 0,065 м, то при m =1 одна из резонансных частот f_1 = 18,8 Гц, что совпадает с вышеприведенным экспериментальным исследованием относительно выбора оптимальных частот вибрации.

Выводы

Эффект параметрического резонанса может появляться и при частотах вибрации, когда длина температурной волны, зависимая от линейного размера l, определяется соотношением: $\lambda_k = 2l/k$, где k – целое число. Тогда формулу (26) можно заменить более точным соотношением: $f_r = \frac{a}{\tau}\frac{1}{l}\frac{k}{m}$.

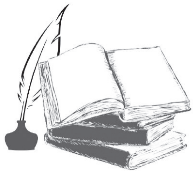
При высокочастотной вибрации, как следует из уточненной формулы для резонансных частот, можно ориентироваться и на длины температурных волн, которые сравнимы с размерами мелкозернистых зародышей в расплаве или модификаторов для сплавов. Для повышения дисперсности и мелкокристаллического состояния, даже без применения внешнего воздействия, часто применяют микролегирование и модифицирование структуры с помощью переходных и редкоземельных металлов и их химических соединений. При этом применяются методы получения лигатур, предусматривающих их быстрое охлаждение, когда размеры наночастиц модификатора ориентированы на размеры зародышей, обеспечивающих мелкозернистую структуру металлов и сплавов. Например, в [25] приведены экспериментальные исследования по применению интерметаллида Al_3Zr в алюминиевых сплавах с кубической решеткой, параметры которой близки к параметрам решетки твердого раствора алюминия, что обеспечивает измельчение литого зерна и большую зону недендритной кристаллизации.

При исследованиях влияния наложенной внешней вибрации на теплофизические характеристики и микроструктуру металлов и сплавов с точки зрения концепции температурных волн и гиперболического типа температурного поля следует учитывать также параметры и волновой характер распространения плотности теплового потока дополнительно к колебаниям температуры, которые имеют вид суммы ряда Фурье стоячих температурных волн.

Список литературы

1. *Трухов А. П.* Основы теории формирования отливки. – М.: МГТУ «МАМИ», 2010. – 246 с.
2. *Maxwell J. C*. On the dynamical theory of gases. – London: Philos. Trans. Soc., 1867, Vol. 157. – pp. 49–88.
3. *Carlo Cattaneo*. Sulla conduzione de calore. – Atti del Semine, Mat. Fis. Univ. Modena, 1948.
4. *Лыков А. В*. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1957. – 599 с.
5. *Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю*. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 296 с.
6. *Тыднюк В. З., Шинский О. И., Кравченко В. П., Клименко С. И*. Оценка теплового потока при кристаллизации отливок с учетом обобщенного закона Фурье и фононной теплопередачи // Процессы литья. – 2016. – № 4 (118). – С. 18–25.
7. *Тихонов А. Н., Самарский А. А*. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

