УДК 621.9.06

Ю. А. Раисов, д-р техн. наук
И. В. Бычков, д-р техн. наук
Н. И. Бычков

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, e-mail: forma54@mail.ru)

СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ С СОПРЯЖЕНИЕМ КРИВЫХ ПО ПРОИЗВОДНЫМ

Предложена методика кубической B-сплайн аппроксимации точечно заданных кривых, позволяющая выполнить сопряжение сплайнов по 1-й и 2-й производным, что весьма важно при аппроксимации больших массивов, часто встречающихся в практике числового программного управления (ЧПУ). Работоспособность метода проиллюстрирована примерами.

Запропоновано методику кубічної B-сплайн апроксимації точково заданих кривих, яка дозволяє виконати спряження сплайнів за першою та другою похідними, що дуже важливо при апроксимації великих масивів, що часто зустрічаються в практиці числового програмного керування (ЧПК). Працездатність методу проілюстрована прикладами.

Введение

Задача аппроксимации с сопряжением *B*-сплайн кривых часто встречается в практике числового программного управления (ЧПУ). Как известно, до недавнего времени большинство устройств ЧПУ имело возможность задавать перемещение только по линейным и круговым траекториям. Поэтому управляющие программы (УП) для обработки сложных объектов рассчитывается путём кусочно-линейной аппроксимации исходных кривых. В результате УП содержит огромное число кадров линейного перемещения на малые величины в каждом из них, что практически исключает применение высокоскоростной обработки, которая в настоящее время всё больше входит в практику машиностроения.

Внедрение в ЧПУ сплайн-кривых позволяет решить задачу модификации УП, содержащих большое число линейных кадров, путём сплайн-аппроксимации или сплайн-интерполяции. Сплайн-интерполяция применяется при относительно небольшом числе линейных участков (~20÷30) и уже используется в системах ЧПУ [1–3]. Управляющие программы ЧПУ, в частности в авиастроении могут содержать сотни и тысячи кадров, и для их модификации использование сплайн-аппроксимации может оказаться более эффективным. Однако алгоритмы сплайн-аппроксимации намного сложнее алгоритмов сплайн-интерполяции и требуют большей вычислительной мощности для реализации. Практика показала, что с ростом числа узлов сплайна время счёта при аппроксимации увеличивается в степенной зависимости, что далеко не всегда приемлемо в ЧПУ. К тому же, при предварительной обработке массивов кадров нередко возникают ситуации, когда отдельные кадры УП надо оставить без изменения. Тогда возникает необходимость иметь несколько сплайн-кривых, сопряжённых между собой, в том числе и по производным. При сопряжении кривых по первой и второй производным сохраняется C^2-непрерывность сопрягаемых кривых, что обеспечит отсутствие скачков по скорости и ускорению в точке сопряжения в процессе обработки на станке с ЧПУ.

Основная часть

Алгоритм сопряжения по первым производным можно построить, используя общий метод *B*-сплайн интерполяции с заданием первой производной в начальной и конечной точках исходного массива [4]. Для построения алгоритма сопряжения по вторым производным требуется дополнительная разработка, что и сделано в настоящей статье.

Ниже рассмотрен метод *B*-сплайн аппроксимации, позволяющий выполнить сопряжение сплайновых кривых третьей степени по первой и второй производным. Алгоритм основан на использовании общего метода *B*-сплайн аппроксимации, к которому выполнены необходимые дополнения.

Пусть задан массив точек $\{\vec{Q}_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, выбраны допустимая точность аппроксимации δ, степень аппроксимирующей кривой p и число контрольных точек $(n + 1)$ первой итерации. Считаем, что $p > 1$, $n \geq p$, $n < m$.

Требуется найти *B*-сплайн кривую

$$\vec{C}(U) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(U)\vec{P}_i, \qquad U \in [0,1], \tag{1}$$

удовлетворяющую условиям

$$\vec{Q}_0 = \vec{C}(0), \qquad \vec{Q}_m = \vec{C}(1), \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left| \vec{Q}_k - \vec{C}(U_k) \right|^2 = \min. \tag{3}$$

В общем случае кривая $\vec{C}(U)$ не проходит через точки $\vec{Q}_k$ и ее точки $\vec{C}(U_k)$ не являются ближайшими к точкам $\vec{Q}_k$.

