

УДК 539.3

Л. В. Курпа, д-р техн. наук
А. А. Осетров

Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»
(E-mail: kurpa@kpi.kharkov.ua; andy8383@mail.ru)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИЗГИБА МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ И СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ

Проведен анализ существующих методов исследования напряженно-деформированного состояния многослойных оболочек при сдвиге, которые имеют сложную форму в плане. Сделан вывод про необходимость разработки эффективных универсальных методов для решения поставленной проблемы. Предложен численно-аналитический метод, который базируется на теории R-функций и вариационном методе Ритца. Особым отличием разработанного подхода есть использование сплайнов для аппроксимации неопределенных компонент в построенных структурах решения. Предложенный подход реализован в виде комплекса программ с применением аналитического пакета MAPLE. С помощью разработанного пакета программ решено задачи изгиба многослойных оболочек, которые имеют невыпуклую форму плана при разных граничных условиях. Результаты сравнивались с аналогичными результатами при использовании полиномиальной аппроксимации. Для оболочек с квадратным планом представлено сравнение полученных результатов с известными.

Проведено аналіз існуючих методів дослідження напружено-деформованого стану багатошарових оболонок при згинанні, які мають складну форму плану. Зроблено висновок, щодо необхідності розробки ефективних універсальних методів для розв'язання поставленої проблеми. Запропоновано чисельно-аналітичний метод, який базується на теорії R-функцій та варіаційному методі Рітца. Особливою відзнакою розробленого підходу є використання сплайнів для апроксимації невизначених компонент в побудованих структурах розв'язку. Запропонований підхід реалізовано у вигляді комплексу програм із застосуванням аналітичного пакета MAPLE. За допомогою розробленого пакету програм розв'язано задачі згину багатошарових оболонок, які мають неопуклу форму плану та різні види граничних умов. Результати порівняно з аналогічними результатами при використанні поліноміальної апроксимації. Для оболонок з квадратним планом надано порівняння одержаних результатів з відомими.

Введение

Многослойные оболочки широко используются во многих отраслях промышленности: самолетостроении, космической технике, гражданском строительстве и т. д. Поэтому исследование их статического и динамического поведения является актуальной задачей. Среди существующих методов расчета многослойных оболочек следует выделить два основных подхода: первый базируется на применении трехмерной теории упругости, а второй сводится к приведению трехмерной задачи к двухмерной с последующим ее решением. Использование первого подхода сопряжено с большими вычислительными трудностями. Поэтому количество исследований на его основе достаточно ограничено [1–5].

Более распространенным является второй подход, позволяющий свести трехмерную задачу к двухмерной посредством введения гипотез относительно процесса деформирования оболочки. Одни из наиболее жестких гипотез предложены в работах А. Е. Н. Love [6] и Г. Р. Кирхгоффа. Суть их состоит в предположении о том, что элемент, перпендикулярный

срединной поверхности до деформации остается перпендикулярным и после нее, сохраняя свою длину. Теорию, основанную на гипотезах Киргофа–Лява, в современной литературе принято называть классической, ее развитие отражено в работах Х. М. Муштари [7], Л. Г. Доннела [8], В. З. Власова [9], С. А. Амбарцумяна [10] и др. Однако результаты, полученные в рамках классической теории, являются практически приемлемыми для весьма тонких оболочек. Как показано в работах многих исследователей [11–15], в случае многослойных оболочек средней толщины необходимо учитывать сдвиговые деформации, а следовательно, использовать уточненные теории.

Анализ литературы, посвященной исследованию многослойных пологих оболочек в рамках как классической теории, так и уточненных [13–16], позволяет сделать следующее заключение. В общем случае расчет НДС пологих оболочек может быть выполнен только с помощью приближенных методов. Поэтому вопрос достоверности полученного решения всегда будет стоять на повестке дня. В этой ситуации критерием достоверности полученных результатов может быть их совпадение при использовании различных универсальных приближенных методов. Наиболее используемым универсальным методом является метод конечных элементов (МКЭ). Для задач теории пластин и оболочек альтернативным к нему, с нашей точки зрения, является метод R-функций (RFM). Этот метод зарекомендовал себя достаточно хорошо как для линейных задач [17], так и нелинейных [18, 19]. Однако одним из недостатков RFM является то, что при его реализации возникают плотно заполненные матрицы алгебраических систем уравнений, к которым, в конечном счете, сводится решение задачи. С повышением порядка этих систем матрицы становятся плохо обусловленными, и точность полученных результатов становится сомнительной. Для многослойных пологих оболочек порядок систем не может быть низким в силу того, что уравнения равновесия или движения содержат не менее трех (классическая теория) и пяти (уточненные теории) неизвестных функций. Если при этом рассматривается сложная геометрия области или сложные граничные условия, что вызывает необходимость увеличивать количество координатных функций, то, как правило, приходится работать с системами высоких порядков. Чтобы избежать этой проблемы, необходимо использовать финитные функции для аппроксимации неопределенных компонент задачи.

В данной работе метод R-функций применен для расчета многослойных пологих оболочек в рамках уточненной теории 1-го порядка. Отличительной особенностью работы является то, что метод R-функций используется в сочетании со сплайн-аппроксимацией неопределенных компонент, что существенно повышает точность результатов.

Благодаря тому что подход базируется на использовании теории R-функций [20] и вариационных методах, удается построить алгоритмы, позволяющие рассматривать широкий спектр задач изгиба и колебаний пологих оболочек, опирающихся на план сложной формы и имеющих различные способы закрепления.

1. Математическая постановка

Рассматривается многослойная полая оболочка постоянной толщины h , собранная из произвольного числа однородных ортотропных слоев постоянной толщины. Предполагается, что проскальзывание между слоями отсутствует. Расчет на изгиб такой оболочки будем выполнять в рамках уточненной теории первого порядка, учитывающей сдвиговые деформации. В соответствии с этой теорией прямолинейный отрезок, нормальный к координатной поверхности, остается прямым и после деформации, сохраняя свою длину, но может изменять угол наклона к координатной поверхности [21]. Уравнения равновесия оболочки под действием только поперечной нагрузки интенсивностью $q(x, y)$ представляются в виде [22]

$$\begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + k_x N_1 + k_y N_2 = q(x, y); \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} = Q_1; \\ \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x} = Q_2, \end{cases} \quad (1)$$

где система (1) дополняется граничными условиями, вид которых зависит от способа закрепления оболочки. Внутренние усилия и моменты в рамках рассматриваемой теории определяются следующими соотношениями[22]:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} & K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & K_{16} & K_{26} & K_{66} \\ K_{11} & K_{12} & K_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Поперечные усилия определяются как

$$Q_1 = k_4^2 C_{55} \beta_1 + k_5^2 C_{45} \beta_2; Q_2 = k_4^2 C_{45} \beta_1 + k_5^2 C_{44} \beta_2, \quad (3)$$

где k_4^2 и k_5^2 – коэффициенты влияния сдвиговых деформаций.

Деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ и углы поворота нормали β_1, β_2 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_x w; & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + k_y w; & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \beta_1 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1; & \beta_2 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где u, v и w – перемещения срединной поверхности, а ψ_1, ψ_2 – углы поворота нормали к срединной поверхности. Константами k_x, k_y представлены кривизны срединной поверхности оболочки. Коэффициенты C_{ij}, K_{ij}, D_{ij} определяются с помощью жесткостных характеристик слоев B_{ij}^l [22]

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \sum_{l=1}^N \int_{h_{l-1}}^{h_l} B_{ij}^l dz; & (i, j) &= \{1, 2, 6, 4, 5\}; \\ K_{ij} &= \sum_{l=1}^N \int_{h_{l-1}}^{h_l} B_{ij}^l z dz; & D_{ij} &= \sum_{l=1}^N \int_{h_{l-1}}^{h_l} B_{ij}^l z^2 dz; & (i, j) &= \{1, 2, 6\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где B_{ij}^l – коэффициенты жесткости l -го слоя, m – количество слоев оболочки; $h_l = \left\{ -\frac{h}{2}, h_1, \dots, h_{m-1}, \frac{h}{2} \right\}$ – координаты границ между слоями по толщине оболочки, относительно срединной поверхности.

2. Метод решения

Вариационная постановка задачи изгиба полой оболочкой сводится к нахождению минимума следующего функционала:

$$J = V - A, \tag{6}$$

где V – потенциальная энергия деформации полой оболочки, которая имеет вид

$$V = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + N_{12} \varepsilon_{12} + M_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + M_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + M_{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \right) d\Omega + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (Q_1 \beta_1 + Q_2 \beta_2) d\Omega, \tag{7}$$

где A – работа внешних сил. При действии только поперечных нагрузок эта характеристика определяется как

$$A = \iint_{\Omega} q(x, y) w d\Omega,$$

где $q(x, y)$ – интенсивность внешней нагрузки, а Ω – область, совпадающая с формой оболочки в плане.

Для нахождения минимума функционала (6) воспользуемся методом Ритца совместно с RFM [20]. Для примера рассмотрим наиболее типичные граничные условия, соответствующие шарнирному опиранию и жесткому защемлению краев оболочки.

При шарнирном опирании контура на границе должны выполняться следующие условия

$$u_{\tau} = w = \psi_{\tau} = N_n = M_n = 0, \tag{8}$$

где N_n и M_n – продольное усилие и изгибающий момент, действующие по направлению нормали n к границе области, а u_{τ} и ψ_{τ} – перемещение и угол поворота нормали по направлению касательной τ к границе области. Выражения для u_{τ} и ψ_{τ} представлены ниже

$$u_{\tau} = v \cos \alpha - u \cos \beta,$$

$$\psi_{\tau} = \psi_2 \cos \alpha - \psi_1 \cos \beta.$$

Здесь $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ – направляющие косинусы нормали n .

При жесткой заделке искомые функции на границе должны удовлетворять условиям:

$$u = v = w = \psi_1 = \psi_2 = 0. \tag{9}$$

Можно показать, что для шарнирно опертой полой оболочки структуры решения, учитывающие геометрические граничные условия, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \omega}{\partial x} P_1 + \omega P_2; & v &= \frac{\partial \omega}{\partial y} P_1 + \omega P_3; & w &= \omega P_4; \\ \psi_1 &= \frac{\partial \omega}{\partial x} P_5 + \omega P_6; & \psi_2 &= \frac{\partial \omega}{\partial y} P_5 + \omega P_7, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\omega = 0$ – уравнение всей границы области, P_l , ($l = 1, 2, \dots, 7$) – неопределенные компоненты структуры решения. В случае, если оболочка ограничена ломаной линией, отрезки которой параллельны осям координат, структура решения может быть выбрана в более упрощенном виде

$$u = \omega_1 P_1; \quad v = \omega_2 P_2; \quad w = \omega P_3; \quad \psi_1 = \omega_1 P_4; \quad \psi_2 = \omega_2 P_5, \tag{11}$$

где $\omega_1 = 0$ – уравнение участка, параллельного оси Ox , а $\omega_2 = 0$ – уравнение участка, параллельного оси Oy .

При условии жесткой заделки границы структура решения имеет следующий вид:

$$u = \omega P_1; \quad v = \omega P_2; \quad w = \omega P_3; \quad \psi_1 = \omega P_4; \quad \psi_2 = \omega P_5, \quad (12)$$

где $\omega = 0$ – уравнение всей границы области.

Аппроксимацию неопределенных компонент P_l , ($l = 1, 2, \dots, 7$) будем выполнять с помощью сплайнов Шенберга 3-го порядка [23]. Пусть область, совпадающая с формой плана оболочки, погружена в окаймляющий прямоугольник $\Pi = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Разобьем заданный прямоугольник на элементарные с помощью равномерной сетки, с количеством разбиений N по оси Ox и M по оси Oy . Координаты узлов разбиения определяются соотношениями

$$x_i = a + i \frac{b-a}{N}, \quad y_j = c + j \frac{d-c}{M}.$$

Неопределенные компоненты P_l представим в виде

$$P_l = \sum_k a_k^{(l)} \Psi_k^{(l)}(x, y), \quad (13)$$

где

$$\Psi_k^{(l)}(x, y) = B_3\left(\frac{N(x-a)}{b-a} - i\right) B_3\left(\frac{M(y-c)}{d-c} - j\right). \quad (14)$$

