

7. Литвин О. М. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. Фіз.-мат. науки: Зб. наук. пр. – Кам'янець-Поділь. нац. Ун-т ім. Івана Огієнка, 2010. – Вип. 3. – С. 122–131.
8. Литвин О. М. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Таврій. вісн. інформатики та математики. – Симферополь. – 2011. – № 1. – С. 63–72.
9. Литвин О. Н. Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Компьютерная математика. – Киев, 2011. – № 1. – С. 96–105.
10. Литвин О. М. Наближення розривних функцій двох змінних з розривами на лініях триангуляції двовимірної області за допомогою операторів сплайн-інтерлінації / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Інформатика та системні науки (ІСН-2011): Матеріали II Всеукраїн. наук.-практ. конф., 17–19 березня 2011 р. – Полтава, 2011р. – С. 178–181.

Надійшла до редакції
09.11.11

УДК 519.63

О. Ю. Лисина

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, e-mail: lisina_korovina@mail.ru)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ В МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ ИЗДЕЛИЯХ НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Представляется бессеточный метод решения нестационарной трехмерной задачи теплопроводности в сложной области. Предлагается алгоритм численной реализации на основе использования атомарных радиальных базисных функций.

Подается безсеточный метод роз'язання нестационарної тривимірної задачі теплопровідності в складній області. Пропонується алгоритм чисельної реалізації на основі використання атомарних радіальних базисних функцій.

Введение

Исследуется явление переноса тепла теплопроводностью и конвекцией в сложных 3D областях, представляющих объекты реальных машиностроительных изделий. Математическая модель, описывающая такое явление, задается начально-краевой задачей для дифференциального уравнения параболического типа с соответствующими краевыми условиями.

Рассматривается случай, когда теплофизические свойства среды остаются постоянными, то есть область исследования является изотропной и коэффициенты, входящие в дифференциальное уравнение, не зависят от температуры.

При таких ограничениях математическая постановка трехмерной краевой задачи нестационарной теплопроводности имеет вид

$$L[u(t, x)] \equiv \rho c \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - k \Delta u(t, x) = f(t, x), \quad 0 < t \leq T < \infty, \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in (\Omega + \partial\Omega) = \bar{\Omega}; \quad (2)$$

$$B[u(x)]_{\partial\Omega} \equiv \alpha \phi(t, x) + \beta \psi(t, x) = g(t, x), \quad t > 0, \quad (3)$$

где Ω – ограниченная область из E_3 , $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\partial\Omega$ – граница области.

Приближенное решение данной краевой задачи выполняется по бессеточной схеме. Обзор по применению бессеточных алгоритмов при решении краевых задач осуществлен в работах [1–2].

Решение поставленной задачи выполним методом коллокации, который относится к проекционным методам решения. Дискретизация задачи производится методом прямых с применением схемы весов (θ -метод), что позволяет свести таким образом исходное дифференциальное уравнение к дифференциально-разностному. В ходе стандартных преобразований исходное уравнение (1) преобразуется в систему неоднородных модифицированных уравнений Гельмгольца. Для получения приближенного решения таких уравнений используется бессеточный метод с применением атомарных радиальных базисных функций (АРБФ) [3–5].

По определению, АРБФ многих независимых переменных являются решениями функционально-дифференциальных уравнений

$$Lu(x) = \lambda \oint_{\partial S} u(k(x - \xi)) ds + \mu u(kx), \quad (4)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$; L – один из дифференциальных операторов вида $\Delta, \Delta \pm \delta^2, \Delta$: $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$; $\partial S: \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = r_k^2$; λ, μ – параметры, определяющие существование и единственность решения уравнения (4), k – коэффициент сжатия.

АРБФ являются финитными (т. е. функциями с компактным носителем), эффективно вычисляемыми бесконечно дифференцируемыми функциями. Такие свойства функций делают возможным применение их в качестве базисных при решении поставленной краевой задачи бессеточным методом.

