УДК 681.5.001.63: 519.711

С. В. Чопоров
С. И. Гоменюк, д-р техн. наук

Запорожский национальный университет
(E-mail: choporov@list.ru; serega@znu.edu.ua)

КРИТЕРИЙ ПОИСКА ОСОБЫХ ТОЧЕК R-ФУНКЦИЙ

Рассмотрена проблема геометрического моделирования сложных объектов при помощи R-функций. Предложен критерий поиска особых точек геометрической структуры моделируемых R-функциями объектов.

Розглянуто проблему геометричного моделювання складних об'єктів за допомогою R-функцій. Запропоновано критерій пошуку особливих точок геометричної структури об'єктів, що моделюються R-функціями.

Введение

В настоящее время в научных и промышленных исследованиях одно из ведущих мест занимают исследования, проводимые при помощи компьютера. Сложность и экономическая дороговизна получения физических моделей делают более выгодным использование компьютерных моделей.

В современной технике одним из наиболее сложных является этап анализа функциональных характеристик, механических свойств, прочности и долговечности проектируемых и уже существующих конструкций, сооружений, машин и механизмов. Для проведения этого этапа необходимо построение различных сложных математических моделей, в составляющие части которых, как правило, входят сложные геометрические модели исследуемых объектов.

Среди существующих на сегодня автоматизированных систем геометрического моделирования и САПР наиболее распространены три подхода к решению проблемы автоматизации построения геометрических моделей сложных тел с использованием инженерных чертежей; библиотек базовых геометрических элементов; формальных языков.

Одним из исторически первых подходов к геометрическому моделированию необходимого тела являются инженерные чертежи, основанные на идее представления объекта набором плоских проекций. Данный подход получил широкое распространение в инженерном деле как средство коммуникации между инженерами и развит в таких САПР-системах, как AutoCAD [1] и КОМПАС [2]. Однако следует отметить, что в общем случае для произвольного сложного трехмерного объекта трудно определить количество плоских проекций, необходимое для полного и адекватного описания его геометрии.

Одним из наиболее распространенных подходов является подход, основанный на идее описания геометрической модели как комбинации базовых геометрических примитивов, сконструированной на основе геометрических и логических операций. Данный подход применяется в таких известных автоматизированных системах, как ANSYS [3], COSAR [4], COSMOS [5], ЛИРА [6] и других. Такой подход к геометрическому моделированию достаточно эффективный и наглядный для пользователя, однако с его помощью трудно строить геометрические модели объектов с особенностями нестандартной формы.

Другим распространенным подходом к построению геометрической модели является использование формальных языков (например, BDRY [7], CSG [8] и др.) для параметрического описания топологии объектов сложной формы. В основу таких языков положена возможность описать набор геометрических примитивов (например, линия, сплайн, шар и т. д.) и эйлеровых операций над ними. Преимущество данного подхода над описанным выше –

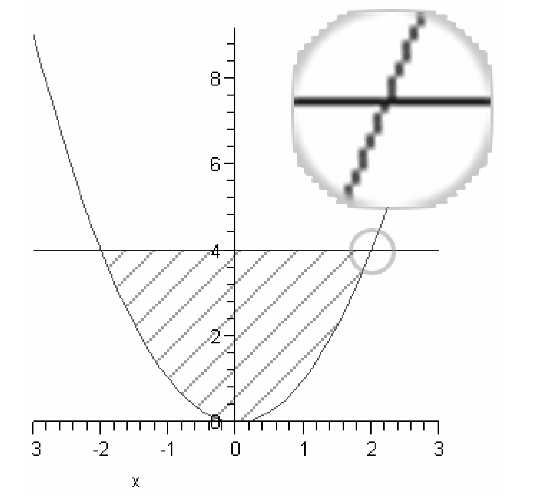

Рис. 1. Область, определенная пересечением функций $f_1(x, y) = 4 - y \geq 0$ и $f_2(x, y) = y - x^2 \geq 0$

большая гибкость при моделировании объектов нестандартной формы, противовесом которой выступает большая сложность и трудоемкость процесса моделирования.

Одним из наиболее универсальных подходов к решению проблемы геометрического моделирования является использование формального математического аппарата для функционального описания геометрической структуры плоских и пространственных областей. Для применения такого подхода к геометрическому моделированию областей сложной формы необходимо решение ряда возникающих в этом случае задач. Одной из наиболее актуальных здесь является проблема отыскания характерных точек конструкции (концентраторы механических напряжений, геометрические особенности конструкции).