Сплайн $B_3(x)$ определяется как

$$B_3(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -2 \\ 0.25(x+2)^3 & -2 < x \leq -1 \\ -0.75x^3 - 1.5x^2 + 1 & -1 < x \leq 0 \\ 0.75x^3 - 1.5x^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ -0.25x^3 + 1.5x^2 - 3x + 2 & 1 < x \leq 2 \\ 0 & 2 < x < +\infty \end{cases}. \quad (15)$$

Подставляя (13) в структурные формулы (10)–(12), получим системы базисных функций. Например, для жесткой заделки (12) такие системы базисных функций имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_k &= \omega \Psi_k^{(1)}(x, y); & v_k &= \omega \Psi_k^{(2)}(x, y); & w_k &= \omega \Psi_k^{(3)}(x, y); \\ \psi_{1k} &= \omega \Psi_k^{(4)}(x, y); & \psi_{2k} &= \omega \Psi_k^{(5)}(x, y). \end{aligned} \quad (16)$$

Неизвестные коэффициенты $a_k^{(l)}$ в разложении (13) определяются из условия минимума функционала (6) методом Ритца, который позволяет свести задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial a_k^{(l)}} = 0. \quad (17)$$

Численная реализация предложенного метода выполнена с использованием аналитических возможностей математического пакета Maple [24] и ряда разработанных программных модулей на языке программирования C++ [25], отвечающих за численные методы интегрирования и решения СЛАУ. Для численного интегрирования применен метод Гаусса [26] с возможностью варьирования количества узлов интегрирования от 9 до 49 узлов на каждом элементарном прямоугольнике сетки сплайнов. Для решения СЛАУ использован устойчивый итерационный алгоритм на базе биградиентного подхода (BiCGStab) [27].

3. Численные результаты

Для проверки достоверности разработанного подхода и соответствующего математического обеспечения рассмотрим вначале тестовую задачу.

Задача 1. Исследуем НДС двухслойной [0/90] полой сферической оболочки [28], опирающейся на квадратный план со стороной a под действием синусоидальной нагрузки $q = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a)$. Значения параметров жесткости слоев приняты следующими: $E_1 =$

$= 19,2 \cdot 10^6 \text{ psi}$; $E_2 = 1,56 \cdot 10^6 \text{ psi}$; $G_{12} = 0,82 \cdot 10^6 \text{ psi}$; $G_{23} = 0,523 \cdot 10^6 \text{ psi}$; $G_{13} = G_{12}$; $\nu_{12} = 0,24$.

Граничные условия для этой задачи соответствуют условиям шарнирного закрепления по всей границе области. Отношение толщины к характерному геометрическому размеру примем $h/a = 0,1$. Описанная задача была решена ранее в работах [28, 29] с использованием различных теорий: классической (CST), уточненной теории первого порядка (FSDT) и теории более высокого порядка (HSDT). В работе [28] для решения задачи изгиба оболочки применен асимптотический подход, а в работе [29] решение получено путем интегрирования дифференциальных уравнений с применением тригонометрических функций для удовлетворения граничным условиям.

В табл. 1 представлено сравнение полученных результатов с результатами других авторов для безразмерного центрального прогиба $\bar{w} = wh^3 E_2 10^2 / (q_0 a^4)$ при разных значениях кривизны сферической оболочки $k_x = a/R_x$; $k_y = a/R_y$.

Таблица 1. Безразмерный параметр \bar{w} прогиба оболочек для разных значений кривизны

k_x, k_y	Метод решения				
	Сетка сплайнов	RFM	HSDT[28]	FSDT[28]	CST[29]
0,2	4×4	1,4351	1,4150	1,4393	1,3185
	8×8	1,4342			
	16×16	1,4342			
	20×20	1,4342			
0,1	4×4	1,5561	1,5329	1,5566	1,4211
	8×8	1,5552			
	16×16	1,5551			
	20×20	1,5551			
0,02	4×4	1,5993	1,5748	1,5984	1,4574
	8×8	1,5984			
	16×16	1,5983			
	20×20	1,5983			
0	4×4	1,6011	1,5766	1,6001	1,4589
	8×8	1,6002			
	16×16	1,6001			
	20×20	1,6001			

Сходимость полученных результатов (табл.1) при различных сетках сплайнов и их сравнение с известными в литературе свидетельствуют о достоверности предложенного ме-

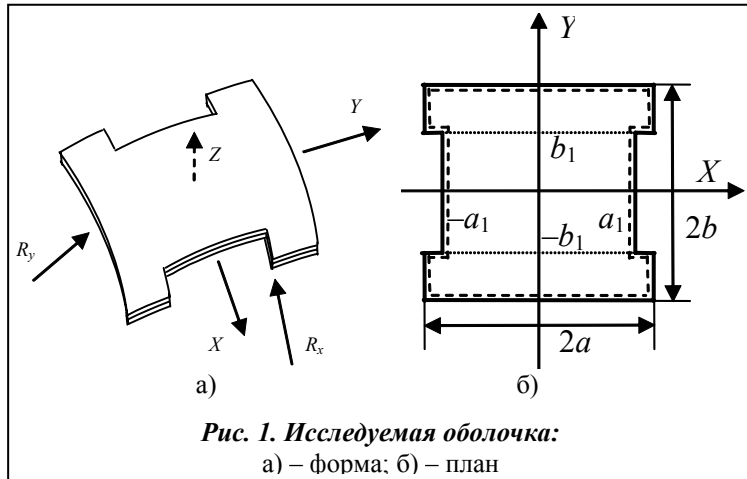


Рис. 1. Исследуемая оболочка:
а) – форма; б) – план

тода и разработанного программного обеспечения. Заметим, что при увеличении кривизны ($0 \leq k_x; k_x \leq 0,2$) значения безразмерного параметра центрального прогиба уменьшаются до 10%, что соответствует физическому смыслу задачи.

Задача 2. Исследуем НДС двухслойной полой оболочки двойкой кривизны со сложной формой плана (рис. 1) под действием поперечной нагрузки. Параметры жесткости слоев примем такими же, как и в предыдущей задаче. Внешнюю нагрузку рассмотрим двух видов: синусоидальную $q = q_0 \sin(\pi x/2a) \sin(\pi y/2b)$ и равномерно распределенную $q = q_0$.