Описание алгоритма

На начальном этапе построения решения краевой задачи в расчетной области вводится сетка $\Omega = \bar{\omega}_{x_m} \times \bar{\omega}_t$, $m = 1, 2, 3$, которая состоит из компонент

$$\bar{\omega}_{x_m} = \{x_m : x_{m, j_m} = i_m h_m, i_m = 0, 1, N_m, h_m = 1/N_m\},$$

$$\bar{\omega}_t = \{t : t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, N_t, \tau = T/N_t\}.$$

В ходе построения решения поставленной задачи (1)–(3) в исходном уравнении осуществляется переход от дифференциального уравнения к дифференциально-разностному с помощью метода прямых. Такой подход к решению уравнений в частных производных был описан Канторовичем Л.В. [6]. Суть его состоит в том, что дискретизация исходного уравнения проводится только для фиксированного количества переменных, в нашем случае – только для одной переменной t . Таким образом, решение исходного дифференциального уравнения в частных производных сводится к решению системы более простых дифференциальных уравнений. Впервые эта методика была применена для решения задачи теплопроводности в работе Hartree [7].

Применив указанный подход к исходному уравнению (1) и введя в рассмотрение схему с весами [8], получаем

$$\frac{1}{\alpha} \frac{u^k - u^{k-1}}{\Delta t} = \theta \left(\Delta u^k + \frac{1}{k} f^k \right) + (1 - \theta) \left(\Delta u^{k-1} + \frac{1}{k} f^{k-1} \right), \quad (5)$$

где $\alpha = k/\rho c$. Параметр θ позволяет варьировать численные схемы решения (явная/симметричная/неявная схемы).

Проводя элементарные преобразования в (5), получаем последовательность дифференциально-разностных уравнений Гельмгольца

$$\Delta u^k - \frac{1}{\theta \alpha \Delta t} u^k = \Delta u^{k-1} - \frac{1}{\theta \alpha \Delta t} u^{k-1} - \frac{\Delta u^{k-1}}{\theta} - \frac{1}{k} f^k - \frac{1 - \theta}{\theta k} f^{k-1}. \quad (6)$$

Отличительной особенностью всех проекционных методов является то, что в ходе реализации осуществляется поиск проекции точного решения из бесконечномерного про-

пространства точных решений на конечномерное аппроксимирующее пространство приближенных решений [9]. При этом решение ищется в виде линейной комбинации базисных функций (аппроксимационный базис).

Решение уравнения (6), по сути, сводится к необходимости решения операторного уравнения вида

$$Lu = \Delta u(x) - \lambda^2 u(x) = f(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad (7)$$

где L – линейный оператор с областью определения $D(L) \subset U$ и областью значений $R(L) \subset F$ и U и F – банаховы пространства.

Задаются последовательности подпространств (U_n) и (F_n) , такие, что

$$U_n \subset D(L) \subset U \quad \text{и} \quad F_n \subset F \quad (n = 1, 2, \dots),$$

а также линейные проекционные операторы P_n , проектирующие F_n на F . Уравнение (7) заменяется приближенным

$$P_n Lu \equiv P_n (\Delta u - \lambda^2 u) = P_n f \quad (u \in U_n)$$

или

$$Lu_n \equiv \Delta u_n - \lambda^2 u_n = f_n. \quad (8)$$

Используя метод коллокации, осуществляем поиск приближенного решения благодаря требованию выполнения условия о том, что уравнение (8) будет удовлетворяться точно в точках коллокации, а именно – в узлах наложенной на область сети, в которых располагаются центры носителей базисных функций (см. рис. 1).

Идея метода коллокации восходит к работе Канторовича Л. В. [10] и развита далее Карпиловской Э. Б. [11], Петерсоном О. [12], Frazer R. A., Jones W. P. и Scan S. W. [13], после чего этот метод получил применение при решении широкого класса краевых задач [14–17].

Благодаря сведению уравнения (5) к виду (8) получаем возможность применять метод коллокации с приближенным представлением функции решения задачи (1)–(3) на k -м шаге в виде

$$u_n(t, x) = \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \quad (9)$$

где $\varphi_j(x)$ – базисные функции, в описываемом методе – АРБФ $\text{Норр}(x_1, x_2, x_3)$ [18]. Отыскание искомых коэффициентов осуществляется из условия обращения в нуль невязки

$$\Delta u(x_{in}) - \lambda^2 u(x_{in}) - f(x_{in}) = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

где x_{in} – координаты узлов наложенной на область сети. Таким образом, для нахождения коэффициентов c_j нужно решить систему уравнений

$$\sum_{j=0}^n (\Delta \varphi_j(x_{in}) - \lambda^2 \varphi_j(x_{in})) c_j = f(x_{in}), \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Метод коллокаций привлекателен своей простотой и обширными возможностями применения в сочетании с несложной численной реализацией.