Метод R-функций для функционального описания геометрических моделей

Пусть Ω – сплошное тело, геометрическую модель которого необходимо получить. Наиболее общим методом определения множества точек X, образующих объект Ω, является определение предиката A, который может быть вычислен для каждой точки p пространства [13]

$$X = \{p \mid A(p) = \text{true}\}.$$

Таким образом, X определено неявно и состоит из всех точек, удовлетворяющих условию, определенному предикатом A. Простейшей формой предиката является ограничение на знак некоторой действительной функции $f(p)$. Например, если $f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$, тогда $f(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z) \geq 0$ и $f(x, y, z) < 0$ определят соответственно плоскость, закрытое полупространство и открытое полупространство. Например, функция $f_1(x, y) = 4 - y \geq 0$ определит полуплоскость, расположенную ниже прямой $y = 4$, а функция $f_2(x, y) = y - x^2 \geq 0$ – внутреннюю часть параболы (рис. 1).

Более сложные функции могут быть использованы для определения объектов нетривиальной формы. Развитием данного подхода является построение таких функций конструктивно, используя логические комбинации более простых функций, которые эквивалентны стандартным операциям над множествами. Общий подход, реализующий возможность конструктивного построения сложных функций, разработан в работах В. Л. Рвачева [9–12], который получил название теории R-функций и в котором предложены непрерывные в C^m функции для описания теоретико-множественных операций.

Функции В. Л. Рвачева являются логически изменяемыми действительными функциями, знак которых полностью определяется знаками их аргументов. Наиболее часто применяемая на практике система R-функций имеет вид [11, 12]

$$C = \text{const},$$

$$\bar{x} = -x,$$

$$x_1 \wedge x_2 = x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

$$x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

где x, x_1 и x_2 – некоторые действительные функции (элементарные или R-функции) n переменных (в общем случае для n-мерного евклидова пространства E^n), которые больше нуля внутри необходимой исследователю части пространства, меньше нуля вне нее и равны нулю на границе. Операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции – это обобщение логических операций на случай действительных функций. Таким образом, результирующая R-функция – это действительная функция n переменных, которая является результатом логических операций над элементарными функциями (аргументами R-функции) и которая больше нуля внутри необходимой исследователю части пространства, меньше нуля вне нее и равна нулю на границе.

Например, область, заштрихованная на рис. 1, может быть определена конъюнкцией функций f_1 и f_2

$$w_1(x,y) = f_1(x,y) \wedge f_2(x,y) = 4 - x^2 - \sqrt{(4-y)^2 + (y-x^2)^2} . \quad (1)$$

Под особой точкой R-функции (или «углом» R-функции) будем понимать точки пересечения границ областей, определенных операндами R-функций. Их определение с наперед заданной точностью особенно важно, когда в некоторой окрестности таких точек образуются геометрически острые углы (например, пересечение границ областей функций f_1 и f_2 на рис. 1). Определение таких точек представляет особенный интерес для механики деформированного твердого тела, поскольку в таких точках возникают большие значения напряжения. Анализ конструкции методом конечных элементов при потере таких «углов» теряет свое вычислительное качество.

Критерий поиска особых точек простых R-функций

Пусть $\rho(X)$ – простая R-функция – результат R-операции над элементарными функциями $\varphi(X)$ и $\psi(X)$, где X – точка пространства $\mathbf{E}^n$. Если точка X_0 – особая точка функции $\rho(X)$, тогда из определения следует, что в этой точке одновременно обращаются в ноль функции $\rho(X)$, $\varphi(X)$ и $\psi(X)$. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Для того чтобы точка X_0 была особой точкой функции $\rho(X)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\kappa(\wp, \psi) = \varphi^2(X_0) + \psi^2(X_0) = 0. \quad (2)$$

Необходимость данного утверждения следует непосредственно из определения особой точки. Если X_0 – особая точка, тогда $\varphi(X_0) = 0$ и $\psi(X_0) = 0$, следовательно, выполняется равенство (2).

Пусть $\varphi^2(X_0) + \psi^2(X_0) = 0$. Очевидно, что функция $\kappa(\wp, \psi) = \varphi^2 + \psi^2$ всюду неотрицательная и обладает единственным корнем – точкой (0, 0), т. е. точкой, в которой одновременно обращаются ее аргументы. Следовательно, $\varphi(X_0) = 0$ и $\psi(X_0) = 0$, X_0 – особая точка функции $\rho(X)$.