Для построения кривой $\vec{C}(U)$ требуется найти узловой вектор

$$U = \left\{ \underbrace{0,0,\ldots,0}_{p+1}, U_p, \ldots, U_n, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{p+1} \right\},$$

определить ненулевые базисные функции $N_{i,p}(U)$ и, используя критерий наименьших квадратов (3), составить систему уравнений, связывающих известные точки $\vec{Q}_k$ с неизвестными точками контрольного полигона P_i. В результате решения системы уравнений будут найдены точки $\{P_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m - 1$ (точки P_0, P_n определены условием (2).

Далее следует определить отклонения

$$\varepsilon_k = \left| \vec{Q}_k - \vec{C}(U_k) \right|, \quad k = 1, 2, \ldots, m - 1$$

и проверить условие

$$\varepsilon_k \leq \delta. \tag{4}$$

Если условие (4) не выполняется, следует увеличить число контрольных точек n и выполнить очередную итерацию. Если же все $\varepsilon_k \leq \delta$, можно уменьшить число контрольных точек и выполнить очередную итерацию. Окончание итерационного процесса может быть обусловлено различными правилами, в том числе и получением оптимального числа точек полигона.

Алгоритм решения задачи в пределах одной итерации включает следующие шаги.

1. Расчёт параметров $\overline{U}_k$. Используется метод хорд

$$\overline{U}_0 = 0; \qquad \overline{U}_k = \overline{U}_{k-1} + \frac{\left| Q_k - Q_{k-1} \right|}{d}; \qquad \overline{U}_n = 1; \qquad k = 1,2,\ldots,n-1,$$

$$d = \sum_{k=1}^{n} \left| Q_k - Q_{k-1} \right|. \tag{5}$$

2. Расчёт внутренних узлов узлового вектора. Вводится вспомогательный параметр h.

$$h = \frac{m+1}{n-p+1} \tag{6}$$

и далее, внутренний узел

$$U_{j+p} = (1-\alpha_j)\overline{U}_{i-1} + \alpha_j \overline{U}_i, \qquad j = 1,2,\ldots,n-p,$$

$$i = \operatorname{int}(jh), \qquad \alpha_j = jh - i.$$

3. Вычисляются значения базисных функций

$$N_{i,p}(\overline{U}_k), \qquad i = 0,1,\ldots n, \qquad k = 0,1,\ldots m$$

по формулам

$$N_{i,0}(U) = \begin{cases} 1, & U_i \le U < U_{i+1} \\ 0, & \text{вне интервала} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(U) = \frac{U - U_i}{U_{i+p} - U_i} N_{i,p-1}(U) + \frac{U_{i+p+1} - U}{U_{i+p+1} - U_{i+1}} N_{i+1,p-1}(U)\ .$$

4. Вычисляются вспомогательные векторы $\overline{R}_k$, введение которых обусловлено процессом оптимизации по критерию (3)

$$\vec{R}_k = \vec{Q}_k - N_{0,P}(\overline{U}_k)\vec{Q}_0 - N_{n,P}(\overline{U}_k)\vec{Q}_m, \qquad k = 1,....,m-1\,.$$

Тогда

$$\vec{Q}_k - \vec{C}(\overline{U}_k) = \vec{Q}_k - \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\overline{U}_k)\vec{P}_i = \vec{R}_k - \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,p}(\overline{U}_k)\vec{P}_i\,.$$

Обозначив

$$f = \sum_{k=1}^{m} \left| \vec{Q}_k - \vec{C}(\overline{U}_k) \right|^2$$

и учитывая, что минимум f достигается при $\dfrac{\partial f}{\partial l} = 0$, $l = 1, 2, \ldots, n-1$, после преобразований получим

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{m-1} N_{l,P}(\overline{U}_k) N_{i,P}(\overline{U}_k) \right) \vec{P}_i = \sum_{k=1}^{m-1} N_{l,P}(\overline{U}_k)\vec{R}_k\,.$$

5. Придавая l значения от 1 до $n-1$, имеем систему уравнений

$$\begin{vmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \\ \vec{P}_{n-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & & A_{1,n-1} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2,n-1} \\ & & & \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & & A_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{B}_1 \\ \vec{B}_2 \\ \\ \vec{B}_{n-1} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

где

$$A_{l,i} = \sum_{k=1}^{m-1} N_{l,p}(\overline{U}_k) N_{i,p}(\overline{U}_k), \qquad \vec{B}_l = \sum_{k=1}^{m-1} N_{l,p}(\overline{U}_k)\vec{R}_k\,,$$

$$l = 1,\ldots,n-1, \qquad i = 1,\ldots,n-1,$$

l – номер строки, i – номер столбца, он же индекс вектора $\vec{R}_k$

Решение системы (7) даёт значения координат контрольных точек $\vec{P}_1,\ldots,\vec{P}_{n-1}$, которые в совокупности с векторами $\vec{P}_0 = \vec{Q}_0$ и $\vec{P}_n = \vec{Q}_m$ образуют контрольный полигон.

