

УДК 536.24

А. П. Слесаренко, д-р физ.-мат. наук**Н. А. Сафонов**, канд. физ.-мат. наукИнститут проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, E-mail: matsevit@ipmach.kharkov.ua)**ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ
ЗАВИСИМОСТИ МОЩНОСТИ ИСТОЧНИКА ЭНЕРГИИ
ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ НА БАЗЕ ВАРИАЦИОННО-СТРУКТУРНОГО
И ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ**

На базе совместного применения метода прямых, итерационного и вариационно-структурного методов решена обратная задача нелинейной нестационарной теплопроводности. Представлены результаты решения обратной задачи теплопроводности в виде идентифицированных параметров функции, характеризующей мощность внутреннего источника энергии от температуры по данным вычислительного эксперимента.

На базі спільного використання методу прямих, ітераційного та варіаційно-структурного методів розв'язана обернена задача нелінійної нестационарної теплопроводності. Наведено результати розв'язання оберненої задачі теплопроводності у вигляді ідентифікованих параметрів функції, що характеризує потужність внутрішнього джерела енергії від температури за даними обчислювального експерименту.

Актуальность проблемы

В настоящее время в связи с развитием высокотемпературной теплофизики значительное внимание уделяется разработке методов расчёта нестационарных нелинейных температурных полей при высокоинтенсивных источниках теплоты. Исследуемая проблема относится к классу задач математической физики с существенной нелинейностью, при решении которых встречаются серьёзные трудности. Они связаны с тем, что необходимо проводить большие серии расчётов нестационарных полей в конструктивных элементах с учётом реальной геометрии при условии, что мощность источников тепла зависит от температуры, координат точек пространства и от времени; от времени также зависит температура окружающей среды, а теплофизические свойства материала – от температуры. В этих условиях применение известных аналитических методов сопряжено с математическими трудностями принципиального характера. Только некоторые нестационарные нелинейные задачи, к решению которых сводится определение неустановившихся тепловых процессов, допускают точное решение. При этом рассматриваются лишь простейшие формы конструктивных элементов и сравнительно простые начальные и краевые условия. Поэтому возникает необходимость в развитии приближённых методов расчёта для исследования указанных тепловых полей.

Одним из перспективных направлений в развитии приближённых численно-аналитических методов решения нелинейных задач теплопроводности является сведение на первом этапе решения нестационарной задачи теплопроводности к последовательности соответствующих стационарных нелинейных задач для каждого момента времени с использованием неявной разностной схемы Кранка-Николсона по временной переменной задачи. На втором этапе решения полученной последовательности нелинейных задач теплопроводности предлагается совместно применять итерационный, структурный и вариационный методы.

Постановка обратной задачи теплопроводности

Рассмотрим случай, когда конструктивный элемент представляет собой ограниченную пластину определённой толщины a и распределение источников и стоков тепла на ней характеризуется функцией

$$F(T) = \begin{cases} \frac{P_i(T)}{0,01\lambda a} = P_0(\delta + \gamma_i e^{\beta_i T}), & (x, y) \in \Omega_i \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_i, \end{cases}$$

где γ_i, β_i – действительные числа.

Предлагается совместное применение метода прямых [1], итерационного [2] и вариационно-структурного [3–5] методов для решения обратной нелинейной нестационарной задачи теплопроводности [6]

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} = \Delta T - BiT + F(T) \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$T = 0 \text{ на } \Gamma_1; \quad -\frac{\partial T}{\partial \nu} = Bi_2(T - T_{cp}) \text{ на } \Gamma_2, \quad (2)$$

$$T = T_0 \text{ в } \Omega \text{ при } Fo = 0, \quad (3)$$

$$T = T^*(t_k, x_m, y_m), \quad (x_m, y_m) \in \Omega, \quad (4)$$

в области неканонической формы с источником энергии (рис. 1); $Bi = \frac{\alpha L^2}{\lambda d}$ – число Био; α – коэффициент теплоотдачи с поверхности пластины; L – характерный размер пластины; $T(x, y, Fo)$ – температура; t – время; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ – граница области; λ – коэффициент теплопроводности.