Обозначим $s^k = \Delta u^{k-1} - \frac{1}{\theta \alpha \Delta t} u^{k-1} - \frac{1}{\theta} \Delta u^{k-1} - \frac{1}{k} f^k - \frac{1-\theta}{\theta k} f^{k-1}$. Представим s^k при-



Рис. 1. Область решения, покрытая произвольной (неструктурированной) сетью: r_1, r_2 – радиусы носителей базисных функций

ближенно в виде линейной комбинации

$$s^k \approx s_n^k = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(x) = \sum_{j=1}^N c_j (\Delta \text{Horp}_j(x) - \lambda^2 \text{Horp}_j(x)). \quad (10)$$

Решение задачи теплопроводности (1)–(3) приближенно представляем с помощью линейной комбинации базисных функций $\text{Horp}(x_1, x_2, x_3)$

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^N c_j \text{Horp}_j(x). \quad (11)$$

Отметим, что функция u_n , как следует из свойств функции $\text{Horp}(x_1, x_2, x_3)$, автоматически удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению. Воздействуя дифференциальным оператором (в нашем случае модифицированным оператором Гельмгольца) на обе части (11), получаем

$$\Delta u_n(x) - \lambda^2 u_n(x) = \sum_{j=1}^N c_j (\Delta \text{Horp}(x_j) - \lambda^2 \text{Horp}(x_j)),$$

и вводя полученное выражение в (10), имеем

$$\sum_{j=1}^N c_j (\Delta \text{Horp}(x_j) - \lambda^2 \text{Horp}(x_j)) = s_n^k(x). \quad (12)$$

Следовательно, остается только обеспечить выполнение краевых условий (3). На границе $\partial\Omega$ области расположено множество точек $\{x_i\}_{n+1}^m \in \partial\Omega$. Предположим, что граничные условия представлены в общем виде:

$$B \left[\sum_{z=n+1}^m \left\langle a_z \text{Horp}(x_z) + b_z \frac{\partial \text{Horp}(x_z)}{\partial n} \right\rangle \right] = g_n(x). \quad (13)$$

Тогда условия нахождения неизвестных коэффициентов формируются из следующих требований:

- удовлетворение дифференциальному уравнению (коэффициенты c_j);
- удовлетворение краевым условиям (коэффициенты a_z и b_z).

В результате уравнения (12) и (13) формируют систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), основная матрица которой имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} [BB] & [BG] \\ [GB] & [GG] \end{bmatrix},$$

где $[BB]$ – блок матрицы A , образованный из значений базисных функций в Ω , во всех внутренних точках сетки области; $[BG]$ – блок матрицы A , образованный из значений базисных функций в Ω во всех граничных точках сетки области; $[GB]$ – блок матрицы A , образованный из значений базисных функций на $\partial\Omega$ во всех внутренних точках сетки области; $[GG]$ – блок матрицы A , образованный из значений базисных функций на $\partial\Omega$ во всех граничных точках области.

Матрица A имеет разреженную структуру, что позволяет применять специальные методы решения СЛАУ, облегчающих процесс поиска неизвестных коэффициентов с минимумом затрат компьютерных ресурсов.

Моделирование тепловых задач и результаты расчетов

Рассмотрим применение вышеизложенного бессеточного алгоритма на примерах расчетов тепловых полей для следующих задач.