6. Вычисляются значения координат точек $C(\overline{U}_k)$ в соответствии с (1)

$$\vec{C}(\overline{U}_k) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\overline{U}_k)\vec{P}_i, \qquad k = 1,\ldots m-1 \ .$$

7. Вычисляются отклонения $C(\overline{U}_k)$ от точек $\overline{Q}_k$

$$\varepsilon_k = \left|\vec{Q}_k - \vec{C}(U_k)\right|$$

и проверяется условие (4).

По результатам сравнения принимается решение о продолжении или прекращении итераций.

Теперь покажем, какие изменения и дополнения вводятся в описанный алгоритм, если требуется сопряжение сплайнов по производным. Решение задачи будет выполнено применительно к кубическим *B*-сплайнам, наиболее часто используемым в практике ЧПУ.

Пусть заданный исходный массив точек $\{\vec{Q}_k\}$ по причинам, изложенным выше, разбит на ряд секций, для каждой из которых требуется найти аппроксимирующую кубическую *B*-сплайн кривую.

Для первой секции по рассмотренному выше алгоритму находим аппроксимирующую *B*-сплайн кривую $\vec{C}_1(U) = \sum_{i=0}^{n_1} N_{i,3}(U)\vec{P}_i$ (n_1 – число контрольных точек, $N_{i,3}(U)$ – базисные функции 3-й степени для *B*-сплайн кривой первой секции). Теперь следует найти значения производных в конечной точке 1-й секции с тем, чтобы присвоить их значения производным в этой же точке, но принадлежащей начальной точке 2-й секции. Это нетрудно сделать, если сегменты *B*-сплайна представлены в виде многочленов, как это показано в [5]. Тогда для последнего сегмента первой секции будем иметь

$$\begin{aligned} X(U) &= A_X^{(n1)}U^3 + B_X^{(n1)}U^2 + C_X^{(n1)}U + D_X^{(n1)}, \\ Y(U) &= A_Y^{(n1)}U^3 + B_Y^{(n1)}U^2 + C_Y^{(n1)}U + D_Y^{(n1)}, \qquad U \in (U_{n1}, 1), \end{aligned} \tag{8}$$

n_1 – индекс последнего сегмента первой секции.

Взяв производную по параметру U от (8) и учитывая, что в конечной точке сплайна 1-й секции $U = 1$. получим

$$\begin{aligned} X'(1) &= 3A_X^{(n1)} + 2B_X^{(n1)} + C_X^{(n1)}, \\ X''(1) &= 6A_X^{(n1)} + 2B_X^{(n1)}, \\ X'''(1) &= 6A_X^{(n1)} \\ Y'(1) &= 3A_Y^{(n1)} + 2B_Y^{(n1)} + C_Y^{(n1)}, \\ Y''(1) &= 6A_Y^{(n1)} + 2B_Y^{(n1)}, \\ Y'''(1) &= 6A_Y^{(n1)}, \\ C_1'(1) &= \left[X'(1), Y'(1)\right], \\ C_1''(1) &= \left[X''(1), Y''(1)\right], \\ C_1'''(1) &= \left[X'''(1), Y'''(1)\right] . \end{aligned} \tag{9}$$

Полученные в (9) значения производных приравниваем значениям производных в начальной точке 2-й секции, для которой $U = 0$, т. е. потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$
\begin{aligned}
&C_1'(1) = C_2'(0),\\
&C_1''(1) = C_2''(0),\\
&C_1'''(1) = C_2'''(0).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Теперь рассмотрим первый сегмент 2-й секции. Для кубического B-сплайна он определён четырьмя базисными функциями $N_{0,3}(U)$, $N_{1,3}(U)$, $N_{2,3}(U)$, $N_{3,3}(U)$ и четырьмя векторами контрольных точек $\vec{P}_0, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, т. е.

$$\vec{C}_2(U) = \sum_{i=0}^{3} N_{i,3}(U)\vec{P}_i\,, \qquad U \in (0, U_4)\,. \tag{11}$$