Математическое моделирование нелинейных нестационарных тепловых процессов в двухмерных системах с источником энергии

Представим первую производную по времени в уравнении (1) посредством приближенного конечно-разностного выражения $\frac{\partial T}{\partial Fo} \approx \frac{T^{l+1} - T^l}{\Delta Fo}$. В результате этого дифференциальное уравнение теплопроводности (1) в точках сетки по временной переменной

$$\omega_{Fo} = \left\{ Fo_l : Fo_{l+1} = Fo_l + \Delta Fo, l = \overline{0, n_\tau - 1}, \Delta Fo = \frac{\tau}{n_\tau}, n_\tau \in N \right\}$$

примет следующий вид: $\frac{T^{l+1} - T^l}{\Delta Fo} = \Delta T^{l+1} - BiT^{l+1} + F(T^{l+1})$. Аппроксимируем функцию мощности источника энергии в виде такой двойной суммы:

$$F(T^{l+1}) = \gamma_{l+1} e^{\beta_{l+1} T^{l+1}} \approx \sum_{p+q=0}^n a_{p,q}^{l+1} P_p(x) P_q(y), \text{ где } a_{p,q}^{l+1} \text{ – постоянные неопределенные коэффициенты; } P_p(x), P_q(y) \text{ – полиномы Чебышева, нормированные относительно области их определения } \Omega_i.$$

Нестационарная краевая задача теплопроводности (1)–(3) для каждого момента времени Fo_{l+1} представляется в виде стационарных краевых задач

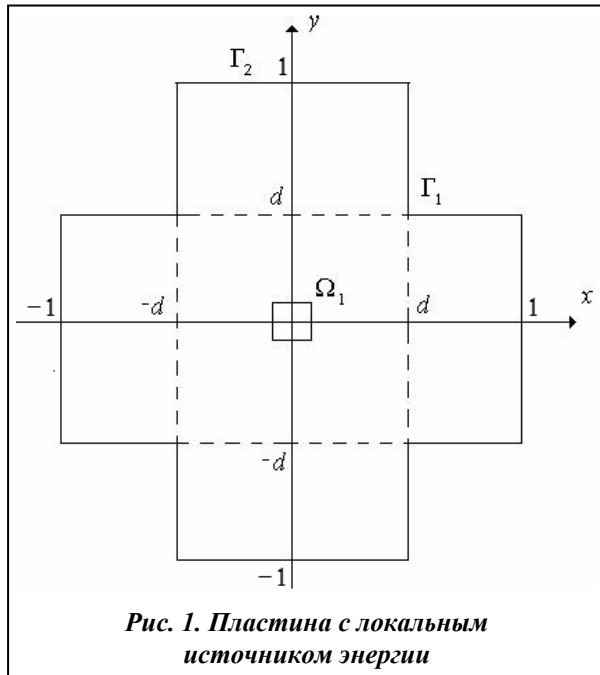


Рис. 1. Пластина с локальным источником энергии

$$-\Delta T^{l+1} + \left(\text{Bi} + \frac{1}{\Delta \text{Fo}} \right) T^{l+1} = \sum_{p+q=0}^{n_l} a_{p,q}^{l+1} P_p(x) P_q(y) + \frac{1}{\Delta \text{Fo}} T^l \quad \text{в } \Omega, \quad (5)$$

$$T^{l+1} = 0 \text{ на } \Gamma_1; \quad -\frac{\partial T^{l+1}}{\partial \nu} = \text{Bi}_2 T^{l+1} \text{ на } \Gamma_2; \quad \frac{\partial T^{l+1}}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad (6)$$

$l = 0, 1, 2, \dots, T^0 = T_0$ в Ω . Запишем решение краевых задач теплопроводности (5)–(6) в виде суммы двух решений $T^{l+1} = \bar{T}^{l+1} + \sum_{p+q=0}^{n_l} a_{p,q}^{l+1} T_{p,q}^{l+1}$. Тогда, следуя принципу суперпозиции,