Геометрические параметры оболочки примем следующими: $a/b = 1; k_x = 0,1; h/2a = 0,1; a_1/a = 0,6; b_1/b = 0,4$.

Структуру решения для шарнирно закрепленной оболочки выберем в виде (11), приняв

$$\omega = (-f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 (f_1 \wedge_0 f_2); \quad \omega_1 = ((-f_3 \vee_0 f_4) \vee_0 (f_5 \vee_0 f_6)) \wedge_0 f_1; \quad (18)$$

$$\omega_2 = ((-f_3 \vee_0 f_4) \vee_0 ((f_7 \vee_0 f_8) \vee_0 (f_9 \vee_0 f_{10}))) \wedge_0 f_2,$$

где $f_1 = (\Omega_1 = (b^2 - y^2)/2b \geq 0)$, $f_2 = (\Omega_2 = (a^2 - x^2)/2a \geq 0)$, $f_3 = (\Omega_3 = (b_1^2 - y^2)/2b_1 \geq 0)$,
 $f_4 = (\Omega_4 = (a_1^2 - x^2)/2a_1 \geq 0)$, $f_5 = (\Omega_5 = (b_1^2 - (x + a_1)^2 - y^2)/2b_1 \geq 0)$,
 $f_6 = (\Omega_6 = (b_1^2 - (x - a_1)^2 - y^2)/2b_1 \geq 0)$, $f_7 = (\Omega_7 = (r_0^2 - (x + x_0)^2 - (y - b_1)^2)/2x_0 \geq 0)$,
 $f_8 = (\Omega_8 = (r_0^2 - (x - x_0)^2 - (y - b_1)^2)/2x_0 \geq 0)$, $f_9 = (\Omega_9 = (r_0^2 - (x + x_0)^2 - (y + b_1)^2)/2x_0 \geq 0)$,
 $f_{10} = (\Omega_{10} = (r_0^2 - (x - x_0)^2 - (y + b_1)^2)/2x_0 \geq 0)$, причем $r_0 = \frac{1}{2}(a - a_1)$, $x_0 = \frac{1}{2}(a + a_1)$.

Таблица 2. Прогиб \bar{w} и изгибающие моменты \bar{M}_1, \bar{M}_2 шарнирно опертой по всему контуру ортогонально-армированной оболочки [0/90] при геометрических параметрах $a_1/a = 0,6; b_1/b = 0,4; k_x = 0,1$

Способ укладки слоев	k_x	Метод аппроксимации	$q = q_0 \cos(\pi x/a) \cos(\pi y/b)$			$q = q_0$		
			$\bar{w}(0,0)$	$\bar{M}_1(0,0)$	$\bar{M}_2(0,0)$	$\bar{w}(0,0)$	$\bar{M}_1(0,0)$	$\bar{M}_2(0,0)$
[0/90]	0,2	SP[20×20]	0,420	2,349	1,298	0,563	3,141	1,428
		SP[40×40]	0,432	2,412	1,327	0,581	3,233	1,470
		SP[60×60]	0,437	2,437	1,337	0,588	3,270	1,485
		POLY	0,383	2,089	1,100	0,512	2,808	1,178
	0,1	SP[20×20]	0,426	2,411	1,230	0,571	3,226	1,335
		SP[40×40]	0,438	2,476	1,257	0,589	3,321	1,374
		SP[60×60]	0,443	2,502	1,267	0,596	3,358	1,388
		POLY	0,389	2,214	1,091	0,520	2,976	1,165
	0,05	SP[20×20]	0,427	2,437	1,197	0,573	3,260	1,283
		SP[40×40]	0,440	2,502	1,218	0,591	3,356	1,321
		SP[60×60]	0,445	2,528	1,227	0,599	3,394	1,335
		POLY	0,390	2,266	1,082	0,521	3,044	1,153
	0	SP[20×20]	0,427	2,477	1,118	0,573	3,308	1,183
		SP[40×40]	0,439	2,538	1,141	0,590	3,398	1,216
		SP[60×60]	0,444	2,562	1,149	0,597	3,433	1,228
		POLY	0,391	2,344	0,998	0,523	3,148	1,043

В табл. 2, 3 представлены результаты для безразмерного центрального прогиба $\bar{w} = wh^3 E_2 10^2 / (q_0 (2a)^4)$ и изгибающих моментов $\bar{M}_1 = M_1 10^2; \bar{M}_2 = M_2 10^2$ с применением как сплайн-аппроксимации (SP), так и полиномиальной (POLY) для разных значений кривизны $k_y = 0,2; 0,1; 0,05; 0$ и двух видов внешней нагрузки. Значения указанных характери-

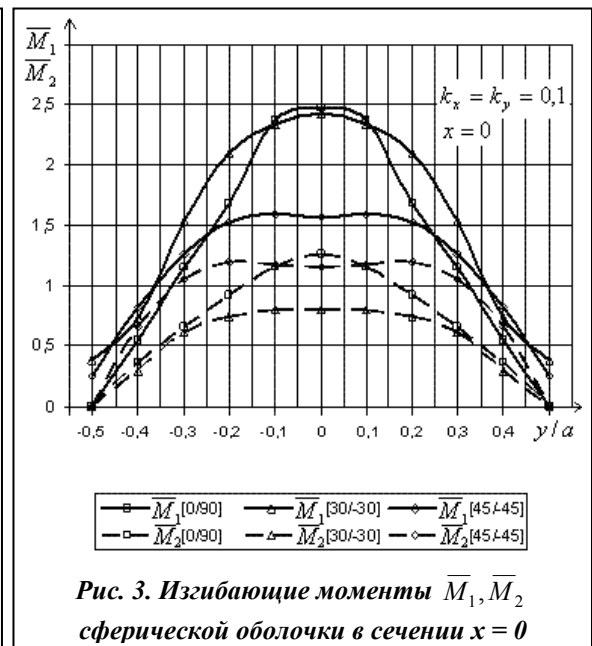
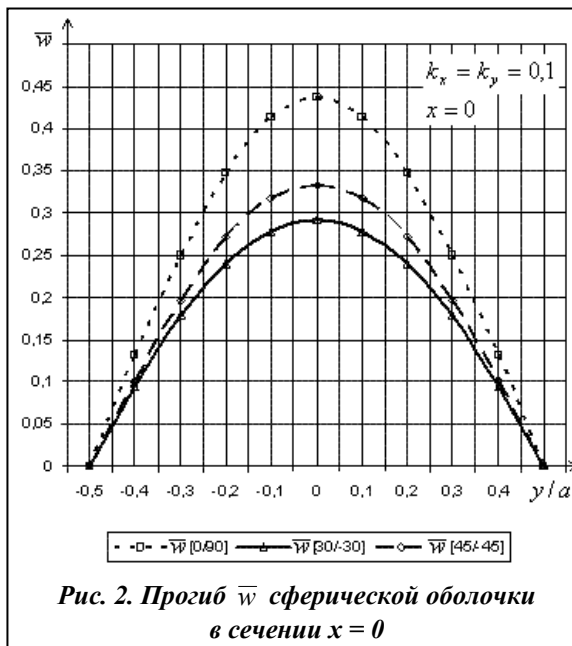
стик для ортогонально-армированных оболочек приведены в табл. 2, а для оболочек антисимметричного строения $[\theta/-\theta]$, где $\theta = 30^\circ, 45^\circ$, в табл. 3.