Таким образом, необходимость и достаточность данного утверждения доказаны.

Например, для функции w_1, определенной формулой (1), критерий особой точки будет иметь вид

$$\kappa_1(x, y) = (4 - y)^2 + (y - x^2)^2.$$

Очевидно, что действительными корнями функции $\kappa_1(x, y)$ являются точки (–2, 4) и (2, 4).

Критерий поиска особых точек сложных R-функций

В общем случае, при геометрическом моделировании объектов сложной формы результирующая функция строится конструктивно, используя элементарные функции и построенные на ранних этапах R-функции. При таком подходе особые точки могут образовывать любые R-функции, входящие в композицию. Для поиска всех особых точек необходимо построить функции вида (2) (функции особой точки) для каждой R-операции (конъюнкция или дизъюнкция), входящей в композицию; произвести поиск корней построенных функций особой точки и оставить те, в которых обращается в ноль искомая сложная функция. Однако такой подход требует большого числа поиска корней (минимума), следовательно, разумно ввести единую функцию особой точки сложной R-функции.

Пусть в сложную R-функцию входит i R-операций (конъюнкции или дизъюнкции) и κ_i – функция особой точки i-й R-операции. Тогда функция

$$K(X) = \prod_i \kappa_i(X) \qquad (3)$$

будет всюду неотрицательной функцией как произведение всюду неотрицательных функций и будет обращаться в нуль, когда обращается в нуль одна из функций κ_i (и при этом достигать своего минимума).

Записанные выше свойства функции (3) позволяют сделать вывод, что обращение в нуль функции $K(X)$ является необходимым условием наличия особой точки в точке X_0, и достаточным условием, если при этом обращается в нуль искомая сложная R-функция (т. к. особая точка R-операции над элементарными функциями может оказаться вне моделируемой области в результате последующих R-операций). Таким образом, если $R(X)$ – сложная R-функция, то справедливо следующее утверждение.

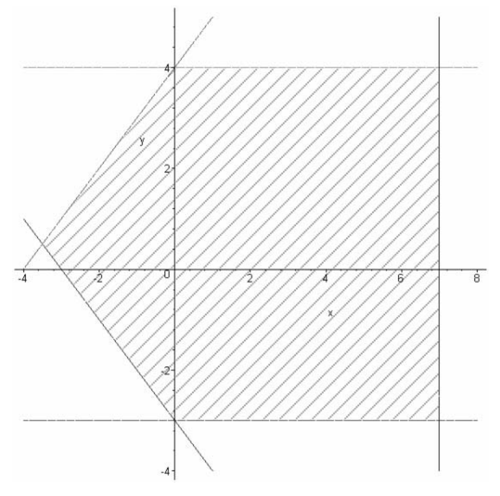

Рис. 2. Область, описанная формулой (4)

Утверждение 2. Для того чтобы точка X_0 была особой точкой сложной R-функции $R(X)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\begin{cases} K(X_0) = \prod_i \kappa_i(X_0) = 0, \\ R(X_0) = 0. \end{cases}$$

Например, область, изображенную на рис. 2, можно описать при помощи следующей формулы:

$$w_2(x, y) = (4 - y) \wedge (y + 3) \wedge (7 - x) \wedge (x + 4 - y) \wedge (y + x + 3). \qquad (4)$$

Соответствующую функции w_2, определенной формулой (4), функцию критерия особой точки можно представить формулой

$$K_2(x, y) = [(4 - y)^2 + (y + 3)^2] \times [((4 - y) \wedge (y + 3))^2 + (7 - x)^2] \times$$
$$[((4 - y) \wedge (y + 3) \wedge (7 - x))^2 + (x + 4 - y)^2] \times$$
$$[((4 - y) \wedge (y + 3) \wedge (7 - x) \wedge (x + 4 - y))^2 + (y + x + 3)^2].$$

Функция обращается в нуль (достигает минимума) в точках (–3,5; 0,5), (0; 4), (7; 4), (7; –3), (0; –3).