функция температуры \bar{T}^{l+1} будет решением следующей стационарной краевой задачи теплопроводности для моментов времени Fo_{l+1} :

$$-\Delta \bar{T}^{l+1} + \left(\text{Bi} + \frac{1}{\Delta \text{Fo}} \right) \bar{T}^{l+1} = \frac{1}{\Delta \text{Fo}} \bar{T}^l \quad \text{в } \Omega, \quad (7)$$

$$\bar{T}^{l+1} = 0 \text{ на } \Gamma_1; \quad -\frac{\partial \bar{T}^{l+1}}{\partial \nu} = \text{Bi}_2 \bar{T}^{l+1} \text{ на } \Gamma_2; \quad \frac{\partial \bar{T}^{l+1}}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad (8)$$

$l = 0, 1, 2, \dots, \bar{T}^0 = T_0$ в Ω . Аналитические структуры решения, построенные с использованием Р-операций $f_1 \wedge_p f_2 = f_1 + f_2 - 2^p \sqrt[f_1^{2p} + f_2^{2p}]$; $f_1 \vee_p f_2 = f_1 + f_2 + 2^p \sqrt[f_1^{2p} + f_2^{2p}]$ [7], точно удовлетворяющие граничным условиям (2) задачи (1)–(4), при $T_{\text{ср}} = 0$ имеют вид

$$T = (T_1 \omega_2^2 + T_2 \omega_1^2) (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{-1} = \sum_{i,j=0}^n C_{ij} \chi_{ij}(x, y), \quad (9)$$

где $T_1 = \omega_1 \Phi = \sum_{i,j=0}^n C_{ij} \chi_{ij}^{(1)}(x, y)$, $T_2 = \Phi - \omega_2 (D_1^{(2)} \Phi)|_{\Gamma_2} + \omega_2 \text{Bi}_2 (\Phi)|_{\Gamma_2} = \sum_{i,j=0}^n C_{ij} \chi_{ij}^{(2)}(x, y)$,

$\Phi = \sum_{i,j=0}^n C_{ij} \varphi_{ij}$, $\varphi_{ij} = P_i(x) P_j(y)$, $P_k(z)$, $k = i, j$ – полиномы Чебышева,

$$\omega_1 = 2d^2 - x^2 - y^2 + 4\sqrt{(d^2 - x^2)^8 + (d^2 - y^2)^8}, \quad \omega_2 = \frac{1-x^2}{2} + \frac{1-y^2}{2} - 4\sqrt{(1-x^2)^8 + (1-y^2)^8} \cdot 2^{-1},$$

$$D_1^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \omega_k}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \omega_k}{\partial y}, \quad k = 0, 2, \quad \chi_{ij}(x, y) = \chi_{ij}^{(1)} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} + \chi_{ij}^{(2)} \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Функции ω_1 и ω_2 удовлетворяют следующим условиям: $\omega_1|_{\Gamma_1} = 0$, $\omega_2|_{\Gamma_2} = 0$,

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_2} = 1, \quad \omega_1 > 0, (x, y) \in \Omega, \quad \omega_2 > 0, (x, y) \in \Omega. \quad \text{Для того чтобы } \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \Big|_{\Gamma_{11}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} \Big|_{\Gamma_{12}} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm 1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm 1} = 0. \quad \text{Используем PS-операции } \tilde{f}_1 \wedge_{\text{PS}} \tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 - 2^p \sqrt[\tilde{f}_1^{2p} + \tilde{f}_2^{2p}],$$

$$\tilde{f}_1 \vee_{\text{PS}} \tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 + 2^p \sqrt[\tilde{f}_1^{2p} + \tilde{f}_2^{2p}], \quad \text{в которых } \tilde{f}_1 = f_1 \left[1 + \sum_{l=1}^{p-1} a_l f_1^l \right], \quad \tilde{f}_2 = f_2 \left[1 + \sum_{l=1}^{p-1} b_l f_2^l \right]. \quad \text{Для рас-}$$