При использовании полиномиальной аппроксимации было сохранено 45 координатных функций в разложении каждой из неизвестных. Дальнейшее увеличение количества координатных функций приводило к неустойчивости вычислительного процесса.

Таблица 3. Прогиб \bar{w} и изгибающие моменты \bar{M}_1, \bar{M}_2 шарнирно опертой по всему контуру оболочки антисимметричного строения $[\theta/-\theta]$ при геометрических параметрах $a_1/a = 0,6; b_1/b = 0,4; k_x = 0,1$

Способ укладки слоев	k_y	Метод аппроксимации	$q = q_0 \cos(\pi x/a) \cos(\pi y/b)$			$q = q_0$			
			$\bar{w}(0,0)$	$\bar{M}_1(0,0)$	$\bar{M}_2(0,0)$	$\bar{w}(0,0)$	$\bar{M}_1(0,0)$	$\bar{M}_2(0,0)$	
[30/-30]	0,2	SP[20×20]	0,283	2,301	0,763	0,363	2,961	0,824	
		SP[40×40]	0,289	2,404	0,793	0,372	3,110	0,867	
		SP[60×60]	0,291	2,441	0,805	0,376	3,165	0,885	
		POLY	0,263	2,061	0,663	0,337	2,622	0,694	
	0,1	SP[20×20]	0,286	2,329	0,773	0,368	3,001	0,837	
		SP[40×40]	0,292	2,433	0,803	0,377	3,151	0,881	
		SP[60×60]	0,295	2,470	0,816	0,380	3,207	0,899	
		POLY	0,269	2,113	0,678	0,347	2,696	0,713	
	0,05	SP[20×20]	0,287	2,339	0,777	0,369	3,013	0,842	
		SP[40×40]	0,293	2,443	0,807	0,379	3,166	0,886	
		SP[60×60]	0,296	2,480	0,819	0,382	3,221	0,904	
		POLY	0,272	2,129	0,683	0,349	2,718	0,719	
	0	SP[20×20]	0,289	2,358	0,782	0,373	3,041	0,849	
		SP[40×40]	0,295	2,462	0,812	0,382	3,194	0,893	
		SP[60×60]	0,298	2,499	0,825	0,385	3,249	0,911	
		POLY	0,273	2,143	0,688	0,352	2,738	0,725	
	[45/-45]	0,2	SP[20×20]	0,320	1,499	1,092	0,417	1,875	1,233
			SP[40×40]	0,326	1,538	1,120	0,425	1,931	1,273
			SP[60×60]	0,328	1,551	1,129	0,429	1,949	1,286
			POLY	0,302	1,441	0,951	0,393	1,819	1,064
0,1		SP[20×20]	0,327	1,534	1,117	0,427	1,923	1,269	
		SP[40×40]	0,333	1,573	1,146	0,435	1,980	1,310	
		SP[60×60]	0,335	1,587	1,156	0,439	1,999	1,324	
		POLY	0,308	1,471	0,972	0,402	1,861	1,093	
0,05		SP[20×20]	0,329	1,545	1,126	0,430	1,938	1,281	
		SP[40×40]	0,335	1,585	1,155	0,438	1,996	1,322	
		SP[60×60]	0,337	1,598	1,165	0,442	2,015	1,336	
		POLY	0,310	1,482	0,980	0,405	1,867	1,102	
0		SP[20×20]	0,332	1,559	1,137	0,434	1,958	1,295	
		SP[40×40]	0,338	1,599	1,166	0,443	2,016	1,337	
		SP[60×60]	0,340	1,613	1,176	0,446	2,036	1,351	
		POLY	0,313	1,496	0,990	0,409	1,896	1,116	

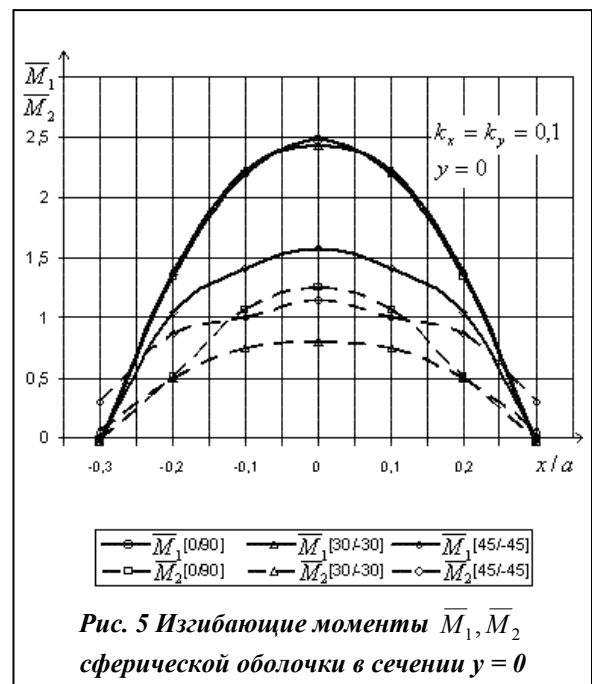
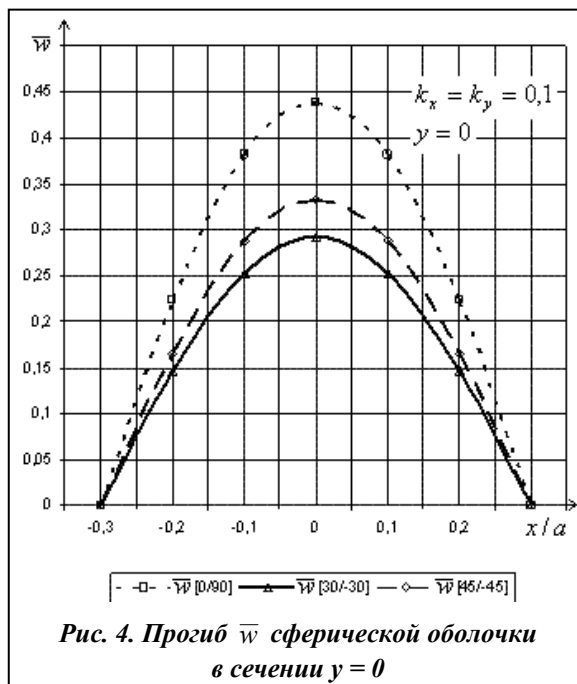
Как видно из таблиц, в случае сплайн-аппроксимации неопределенных компонент в структурных формулах сходимость результатов наблюдается во 2-м знаке, начиная с сетки сплайнов 40×40. Сравнение результатов, полученных с учетом разной аппроксимации, показывает, что при использовании полиномиальной аппроксимации результаты занижены в среднем на 10%, хотя качественное поведение одинаково в обоих случаях. Наибольшие зна-