Рассмотрим параллелепипед размером $a \times b \times c$. Его можно представить уравнением вида

$$w_3(x, y, z) =$$
$$= (a^2 - x^2) \wedge (b^2 - y^2) \wedge (c^2 - z^2).$$

Соответствующую ему функцию особой точки можно записать как

$$K_2(x, y) =$$
$$=[(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2] \times \qquad (5)$$
$$\times [((a^2 - x^2) \wedge (b^2 - y^2))^2 + (c^2 - z^2)^2].$$

Корни уравнения (5) образуют четыре прямые и восемь отрезков (рис. 3). Однако применение достаточного условия позволяет сделать вывод, что особыми точками будут

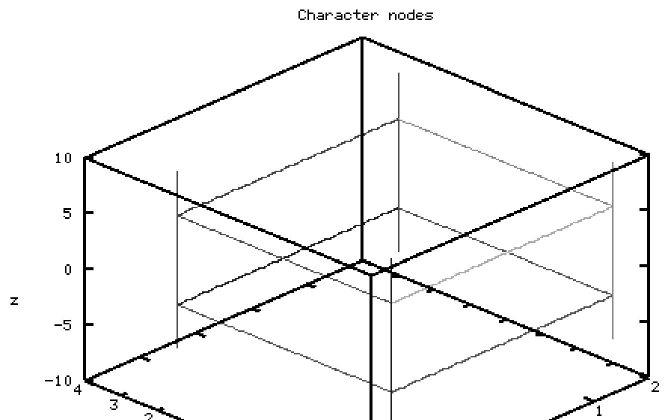

Рис. 3. Корни уравнения (5)

все точки ребер параллелепипеда.

Выводы

Таким образом, в статье предложены необходимые и достаточные условия поиска особых точек простых и сложных R-функций. Особенностью предложенных функций является то, что особые точки R-функций одновременно являются корнями и точками минимума предложенных функций.

Литература

1. *Савельев Л. А.* AutoCAD 2009 с нуля / Л. А. Савельев, О. В. Бранин, С. А. Сорокин и др. – М.: Лучшие книги, 2009. – 272 с.
2. *Каширский В.* КОМПАС-3D V10: универсальность, эффективность, надежность / В. Каширский // САПР и графика. – 2008. – № 3. – С. 38-40.
3. *Басов К. А.* ANSYS и LMS Virtual Lab. Геометрическое моделирование / К. А. Басов. – М.: ДМК Пресс. – 2006. – 240 с.
4. *Данкерт Дж.* Вычислительная система «COSAR» для исследования трехмерной проблемы прочности методом конечных элементов / Дж. Данкерт, У. Габберт // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1978. – № 33. – С. 3–9.
5. *Абашев О.* Комплексный инженерный анализ с использованием семейства программных продуктов COSMOS / О. Абашев // САПР и графика. – 2005. – № 4. – С. 86–93.
6. *Боговис В. Е.* ЛИРА 9.4. Примеры расчета и проектирования. Учебн. пособие / В. Е. Боговис, Ю. В. Гензерский, Ю. Д. Гераймович и др. – Киев: Факт, 2008. – 280 с.
7. *GRUMMP* – Generation and Refinement of Unstructured, Mixed-Element Meshes in Parallel. [Электронный ресурс] : – http://tetra.mech.ubc.ca/GRUMMP.
8. *Shewchuk J.* Delaunay Refinement Algorithms for Triangular Mesh Generation / J. Shewchuk // Computational Geometry: Theory and Appl. – 2002. – № 22 (1–3). – P. 21–74.
9. *Кравченко В. Ф.* Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях / В. Ф. Кравченко, В. Л. Рвачев. – М.: Физматлит, 2006. – 416 с.
10. *Рвачев В. Л.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – Киев: Наук. думка, 1976. – 287 с.
11. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
12. *Рвачев В. Л.* Введение в теорию R-функций / В. Л. Рвачев, Т. И. Шейко // Пробл. машиностроения. – 2001. – Т. 4, № 1–2. – С. 46–58.
13. *Farin G.* Handbook of computer-aided geometric design / G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim. – Amsterdam: Elsevier Science B. V., 2002. — 799 p.

Поступила в редакцию
14.10.10

УДК 681.3

Ш. А. Назиров, д-р физ.-мат. наук
Ф. М. Нуралиев, канд. физ.-мат. наук

Институт математики и информационных технологий
АН Республики Узбекистан
(Узбекистан, г. Ташкент, E-mail: shnazirov@mail.ru)

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАГНИТОУПРУГОСТИ ТОНКИХ ТЕЛ МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ

Приводятся гипотезы магнитоупругости тонких оболочек (пластин), на основе которых выводятся математические модели движения пластин и оболочек в магнитном поле, представленные системой дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начально-краевыми условиями. Задачи решаются при совместном применении вариационных методов и структурного метода R-функций. Для проведения