Учёт производных при отыскании аппроксимирующей кривой 2-й секции потребует увеличения размерности узлового вектора и добавления контрольных точек. При учёте всех трёх производных окажется, что первый сегмент 2-й секции полностью определён значениями производных, полученных в (10) и дополнительными узлами узлового вектора, вводимыми для учёта производных. Покажем, что значения векторов $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ могут быть определены через $\vec{P}_0, C_2'(0), C_2''(0), C_2'''(0)$

Для этого базисные функции $N_{i,3}(U)$ запишем в виде

$$N_{i,3}(U) = a_i U^3 + b_i U^2 + c_i U + d_i\,. \tag{12}$$

Тогда для $\vec{C}_2(U)$ из (11) получим

$$\vec{C}_2(U) = \sum_{i=0}^{3} \left(a_i U^3 + b_i U^2 + c_i U + d_i\right)\vec{P}_i\,. \tag{13}$$

Последовательно применяя рекуррентное соотношение

$$N_{i,p}(U) = \frac{U - U_i}{U_{i+p} - U_i} N_{i,p-1}(U) + \frac{U_{i+p+1} - U}{U_{i+p+1} - U_{i+1}} N_{i+1,p-1}(U)\,, \tag{14}$$

для базисных функций $N_{i,3}(U)$ 1-го сегмента, получим

$$
\begin{aligned}
&N_{0,3}(U) = a_0 U^3 + b_0 U^2 + c_0 U + d_0\,,\\
&N_{1,3}(U) = a_1 U^3 + b_1 U^2 + c_1 U\,,\\
&N_{2,3}(U) = a_2 U^3 + b_2 U^2\,,\\
&N_{3,3}(U) = a_3 U^3, \qquad U \in (0, U_4).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Если число узлов узлового вектора 2-й секции n_2, то узловой вектор запишется в виде

$$U = \{0, 0, 0, 0, U_4, U_5, U_6, \ldots, U_{n2}, 1, 1, 1, 1\}, \tag{16}$$

Тогда, используя (12), (14), (15) и (16), имеем

$$
\begin{aligned}
&a_0 = -\frac{1}{U_4^3}, \qquad b_0 = \frac{3}{U_4^2}, \qquad c_0 = -\frac{3}{U_4}, \qquad d_0 = 1.\\
&a_1 = \frac{1}{U_4^3} + \frac{1}{U_4^2 U_5} + \frac{1}{U_4 U_5^2}, \qquad b_1 = -\frac{3}{U_4^2} - \frac{3}{U_4 U_5}, \qquad c_1 = \frac{3}{U_4}, \qquad d_1 = 0.\\
&a_2 = -\frac{1}{U_4^2 U_5} - \frac{1}{U_4 U_5^2} - \frac{1}{U_4 U_5 U_6}, \qquad b_2 = \frac{3}{U_4 U_5}, \qquad c_2 = 0, \qquad d_2 = 0.\\
&a_3 = \frac{1}{U_4 U_5 U_6}, \qquad b_3 = 0, \qquad c_3 = 0, \qquad d_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Из (13) при $U = 0$ получаем

$$\vec{C}_2(0) = d_0\vec{P}_0 = \vec{P}_0 .$$

Продифференцировав (13) по U и учтя значения c_0 и c_1 из (17), получаем

$$\vec{C}_2^{'}(0) = -\frac{3}{U_4}\vec{P}_0 + \frac{3}{U_4}\vec{P}_1 .$$

Отсюда

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_0 + \frac{U_4}{3}C_2^{'}(0). \tag{18}$$

Этот результат совпадает с известным из общей теории дифференцирования B-сплайн функций [3, 3].

Взяв вторую производную от (13) по U и используя соотношения (15) для $\vec{C}_2^{''}(0)$ имеем

$$\vec{C}_2^{''}(0) = 2b_0P_0 + 2b_1P_1 + 2b_2P_2 .$$

С учётом b_i из (17) для $\vec{P}_2$ получим

$$\vec{P}_2 = \frac{U_4U_5}{6}C_2^{''}(0) + \left(1 + \frac{U_5}{U_4}\right)\vec{P}_1 - \frac{U_5}{U_4}\vec{P}_0. \tag{19}$$

Взяв третью производную от (13), имеем:

$$\vec{C}_2^{'''}(U) = 6\sum_{i=0}^{3} a_iP_1 .$$

Учтя значение a_i из (17) для $\vec{P}_3$ получим:

$$\vec{P}_3 = \frac{U_4U_5U_6}{6}\overline{C}_2^{'''}(0) + \frac{U_5U_6}{U_4^2}\left(\vec{P}_0 - \vec{P}_1\right) + \left(\frac{U_6}{U_4} + \frac{U_6}{U_5}\right)\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) + \vec{P}_2$$

Таким образом, показана принципиальная возможность сопряжения кубических B-сплайнов по трём производным.