чения центрального прогиба достигаются для упаковки слоев [0/90], а наименьшие – при [30/–30]. Графики прогибов \bar{w} и изгибающих моментов \bar{M}_1, \bar{M}_2 сферических, шарнирно опертых оболочек, при $k_x = k_y = 0,1$, для случая синусоидальной поперечной нагрузки представлены в сечениях $x = 0$ (рис. 2, 3) и $y = 0$ (рис. 4, 5).

Исследуем влияния глубины вреза на НДС сферической шарнирно опертой оболочки под действием синусоидальной поперечной нагрузки, при разных упаковках слоев. Диапазон изменения глубин вреза примем таким: $0,6 \leq a_1/a = b_1/b \leq 0,98$. Результаты исследования для сферической оболочки ($k_x = k_y = 0,1$) представлены в виде графиков для величин центрального прогиба \bar{w} (рис. 6) и изгибающих моментов \bar{M}_1, \bar{M}_2 (рис. 7).

Следует отметить, что величины прогиба \bar{w} шарнирно опертой оболочки для случая ортогонального армирования при стремлении глубины вреза к нулю, т. е. при $a_1/a = 0,98$ стремятся к ранее полученным для квадратной в плане шарнирно опертой оболочки



(табл. 1), что свидетельствует о достоверности полученных результатов. С увеличением глубины вреза значение прогибов существенно уменьшается. При этом величины прогибов при укладках слоев [30/-30] и [45/-45] достаточно близки между собой, в то время как для ортогонально-армированной оболочки они существенно выше.

Задача 3. Исследуем НДС этой же оболочки (рис. 1) при условии, что она жестко закреплена на всей границе области. Структуру решения для жестко закрепленной оболочки выберем в виде (12). Уравнение границы области $\omega = 0$ определяется по формуле (18).

В табл. 4, 5 представлены результаты расчетов прогиба $\bar{w} = wh^3 E_2 10^2 / (q_0 (2a)^4)$ и изгибающих моментов $\bar{M}_1 = M_1 10^2$, $\bar{M}_2 = M_2 10^2$ для разных значений кривизны

$k_y = 0,2; 0,1; 0,05; 0$, при фиксированном значении $k_x = 0,1$. Вычисления были проведены с использованием как сплайн-аппроксимации (SP), так и аппроксимации степенными полиномами (POLY) для равномерно-распределенной и синусоидальной поперечной нагрузок.

Заметим, что, начиная с сетки сплайнов 40×40 , наблюдается сходимость полученных результатов для центрального прогиба в 4-м знаке, а для изгибающих моментов – в 3-м. Наибольшее значение центрального прогиба достигается при упаковке слоев [45/-45], а наименьшее, как и в случае шарнирного опирания, при [30/-30].

Таблица 4. Прогиб \bar{w} и изгибающие моменты \bar{M}_1, \bar{M}_2 жестко закрепленной по всему контуру ортогонально-армированной оболочки [0/90] при параметрах вresa $a_1/a = 0,6; b_1/b = 0,4; k_x = 0,1$

Способ укладки слоев	k_y	Метод аппроксимации	$q = q_0 \cos(\pi x/a) \cos(\pi y/b)$			$q = q_0$		
			$\bar{w}(0,0)$	$\bar{M}_1(0,0)$	$\bar{M}_2(0,0)$	$\bar{w}(0,0)$	$\bar{M}_1(0,0)$	$\bar{M}_2(0,0)$
[0/90]	0,2	SP[20×20]	0,205	1,015	0,929	0,254	1,233	0,979
		SP[40×40]	0,205	1,016	0,929	0,255	1,235	0,970
		SP[60×60]	0,205	1,017	0,930	0,255	1,235	0,980
		POLY	0,206	0,837	0,765	0,257	1,031	0,765
	0,1	SP[20×20]	0,211	1,048	0,767	0,262	1,278	0,755
		SP[40×40]	0,211	1,049	0,768	0,263	1,280	0,756
		SP[60×60]	0,211	1,049	0,768	0,263	1,280	0,756
		POLY	0,211	1,048	0,788	0,264	1,298	0,794
	0,05	SP[20×20]	0,213	1,057	0,679	0,265	1,291	0,633
		SP[40×40]	0,213	1,058	0,679	0,265	1,293	0,633
		SP[60×60]	0,213	1,059	0,679	0,265	1,293	0,633
		POLY	0,213	1,151	0,794	0,266	1,427	0,802
	0	SP[20×20]	0,215	1,252	0,593	0,268	1,536	0,513
		SP[40×40]	0,215	1,253	0,593	0,268	1,538	0,513
		SP[60×60]	0,215	1,254	0,593	0,269	1,539	0,513
		POLY	0,215	1,265	0,614	0,269	1,572	0,550