Задача 1. Необходимо определить функцию $u(t, x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t, x), \quad 0 < t < T < \infty, \quad x \in \Omega, \quad (14)$$

где Ω – единичный куб; $\Omega = \{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 1\}$, функция внутреннего источника $f(t, x) = 10$, шаг временной сети $\tau = 0.01$ с. Искомая функция должна удовлетворять начальному условию

$$u(0, x) = 0, \quad x \in (\Omega + \partial\Omega) = \bar{\Omega} \quad (15)$$

и на границе $\partial\Omega$ в области Ω граничному условию первого рода

$$u = 0, \quad \in \partial\Omega, \quad t > 0. \quad (16)$$

Задача 2. Необходимо определить функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad 0 < t < T < \infty, \quad x \in \Omega, \quad (17)$$

где Ω – единичный куб; $\Omega = \{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 1\}$, шаг временной сети $\tau = 0.01$ с. Искомая функция должна удовлетворять начальному условию

$$u(0, x) = 0, \quad x \in (\Omega + \partial\Omega) = \bar{\Omega} \quad (18)$$

и на границе $\partial\Omega$ в области Ω граничному условию второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на пяти гранях куба и } \frac{\partial u}{\partial n} = 1 \text{ на шестой грани куба.} \quad (19)$$

Процедура решения задач 1–2 базируется на использовании алгоритма точного математического описания области Ω с помощью математических средств теории R-функций [19]. Визуализации расчетов тепловых полей задач 1 и 2 в сечении области Ω плоскостью $x_3 = 0.5$ в момент времени $\tau = 0.01$ с, представлены соответственно на рис. 2–3.

Полученные в ходе расчетов результаты показаны в табл. 1–2.

Значения искомой функции для задачи 1 представлены для двух точек области, находящихся вблизи центра куба. Выбор точек обусловлен тем фактом, что граничные условия удовлетворяются точно, но искомая функция вычисляется приближенно, соответственно, максимальная погрешность расчетов должна наблюдаться в центральной окрестности области.

Для представления искомой функции задачи 2 были выбраны точки области, находящиеся вблизи границы с ненулевым потоком тепла.

Возможности применения описанного алгоритма для расчета теплового поля в области сложной формы иллюстрируются на примере решения модельной краевой задачи нестационарной теплопроводности в многосвязной области (рис. 4).

Задача 3. Необходимо определить функцию

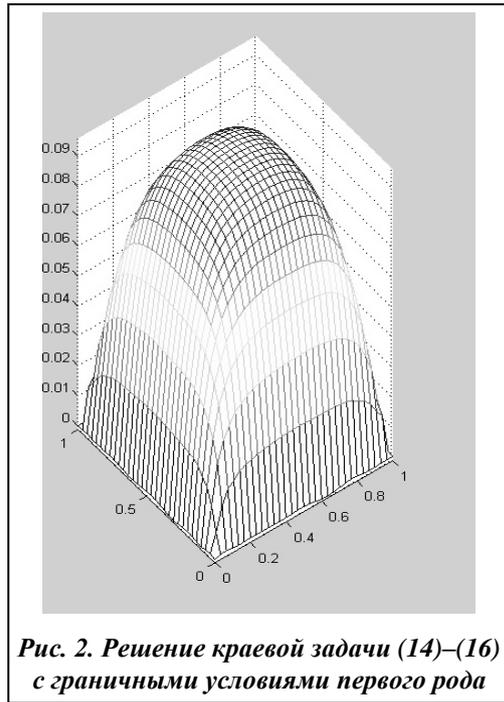


Рис. 2. Решение краевой задачи (14)–(16) с граничными условиями первого рода

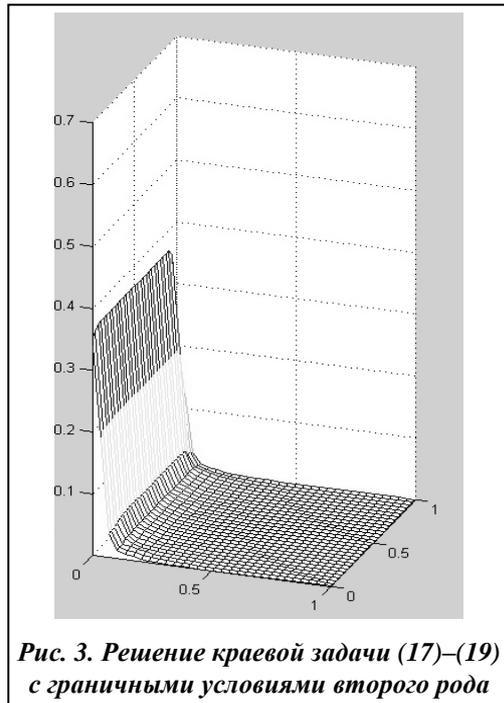


Рис. 3. Решение краевой задачи (17)–(19) с граничными условиями второго рода

$u(t, x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t, x), \quad 0 < t < T < \infty, \quad x \in \Omega,$$