сматриваемой задачи $\omega_2 = \tilde{f}_1 \wedge_{\text{PS}} \tilde{f}_2 = 4\sqrt[\tilde{f}_1^4 + \tilde{f}_2^4]$, $f_1 = \frac{1-x^2}{2}$, $f_2 = \frac{1-y^2}{2}$, $p = 2$, $a_1 = 1/4$. Тогда

$$\tilde{f}_1 = \frac{1-x^2}{2} \left[1 + \frac{1-x^2}{4} \right], \quad \tilde{f}_2 = \frac{1-y^2}{2} \left[1 + \frac{1-y^2}{4} \right], \quad \text{в этом случае}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm 1} = - \left[1 + \frac{1-x^2}{4} \right]_{x=\pm 1} + 2(-x) \left(-\frac{x}{2} \right) \Big|_{x=\pm 1} + \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1-x^2}{2} \Big|_{x=\pm 1} = -1 + 1 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}_2}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm 1} = - \left[1 + \frac{1-y^2}{4} \right]_{y=\pm 1} + 2(-y) \left(-\frac{y}{2} \right) \Big|_{y=\pm 1} + \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1-y^2}{2} \Big|_{y=\pm 1} = -1 + 1 = 0.$$

Функция $\omega_1 = \tilde{\varphi}_1 \wedge_{PS} \tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 + 4\sqrt{\tilde{\varphi}_1^4 + \tilde{\varphi}_2^4}$, где $\varphi_1 = d - x^2$, $\varphi_2 = d - y^2$,

$\tilde{\varphi}_1 = (d^2 - x^2) [1 + a_1(d^2 - x^2)]$, $\tilde{\varphi}_2 = (d^2 - y^2) [1 + a_1(d^2 - y^2)]$, и коэффициент a_1 выбирается так, чтобы $\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial x^2} \Big|_{\Gamma_{11}} = 0$, $\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_2}{\partial y^2} \Big|_{\Gamma_{12}} = 0$.

Краевую задачу теплопроводности (7)–(8) сведем к проблеме минимума следующего квадратичного функционала:

$$\bar{I}^{l+1} = \int_{\Omega} \left[(\nabla \bar{T}^{l+1})^2 + \left(Bi + \frac{1}{\Delta Fo} \right) (\bar{T}^{l+1})^2 - 2 \frac{1}{\Delta Fo} \bar{T}^l \bar{T}^{l+1} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_2} Bi_2 (\bar{T}^{l+1})^2 d\Gamma_2$$

при условии, что $\bar{T}^{l+1} = 0$ на Γ_1 . Для определения неизвестных коэффициентов $\bar{C}_{i,j}^{l+1}$ получим систему линейных алгебраических уравнений в виде

$$\sum_{i,j} \bar{C}_{i,j}^{l+1} \left\{ \int_{\Omega} \left[\nabla \chi_{ij} \nabla \chi_{ks} + \left(Bi + \frac{1}{\Delta Fo} \right) \chi_{ij} \chi_{ks} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_2} Bi_2 \chi_{ij} \chi_{ks} d\Gamma_2 \right\} = \int_{\Omega} \frac{1}{\Delta Fo} T^l \chi_{ks} d\Omega, \quad k, s = \overline{0, n}.$$

Функция $T_{p,q}^{l+1}$ является решением краевой задачи теплопроводности

$$-\Delta T_{p,q}^{l+1} + \left(Bi + \frac{1}{\Delta Fo} \right) T_{p,q}^{l+1} = P_p(x) P_q(y) \quad \text{в } \Omega, \quad (10)$$

$$T_{p,q}^{l+1} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1; \quad -\frac{\partial T_{p,q}^{l+1}}{\partial \nu} = Bi_2 T_{p,q}^{l+1} \quad \text{на } \Gamma_2; \quad \frac{\partial T_{p,q}^{l+1}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \quad p, q = \overline{0, n_i} \quad (11)$$

и выбирается в виде структуры решения (9). Краевая задача (10)–(11) эквивалентна проблеме минимума следующего квадратичного функционала:

$$I^{l+1} = \int_{\Omega} \left[(\nabla T_{p,q}^{l+1})^2 + \left(Bi + \frac{1}{\Delta Fo} \right) (T_{p,q}^{l+1})^2 - 2 P_p(x) P_q(y) T_{p,q}^{l+1} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_2} Bi_2 (T_{p,q}^{l+1})^2 d\Gamma_2$$