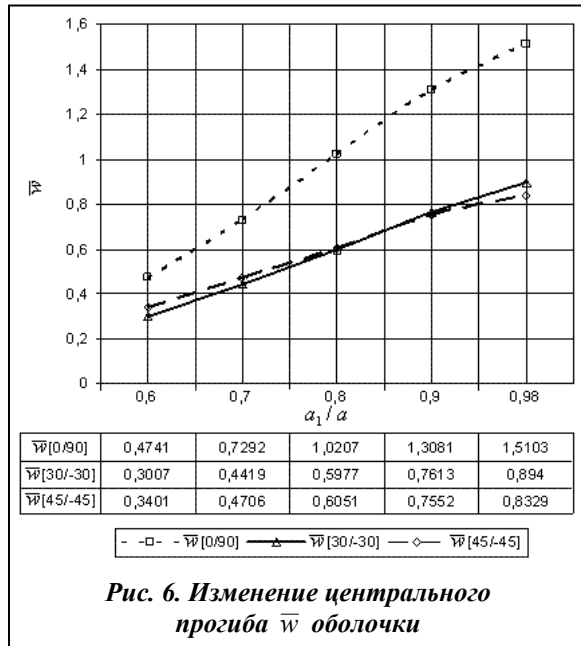


Рис. 6. Изменение центрального прогиба \bar{w} оболочки

Таблица 5. Прогиб \bar{w} и изгибающие моменты \bar{M}_1 , \bar{M}_2 жестко закрепленной по всему контуру оболочки антисимметричного строения $[\theta/\theta]$ при параметрах вреза $a_1/a = 0,6$; $b_1/b = 0,4$; $k_x = 0,1$

Способ укладки слоев	k_y	Метод аппроксимации	$q = q_0 \cos(\pi x/a) \cos(\pi y/b)$			$q = q_0$		
			$\bar{w}(0,0)$	$\bar{M}_1(0,0)$	$\bar{w}(0,0)$	$\bar{M}_1(0,0)$	$\bar{w}(0,0)$	$\bar{M}_1(0,0)$
[30/-30]	0,2	SP[20×20]	0,182	1,285	0,431	0,222	1,488	0,383
		SP[40×40]	0,183	1,287	0,432	0,222	1,491	0,383
		SP[60×60]	0,183	1,288	0,432	0,222	1,492	0,383
		POLY	0,180	1,308	0,437	0,219	1,543	0,403
	0,1	SP[20×20]	0,185	1,302	0,437	0,225	1,509	0,389
		SP[40×40]	0,185	1,302	0,437	0,225	1,511	0,389
		SP[60×60]	0,185	1,302	0,437	0,225	1,513	0,389
		POLY	0,185	1,346	0,450	0,226	1,594	0,419
	0,05	SP[20×20]	0,185	1,304	0,438	0,226	1,516	0,391
		SP[40×40]	0,186	1,307	0,438	0,226	1,518	0,391
		SP[60×60]	0,186	1,307	0,438	0,226	1,520	0,391
		POLY	0,187	1,357	0,454	0,228	1,610	0,42
	0	SP[20×20]	0,187	1,319	0,443	0,229	1,536	0,397
		SP[40×40]	0,188	1,321	0,443	0,229	1,538	0,397
		SP[60×60]	0,188	1,322	0,443	0,229	1,540	0,397
		POLY	0,188	1,367	0,457	0,230	1,622	0,427
[45/-45]	0,2	SP[20×20]	0,222	1,140	0,815	0,276	1,320	0,829
		SP[40×40]	0,223	1,141	0,815	0,276	1,321	0,829
		SP[60×60]	0,223	1,142	0,816	0,276	1,322	0,830
		POLY	0,223	1,202	0,850	0,277	1,424	0,893
	0,1	SP[20×20]	0,227	1,166	0,832	0,283	1,356	0,853
		SP[40×40]	0,228	1,167	0,833	0,283	1,358	0,853
		SP[60×60]	0,228	1,168	0,833	0,284	1,358	0,854
		POLY	0,228	1,228	0,867	0,283	1,460	0,917
	0,05	SP[20×20]	0,229	1,174	0,838	0,285	1,368	0,861
		SP[40×40]	0,229	1,176	0,839	0,286	1,370	0,862
		SP[60×60]	0,229	1,176	0,839	0,286	1,371	0,862
		POLY	0,229	1,237	0,874	0,286	1,472	0,925
	0	SP[20×20]	0,231	1,186	0,846	0,288	1,384	0,872
		SP[40×40]	0,232	1,187	0,847	0,289	1,386	0,872
		SP[60×60]	0,232	1,188	0,847	0,289	1,387	0,873
		POLY	0,231	1,250	0,882	0,289	1,489	0,937

Следует обратить внимание, что для такого вида граничных условий результаты, полученные с помощью полиномиальной аппроксимации и сплайн-аппроксимации, отличаются не более чем на 2% для прогиба. Однако при проведении вычислений в случае полиномиальной аппроксимации сходимость полученных результатов существенно хуже, чем при использовании сплайнов и зависит как от количества координатных функций, так и от количества узлов интегрирования. Результаты, представленные в табл. 4, 5, в случае полиномиальной аппроксимации неопределенных компонент, были получены при сохранении 45 координатных функций для каждой из неизвестных функций. При этом область интегрирования разбивалась на 7 прямоугольников, в каждом из которых была использована 10-точечная квадратурная формула Гаусса.

Результаты задач 2 и 3 показывают, что вид граничного условия значительным образом влияет на НДС пологих оболочек. Так, например, в случае ортогонального армирования, величина центрального прогиба шарнирно опертой оболочки превосходит прогиб жестко закрепленной более чем в 2 раза. Такое повышение податливости оболочки может служить фактором, существенно ухудшающим численную сходимость результатов, что в значительно большей степени сказывается при полиномиальной аппроксимации и приводит к необходимости выбора финитных функций в качестве аппроксимирующих, например сплайнов.

Приведенный пример показывает, что в случае невыпуклых областей, содержащих особенности в угловых точках, при использовании метода RFM более рациональным и надежным является использование сплайн-аппроксимации или аппроксимации какими-либо другими финитными функциями.