где Ω – ограниченная $(N + 1)$ -связная область в трехмерном евклидовом пространстве E^3 , граница которой состоит из непустых связных компонент, то есть $\partial\Omega = \bigcup_{i=0}^N \Gamma_i$. Искомая функция должна удовлетворять начальному условию

Таблица 1. Зависимость функции решения от характеристики h пространственной сети для задачи (14)–(16)

Шаг пространственной сети, h	Значение функции $u(0.01; 0.49; 0.49; 0.49)$	Значение функции $u(0.01; 0.5; 0.5; 0.5)$
0,167	0.094088302866548	0.094095073164806
0,143	0.095621084550976	0.096016727240766
0,125	0.095075877115097	0.095082085475739
0,111	0.095396950629033	0.095649712478368
0,100	0.095297022995711	0.095295539345655
0,091	0.095671282184015	0.095867673607653
0,083	0.095323084200202	0.095315288483292
0,077	0.095666905392299	0.095819936601026
0,071	0.095490095679683	0.095491104724274
0,067	0.095679803345659	0.095803617911167
0,063	0.095758300837995	0.095758505753257
0,059	0.095587271349578	0.095731757782696
0,056	0.095769668052962	0.095746425796666
0,053	0.096064318024104	0.096168794973576
0,050	0.095996513957220	0.096005494577127

Таблица 2. Зависимость функции решения от характеристики h пространственной сети для задачи (17)–(19)

Шаг пространственной сети, h	Значение функции $u(0.01; 0.1; 0.5; 0.5)$	Значение функции $u(0.01; 0.2; 0.5; 0.5)$
0,167	0.356103583212085	0.013518184892680
0,143	0.291347832829917	0.015823643772412
0,125	0.226772932667498	0.016676365773822
0,111	0.162920423068060	0.016385293707875
0,100	0.099627361042551	0.015253303278751
0,091	0.036787944942235	0.013533529873013
0,083	0.037883335386148	0.014293598574627
0,077	0.038545369620322	0.014615937810047
0,071	0.038877191610569	0.014557883363034
0,067	0.038958541791670	0.014178555620788
0,063	0.038850713530865	0.013533529860623
0,059	0.038600745642128	0.013910098919635
0,056	0.038244753608850	0.014077793259437
0,053	0.037810508097547	0.014057107107772
0,050	0.037319402160581	0.013868931248364

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in (\Omega + \partial\Omega) = \bar{\Omega}$$

и на границе $\partial\Omega$ в области Ω граничному условию Дирихле

$$u = g(t, x), \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0.$$

Здесь φ, g – достаточно гладкие функции своих аргументов.

Проверка качества решения осуществляется на тестовой краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \frac{6 - x^2 - y^2 - z^2}{t}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (20)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \quad u(t, x) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{t}, \quad x \in \partial\Omega, \quad \partial\Omega = \bigcup_{i=0}^N \Gamma_i, \quad t > 0. \quad (21)$$

Следует отметить, что для упрощения изложения процедуры решения задачи функция, описывающая граничные условия, задана в общем виде и ее вид будет изменяться в зависимости от того, к какой части границы она будет иметь отношение.

На рис. 5–6 представлены результаты применения описанного подхода при решении модельной задачи (20)–(21).

Визуализирована приведенная погрешность – относительная погрешность, в которой абсолютная погрешность приближенного решения отнесена к максимальному в области Ω значению точного решения. Демонстрируемая погрешность обусловлена приближенными вычислениями. Решение показано в момент времени $t = 0.01$ с. в сечении области Ω плоскостью $x_3 = 0.5$.

Заключение

К достоинствам описанного подхода следует отнести следующее:

- получающееся решение представляется в сильной форме;
- алгоритм без усложнения распространяется на краевые задачи больших размерностей;
- сложная форма области решения не представляет трудностей при реализации алгоритма;
- метод прост в реализации.