8. *Баландин Г. Ф.* Формирование кристаллического строения отливок. – М.: Машиностроение, 1973. – 288 с.
9. *Ефимов В. А., Эльдарханов А. С*. Физические методы воздействия на процессы затвердевания сплавов. – М.: Металлургия, 1995. – 272 с.
10. *Эльдарханов А. С., Ефимов В. А., Нурадинов А. С*. Процессы формирования отливок и их моделирование. – М.: Машиностроение, 2001. – 208 с.
11. *Найдек В. Л., Эльдарханов А. С., Нурадинов А. С., Таранов Е. Д.* О механизме воздействия вибрации на кристаллизацию и структурообразование сплавов // Литейное производство. – 2000. – № 9. – С. 13–15.
12. *Гладков М. И., Балакин Ю. А., Гончаревич И. Ф.* Термодинамический анализ условий зарождения и роста кристаллов при виброобработке металла // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1989. – № 9. – С. 27–29.
13. *Иванцов А. А., Крушенко Г. Г*. О механизме влияния упругих колебаний на алюминиево-кремниевые сплавы // Литейное производство. – 2003. – № 2. – С. 2–4.
14. *Вишкарев А. Ф., Кряковский Ю. В., Панкратов О. С., Сафронов А. А., Чухлов В. И*. Низкочастотное вибровоздействие на кристаллизующийся расплав в модельном эксперименте // Известия ВУЗов. Черная металлургия. – 1986. – № 3. – С. 18–22.
15. *Бакалаева Н. А.* Влияние технологических факторов на качество сплава АКЮСу / Н. А. Бакалаева, В. М. Карпачев, В. И. Шмидт // Литейное производство. – 1990. – № 11. – С. 14–15.
16. *Куценко А. И., Селянин И. Ф., Хамитов Р. М., Морин С. В*. Влияние вибрации формы на тепловые процессы охлаждения отливки // Ползуновский вестник. – 2005. – № 2 (ч. 2). – С. 167–169.
17. *Морин С. В.* Комплексное исследование вибрационного воздействия на кристаллизацию и свойства отливок из алюминиевых сплавов // Библиотечный каталог российских и украинских диссертаций. – Новокузнецк, 2005. – 169 с.
18. Т*ыднюк В. З., Шинский О. И., Кравченко В. П.* Кристаллизация и затвердевание отливок в температурном поле гиперболического типа // Процессы литья. – 2015. – № 4 (112). – С. 9–21.
19. *Малая Ю. А*. Математическое моделирование процессов теплопроводности с учетом релаксации теплового потока. – Днепропетровск: Мин-во образования и науки Украины, Национальная металлургическая Академия Украины, 2015. – 183 с.
20. *Садовничий В. А*. Теория операторов. – М.: Изд. МГУ, 2004. – 384 с.
21. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М*. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
22. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. – М.: Наука, 1988. – 432 с.
23. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1966. – т. III. – 656 с.
24. *Голоднов А. И*. Влияние вибрации на формирование кристаллической структуры меди и медных сплавов. Автореферат. – Екатеринбург, 2010. – 24 с.
25. *Верховлюк А. М., Щерецкий А. А., Лахненко В. Л., Апухтин В. В., Назаренко А. В*. Перспективные модификаторы для сплавов на основе алюминия // Литье и металлургия. – 2013. – № 3 (72). – С. 68–71.



References

1. *Trukhov, A. P.* (2010) Osnovy teorii formirovaniya otlivki [*Basics of the theory of casting*]. M.: MGTU «MAMI», 246 p.
2. *Maxwell, J. C.* (1867) On the dynamical theory of gases. – London: Philos. Trans. Soc. Vol. 157, pp. 49–88.
3. *Cattaneo, Carlo* (1948) Sulla conduzione de calore. Atti del Semine, Mat. Fis. Univ. Modena.
4. *Lykov, A. V.* (1957) Teoriya teploprovodnosti [*Theory of heat conduction*]. M.: Vysshaya shkola, 599 p.
5. *Shashkov, A. G., Bubnov, V. A., Yanovskiy, S. Yu.* (2004) Volnovye yavleniya teploprovodnosti. Sistemno-strukturnyy podkhod *[Wave phenomena of thermal conductivity. System-structural approach*]. Moscow: Yeditorial URSS, 296 p.
6. *Tydnyuk, V. Z., Shinskiy, O. I., Kravchenko, V. P., Klimenko, S. I.* (2016) Otsenka teplovogo