при условии, что $T_{p,q}^{l+1} = 0$ на Γ_1 . Для определения неизвестных коэффициентов $C_{pq,ij}^{l+1}$ получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i,j} C_{pq,ij}^{l+1} \left\{ \int_{\Omega} \left[\nabla \chi_{ij} \nabla \chi_{ks} + \left(Bi + \frac{1}{\Delta Fo} \right) \chi_{ij} \chi_{ks} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_2} Bi_2 \chi_{ij} \chi_{ks} d\Gamma_2 \right\} = \int_{\Omega} P_p(x) P_q(y) \chi_{ks} d\Omega, \quad k, s = \overline{0, n}.$$

В результате решения краевых задач теплопроводности (7)–(8), (10)–(11) на последовательных временных шагах Fo_{l+1} сетки ω_{Fo} получены функции температур \bar{T}^{l+1} , $T_{p,q}^{l+1}$, $p, q = \overline{0, n_i}$, учитывающие соответственно начальное условие (3) задачи (1)–(4) для каждого момента

времени (источник энергии $\frac{\bar{T}^l}{\Delta Fo}$) в уравнении (7) и составляющую источника энергии в уравнении (9) $P_p(x)P_q(y)$, $p, q = \overline{0, n_i}$.

Идентификация нелинейной зависимости от температуры мощности внутреннего источника энергии в двухмерных системах

Используя точечный метод наименьших квадратов для учёта данных теплофизического эксперимента (4), получим систему линейных алгебраических уравнений, из решения которой находим коэффициенты аппроксимации a_{pq}^{l+1} для функции мощности источника энергии

$$\sum_{p+q=0}^{n_i} a_{pq}^{l+1} \sum_{m=1}^M T_{pq}^{l+1}(x_m, y_m) T_{rs}^{l+1}(x_m, y_m) = \sum_{m=1}^M \left[T^{*l+1}(x_m, y_m) - \bar{T}^{l+1}(x_m, y_m) \right] T_{rs}^{l+1}(x_m, y_m), \quad r, s = \overline{0, n_i}.$$

Полученные коэффициенты a_{pq}^{l+1} , $p, q = \overline{0, n_i}$ дают возможность перейти к определению параметров γ_{l+1} , β_{l+1} функции мощности источника энергии на каждом шаге по временной переменной. Пусть в задаче (1)–(4) $\delta =$, тогда $F(T^{l+1}) = \gamma_{l+1} e^{\beta_{l+1} T^{l+1}}$, $\ln F(T^{l+1}) = \ln \gamma_{l+1} + \beta_{l+1} T^{l+1}$. Для нахождения параметров $\ln \gamma_{l+1}$ и β_{l+1} используем метод наименьших квадратов в интегральной форме $\int_{\Omega_i} \left[\ln F(T^{l+1}) - \ln \gamma_{l+1} - \beta_{l+1} T^{l+1} \right]^2 d\Omega_i = 0$. При этом

получим для определения параметров $\ln \gamma_{l+1}$ и β_{l+1} уравнения

$$\begin{cases} \ln \gamma_{l+1} \int_{\Omega_i} d\Omega_i + \beta_{l+1} \int_{\Omega_i} T^{l+1} d\Omega_i = \int_{\Omega_i} \ln F(T^{l+1}) d\Omega_i \\ \ln \gamma_{l+1} \int_{\Omega_i} T^{l+1} d\Omega_i + \beta_{l+1} \int_{\Omega_i} (T^{l+1})^2 d\Omega_i = \int_{\Omega_i} T^{l+1} \ln F(T^{l+1}) d\Omega_i \end{cases}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

При проведении вычислительного эксперимента для функции источника энергии в задаче (1)–(4) в виде $F(T) = 10,0e^{-0,5T}$ решена прямая задача с целью определения данных вычислительного эксперимента для температуры в точках (x, y_m) в условии (4). При решении обратной задачи (1)–(4) выбирались 4, 8, 12 точек, в которых температура для каждого из моментов времени Fo_{l+1} определялась из решения прямой нелинейной нестационарной задачи теплопроводности (1)–(3). Данные вычислительного эксперимента при решении обратной задачи теплопроводности (1)–(4) приведены в таблице при использовании данных вычислительного эксперимента в восьми точках. Использование данных вычислительного эксперимента в четырех точках приводит к рассогласованию результатов с точными значениями для параметров γ и β в пределах, не превышающих 1%.