Описанный метод протестирован для сложной задачи, что позволяет использовать его для исследования реальных процессов в машиностроительных изделиях.

Литература

1. Колодяжный В. М. Бессеточные методы в задачах моделирования физических процессов / В. М. Колодяжный, О. Ю. Лисина // Пробл. машиностроения. – 2010. – Т. 13, № 3. – С. 67–74.
2. Колодяжный В. М. / В. М. Колодяжный, О. Ю. Лисина // Численные схемы решения краевых задач на основе бессеточных методов с использованием РБФ и АРБФ //

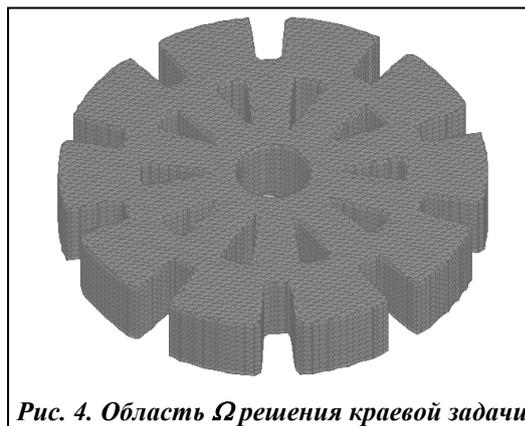


Рис. 4. Область Ω решения краевой задачи

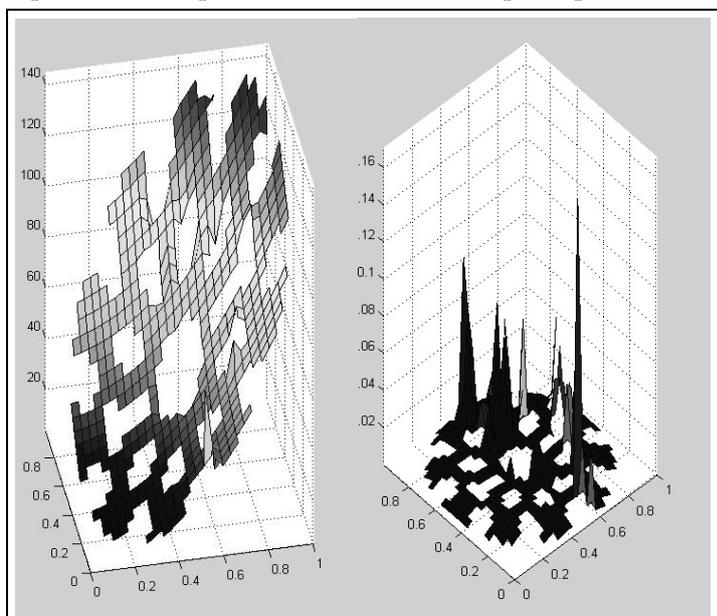


Рис. 5. Визуализация решения задачи в сечении области Ω плоскостью $x_3 = 0.5$ с шагом пространственной сети $h = 0.05$ и приведенной погрешности

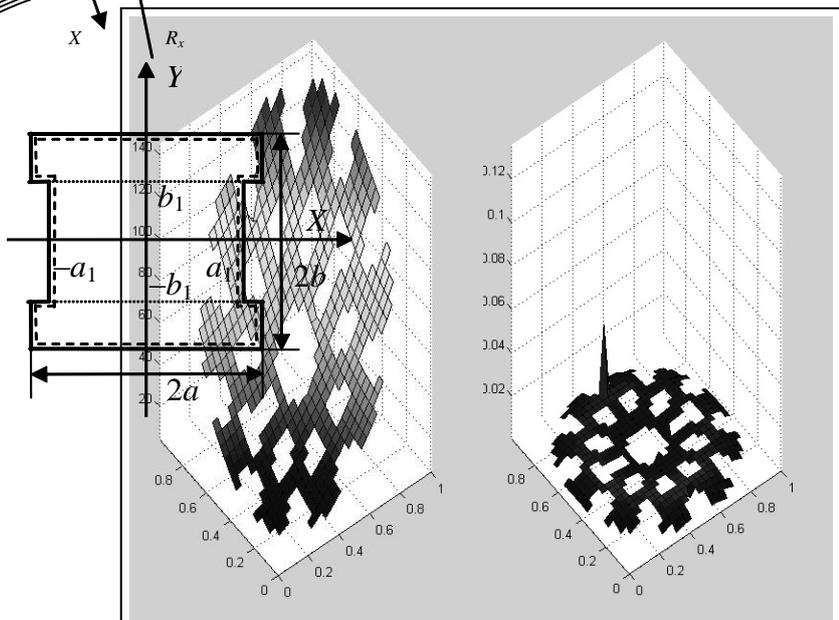
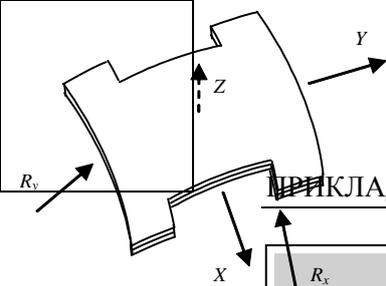