potoka pri kristallizatsii otlivok s uchetom obobshchennogo zakona Fure i fononnoy teploperedachi [*Estimation of the heat flux during the crystallization of castings, taking into account the generalized Fourier law and phonon heat transfer*]. Protsessy litya, no. 4 (118), pp. 18–25.
7. *Tikhonov, A. N., Samarskiy, A. A*. (1977) Uravneniya matematicheskoy fiziki [*Equations of mathematical physics*]. Moscow: Nauka, 735 p.
8. *Balandin, G. F.* (1973) Formirovanie kristallicheskogo stroeniya otlivok [*Formation of the crystalline structure of castings*]. Moscow: Mashinostroenie, 288 p.
9. *Yefimov, V. A., Eldarkhanov, A. S*. (1995) Fizicheskie metody vozdeystviya na protsessy zatverdevaniya splavov [*Physical methods of influence on the solidification of alloys*]. Moscow: Metallurgiya, 272 p.
10. *Eldarkhanov, A. S., Yefimov, V. A., Nuradinov, A. S. (*2001) Protsessy formirovaniya otlivok i ikh modelirovanie [*The processes of casting formation and their modeling*]. Moscow: Mashinostroenie, 208 p.
11. *Naydek, V. L., Eldarkhanov, A. S., Nuradinov, A. S., Taranov, Ye. D.* (2000) O mekhanizme vozdeystviya vibratsii na kristallizatsiyu i strukturoobrazovanie splavov [On the mechanism of the effect of vibration on the crystallization and structurization of alloys]. Liteynoe proizvodstvo, no. 9, pp. 13–15.
12. *Gladkov, M. I., Balakin, Yu. A., Goncharevich, I. F.* (1989) Termodinamicheskiy analiz usloviy zarozhdeniya i rosta kristallov pri vibroobrabotke metalla [*Thermodynamic analysis of the conditions for the nucleation and growth of crystals during vibroprocessing of a metal*]. Izv. vuzov. Chernaya metallurgiya, no. 9, pp. 27–29.
13. *Ivantsov, A. A., Krushenko, G. G*. (2003) O mekhanizme vliyaniya uprugikh kolebaniy na alyuminievo-kremnievye splavy [*On the mechanism of the effect of elastic vibrations on aluminum-silicon alloys*]. Liteynoe proizvodstvo, no. 2, pp. 2–4.
14. *Vishkarev, A. F., Kryakovskiy, Yu. V., Pankratov, O. S., Safronov, A. A., Chukhlov, V. I.* (1986) Nizkochastotnoe vibrovozdeystvie na kristallizuyushchiysya rasplav v modelnom eksperimente [*Low-frequency vibration influence on a crystallizing melt in a model experiment]*. Izv. VUZov. Chernaya metallurgiya, no. 3, pp. 18–22.
15. *Bakalaeva, N. A., Karpachev, V. M., Shmidt, V. I.* (1990) Vliyanie tekhnologicheskikh faktorov na kachestvo splava AKYuSu [*The influence of technological factors on the quality of the AKYu alloy*]. Liteynoe proizvodstvo, no. 11, pp. 14–15.
16. *Kutsenko, A. I., Selyanin, I. F., Khamitov, R. M., Morin, S. V.* (2005) Vliyanie vibratsii formy na teplovye protsessy okhlazhdeniya otlivki [*Effect of vibration of the mold on the thermal processes of cooling the casting*]. Polzunovskiy vestnik, no. 2 (ch. 2), pp. 167 169.
17. *Morin, S. V.* (2005) Kompleksnoe issledovanie vibratsionnogo vozdeystviya na kristallizatsiyu i svoystva otlivok iz alyuminievykh splavov [*Complex investigation of the vibrational effect on the crystallization and properties of castings from aluminum alloys*]. Bibliotechnyy katalog rossiyskikh i ukrainskikh dissertatsiy. Novokuznetsk, 169 p.
18. *Tydnyuk, V. Z., Shinskiy, O. I., Kravchenko, V. P*. (2015) Kristallizatsiya i zatverdevanie otlivok v temperaturnom pole giperbolicheskogo tipa [*Crystallization and solidification of castings in a temperature field of hyperbolic type*]. Protsessy litya, no, 4 (112), pp. 9–21.
19. *Malaya, Yu. A.* (2015) Matematicheskoe modelirovanie protsessov teploprovodnosti s uchetom relaksatsii teplovogo potoka [*Mathematical modeling of thermal conductivity processes with allowance for the relaxation of heat flow*]. Dnepropetrovsk: Min-vo obrazovaniya i nauki Ukrainy, Natsionalnaya metallurgicheskaya Akademiya Ukrainy, 183 p.
20. *Sadovnichiy, V. A*. (2004) Teoriya operatorov [*The theory of operators*]. Moscow: Izd. MGU, 384 p.
21. *Akhiezer, N. I., Glazman, I. M*. (1966) Teoriya lineynykh operatorov v gilbertovom prostranstve [*The theory of linear operators in Hilbert space*]. Moscow: Nauka, 544 p.
22. *Levitan, B. M., Sargsyan, I. S.* (1988) Operatory Shturma–Liuvillya i Diraka [*Operators of Sturm-Liouville and Dirac*]. Moscow: Nauka, 432 p.
23. *Fikhtengolts, G. M*. (1966) Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [*Course of differential and integral calculus*]. Moscow: Nauka, т. III, 656 p.
24. *Golodnov, A. I*. (2010) Vliyanie vibratsii na formirovanie kristallicheskoy struktury medi i mednykh splavov [*The influence of vibration on the formation of the crystal structure of copper and copper alloys*]. Avtoreferat, 24 p.
25. *Verkhovlyuk, A. M., Shcheretskiy, A. A., Lakhnenko, V. L., Apukhtin, V. V., Nazarenko, A. V*. (2013) Perspektivnye modifikatory dlya splavov na osnove alyuminiya [*Perspective modifiers for aluminum-based alloys*]. Lite i metallurgiya, no. 3 (72), pp. 68–71.

Поступила 04.05.2017