Идентификация параметров γ и β функции мощности источника энергии во времени

t	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
γ	9,999	9,966	9,980	9,991	9,997	10,999	10,001	10,002	10,002	10,002
β	-0,499	-0,464	-0,481	-0,493	-0,499	-0,502	-0,504	-0,504	-0,504	-0,504

Заключение

Предложены новые подходы к идентификации нелинейной зависимости от температуры мощности внутренних источников энергии в двухмерных системах. Данные подходы базируются на разработанном методе спектральных функций влияния для внутренних источников энергии. Нелинейная неизвестная зависимость мощности источника энергии от температуры аппроксимируется в области источника функциональным рядом в виде полиномов Чебышева с неизвестными коэффициентами.

На етапі ідентифікації вибирається той или иной клас нелінійної залежності потужності джерел енергії від температури з неопределёними коефіцієнтами, і з допомогою методу найменших квадратів в інтегральній формі визначаються ці коефіцієнти.

Представлений в статті підхід до ідентифікації параметрів функції, що характеризує потужність джерела енергії, за даними чисельного експерименту дозволяє уточнювати математичні моделі теплових процесів в двохмерних системах з джерелами енергії. К даним системам відносяться плати електронних пристроїв, приладні панелі космічних апаратів і др. Це дозволяє значно підвищити ступінь адекватності моделювання теплових процесів по відношенню до реально протікаючим в системах з джерелами енергії.

Література

1. Рихтмайер Р. Разностные схемы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
2. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
3. Рвачев В. Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – Киев: Наук. думка, 1976. – 288 с.
4. Рвачев В. Л. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – Киев: Наук. думка, 1978. – 140 с.
5. Слесаренко А. П. Развитие алгебро-логического метода и его приложения к многомерным нелинейным задачам теплопроводности для однородных и композитных сред: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 1984. – 36 с.
6. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности: В 2-х т. Т. 1. Методология / Ю. М. Мацевитый. – Киев: Наук. думка, 2002. – 408 с.
7. Рвачев В. Л. Кручение стержней сложного профиля: Учеб. пособие / В. Л. Рвачев, И. В. Гончарук. – Харьков: Харьк. политехн. ин-т, 1973. – 104 с.

Поступила в редакцию
11.11.10

УДК 519.6

О. М. Литвин^{*}, д-р фіз.-мат. наук

В. О. Пасічник^{**}, канд. техн. наук

О. В. Ткаченко^{***}

О. О. Черняк^{*}

^{*} Українська інженерно-педагогічна академія, (E-mail: academor@kharkov.ua)

^{**} Харківська державна академія дизайну і мистецтв

^{***} ДП «Запорізьке машинобудівне конструкторське бюро «Прогрес»
ім. академіка А. І. Івченка»

ОПТИМІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ АЕРОДИНАМІЧНИХ ПОВЕРХОНЬ ДЛЯ АВІАДВИГУНІВ НА ОСНОВІ В-СПЛАЙНІВ

Досліджується метод оптимального вибору числа горизонтальних та вертикальних перерізів аеродинамічних поверхонь деталей авіадвигунів, які однозначно можуть бути описані в циліндричній системі координат. Метод використовує явні вирази для В-сплайнів 2-го та 3-го степенів з нерівномірним розміщенням вузлів, тобто їх подання явними аналітичними виразами на кожному з підінтервалів носія сплайна.

Исследуется метод оптимального выбора числа горизонтальных и вертикальных сечений аэродинамических поверхностей деталей авиадвигателей, которые однозначно могут быть описаны в цилиндрической системе координат. Метод использует явные вы-