Рис. 6. Визуализация решения задачи в сечении области Ω плоскостью $x_3 = 0.5$ с шагом пространственной сети $h = 0.037$ и приведенной погрешности

- № 8–9. – С. 532–536.
7. *Hartree D. R.* Method for the Numerical or Mechanical Solution of Certain Types of Partial Differential Equations / D. R. Hartree, J. R. Womersley // Proc. Roy. Soc. – 1937. – Vol. 161. – P. 353–366.
 8. *Самарский А. А.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский, А. В. Гулин // М.: Наука, 1989. – 432 с.
 9. *Приближенное решение операторных уравнений* / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
 10. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
 11. *Карпиловская Э. Б.* О сходимости метода коллокации / Э. Б. Карпиловская // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151. – С. 766–769.
 12. *Петерсон И.* О кусочно-полиномиальной аппроксимации / И. Петерсон // Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1962. – Т. 24–32, № 1. – С. 141–154.
 13. *Frazer R. A.* Approximations to functions and to the solutions of differential equations / R. A. Frazer, W. P. Jones, S. W. Scan // London: Philosophical Mag. – 1937. – Vol. 7–25. – P. 740–746.
 14. *Hon Y. C.* On unsymmetric collocation by radial basis functions, Applied Mathematics and Computations / Y. C. Hon, R. Schaback. – 2001. – Vol. 119, № 2–3. – P. 177–186.
 15. *Fornberg B.* Stable computation of multiquadric interpolants for all values of the shape parameter / B. Fornberg, G. Wright // Comput. Math. Appl. – 2004. – Vol 47. – P. 497–523.
 16. *Breitkopf P.* Double grid diffuse collocation method / P. Breitkopf, G. Touzot, P. Villon // Comp. Mech. – 2000. – Vol. 25, № 2–3. – P. 199–206.
 17. *Zhu T.* A Modified Collocation Method and a Penalty Formulation for Enforcing the Essential Boundary Conditions in the Element Free Galerkin Method / T. Zhu, S. N. Atluri // Comp. Mech. – 1998. – № 21. – P. 211–222.
 18. *Лисина О. Ю.* Побудова 3D атомарних радіальних базисних функцій, що породжуються оператором Гельмгольца / О. Ю. Лисина // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Математика. Механіка. – 2009. – № 21. – С. 53–59.
 19. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.

Пробл. машиностроения. 2010. – Т. 13, № 4. – С.49–56.

3. *Колодяжний В. М.* Деякі властивості атомарних функцій багатьох змінних / В. М. Колодяжний, В. О. Рвачов // Доп. НАН України. – 2005. – № 1. – С. 12–20.
4. *Колодяжний В. М.* Фінітні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь з частинними похідними / В. М. Колодяжний, В. О. Рвачов // Доп. НАН України. – 2004. – № 5. – С. 17–22.
5. *Колодяжний В. М.* Атомарные функции трех переменных инвариантные относительно группы вращения / В. М. Колодяжний, В. А. Рвачов // Кибернетика и систем. анализ. – 2004. – № 6. – С. 118–130.
6. *Канторович Л. В.* Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных / Л. В. Канторович // Докл. АН СССР. – 1934.

Поступила в редакцию
31.10.11