Выводы

В работе предложен эффективный метод расчета задач изгиба многослойных пологих оболочек, опирающихся на план сложной формы, который базируется на совместном применении теории R-функций, сплайн-аппроксимации и вариационных методах. С помощью предложенного подхода и реализованного на его основе программного обеспечения проведено исследование НДС пологих многослойных оболочек со сложной формой плана, находящихся под воздействием поперечной нагрузки. Проанализировано влияние на НДС оболочек различных геометрических и механических параметров: кривизны срединной поверхности, способа упаковки слоев, вида внешней нагрузки, типа граничных условий. Вычисления выполнены при двух видах аппроксимации неопределенных компонент в структурных формулах: полиномиальной и сплайн-аппроксимации. Изучена практическая сходимость результатов в каждом случае. Показано, что для данного класса задач в случае невыпуклых областей более целесообразно использовать аппроксимацию неопределенных компонент сплайнами или другими финитными функциями.

В дальнейшем предполагается, что база алгоритмов и программное обеспечение будут использованы для решения нелинейных задач изгиба и колебаний пологих многослойных оболочек со сложной формой плана.

Литература

1. Reddy J. N. Exact solutions of moderately thick laminated shells // J. Eng. Mech. – 1984 – ASCE. – 110. – P. 794–809.
2. Ren J. G. Exact solutions for laminated cylindrical shells in cylindrical bending // Comp. Sci.&Tech. – 1987. – 29. – P. 169–187.
3. Varadan T. K. Bending of laminated orthotropic cylindrical shells - an elasticity approach / T. K. Varadan, K. Bhaskar // Comp. Struct. – 1991. – 17. – P. 141–156.
4. Chandrasekhara K. Static analysis of thick laminated circular cylindrical shell subjected to axisymmetric load / K. Chandrasekhara, B. S. Kumar // Comp. Struct. – 1993. – 23. – P. 1–9.
5. Bhimaraddi A. Three-dimensional elasticity solution for static response of orthotropic doubly curved shallow shells on rectangular planform // Comp. Struct. – 1993. – 24. – P. 67–77.
6. Love A. E. H. On the small free vibrations and deformations of the elastic shells // Philosophical Trans. of the Royal Soc. – 1888. – 17. – P. 491–546.
7. Муштару X. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применением к решению задач устойчивости упругого равновесия // Прикл. математика и механика. – 1939. – 2, № 14. – С. 439–456.

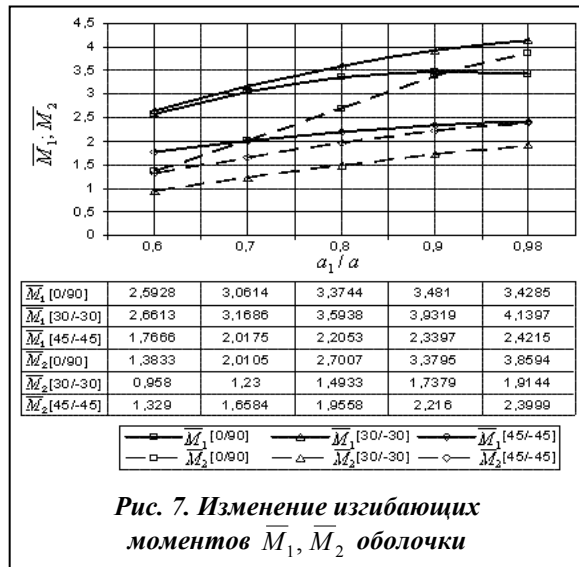


Рис. 7. Изменение изгибающих моментов \bar{M}_1, \bar{M}_2 оболочки

8. *Доннел Л. Г.* Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 568 с.
9. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложение в технике. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
10. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. – М.: Физматгиз, 1961. – 384 с.
11. *Кантор Б. Я.* Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. – Киев: Наук. думка, 1971. – 136 с.
12. *Шупикив А. Н.* Колебания многослойных пластин сложной формы при импульсном нагружении / А. Н. Шупикив, Н. В. Сметанкина // Сб. тр. Харьк. политехн. ун-та. – 1999. – Вып. 7. – Ч. 1. – С. 401–408.
13. *Yang P. C.* Elastic wave propagation in heterogeneous plates / P. C. Yang, C. R. Norris and Y. Stavsky // Int. J. Solids Struct. – 1966. – 2. – P. 665–684.
14. *Reddy J. N.* A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates // J. Appl. Mech. – 1984. – 51. – P. 745–752.
15. *Reddy J. N.* A Higher-Order Shear Deformation Theory of Laminated Elastic Shells / J. N. Reddy and C. F. Liu // Int. J. Eng. Sci. – 1985. – 23. – P. 319–330.
16. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромиздат, 1966. – 392 с.
17. *Курпа Л. В.* Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с.
18. *Курпа Л. В.* Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана // Мат. методы та фізико-механ. поля, – 2008. – 51, № 2. – С. 75–85.
19. *Kurpa L.* Nonlinear vibrations of shallow shells with complex boundary: R-functions method and experiments / Lidia Kurpa, Galina Pilgun, Marco Amabili // J. of Sound & Vibr. – 2007. – 306. – P. 580–600.
20. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
21. *Григолюк Э. И.* Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
22. *Василенко А. Т.* Определение напряженного состояния многослойных ортотропных оболочек переменной жесткости в уточненной постановке / А. Т. Василенко, Г. П. Голуб, Я. М. Григоренко // Прикл механика. – 1976. – 12, № 2. – С. 40–47.
23. *Завьялов Ю. С.* Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко – М.: Наука, 1980. – 352 с.
24. *Дьяконов В.* Maple 9 в математике, физике, образовании. – СПб.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 688 с.
25. *Павловская Т. А.* C/C++. Программирование на языке высокого уровня. – СПб.: Питер, 2001. – 464 с.
26. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
27. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. – 528 p.
28. *Wu C. P.* Asymptotic solutions of laminated composite shallow shells with various boundary conditions / C. P. Wu, Y. W. Chi // Acta Mechanica. – 1999. – 132. – P. 1–18.
29. *Kheider A. A.* A shear deformable theory of laminated composite shallow shell-type panels and their response analysis Part II: Static response / A. A. Kheider, L. Librescu, D. Frederick // Acta Mech. – 1989. – 77. – P. 1–12.

Поступила в редакцию
20.09.09