Практически необходимо принять во внимание два обстоятельства.

Первое. Кубический B-сплайн имеет непрерывность C^2, и на границах сегментов внутри сплайна третья производная претерпевает разрыв. Поэтому добиваться сопряжения двух кубических B-сплайнов по 3-й производной бессмысленно.

Второе. Сопряжение B-сплайнов по 1-й и 2-й производным предопределяет положение векторов $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, которые будут исключены из процедуры оптимизации при построении аппроксимирующей кривой. Это означает, что точность аппроксимации может ухудшиться и возможны ситуации, когда заданная точность не достигается.

Теперь вернёмся к изменениям и дополнениям алгоритма аппроксимации с учётом необходимости сопряжения секций по 1-й и 2-й производным. Пусть 2-я секция должна охватывать массив точек $\{Q_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, m_2$, заданы степень аппроксимирующей кривой p и точность аппроксимации δ, выбрано число контрольных точек первой итерации n_2, заданы значения $\vec{C}_2^{'}(0)$ и $\vec{C}_2^{''}(0)$.

1. Операции первого шага алгоритма остаются без изменений, т. е. величины $\overline{U}_k$ рассчитываются по соотношениям (5).

2. Вспомогательный параметр h рассчитывается из выражения (6) для расчёта узлового вектора

$$h = \frac{m2+1}{n2 - p + 1 + q_1 + q_2},$$

где

$$q_1 = \begin{cases} 1, \text{ есть сопряжение по 1-й производной} \\ 0, \text{ нет сопряжения по 1-й производной,} \end{cases}$$

$$q_2 = \begin{cases} 1, \text{ есть сопряжение по 2-й производной} \\ 0, \text{ нет сопряжения по 2-й производной.} \end{cases}$$

Параметры α_j, определяющие внутренние узлы узлового вектора

$$\alpha_j = jh - i, \quad I = \mathrm{int}(jh), \quad j = 1, \ldots, n - p + q_1 + q_2.$$

Внутренние узлы узлового вектора

$$U_{j+p} = (1-\alpha_j)\overline{U}_{i-1} + \alpha_j \overline{U}_i.$$

Узловой вектор имеет вид

$$U = \left\{ \underbrace{0,0,\ldots,0}_{p+1}, U_{p+j}, \ldots, U_{n_2+q_1+q_2}, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{p+1} \right\}.$$

3. Вычисляются значения базисных функций

$$N_{i,p}(\overline{U}_k), \quad i = 0, \ldots, n_2 + q_1 + q_2, \quad k = 0, \ldots, m_2.$$

4. Вычисляются векторы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ по соотношениям (18) и (19) соответственно.

5. Вычисляются векторы $\vec{R}_k$ с учётом того, что $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ должны быть исключены из процедуры оптимизации

$$\vec{R}_k = \vec{Q}_k - N_{0,P}(\overline{U}_k)P_0 - q_1 N_{1,P}(\overline{U}_k)P_1 - q_2 N_{2,P}(\overline{U}_k)P_2 - N_{n_2+q_1+q_2,P}(\overline{U}_k)\vec{Q}_{m2},$$

$$k = 1 + q_1 + q_2, \ldots, m_2 - 1.$$

6. Система уравнений (7) приобретает следующий вид

$$\begin{vmatrix} (1-q_1)\vec{P}_1 \\ (1-q_2)\vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \\ \vec{P}_{n2-1+q_1+q_2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} (1-q_1)A_{11} & (1-q_1)A_{12} & \cdots & (1-q_1)A_{1,n2-1+q_1+q_2} \\ (1-q_1)A_{21} & (1-q_2)A_{22} & \cdots & (1-q_2)A_{2,n2-1+q_1+q_2} \\ (1-q_1)A_{31} & (1-q_2)A_{32} & \cdots & A_{3,n2-1+q_1+q_2} \\ (1-q_1)A_{n2-1+q_1+q_2,1} & (1-q_2)A_{n2-1+q_1+q_2,2} & \cdots & A_{n2-1+q_1+q_2,n2-1+q_1+q_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1-q_1)\vec{B}_1 \\ (1-q_2)\vec{B}_2 \\ \vec{B}_3 \\ \vec{B}_{n2-1+q_1+q_2} \end{vmatrix},$$

где

$$A_{l,i} = \sum_{k=1}^{m2-1} N_{l,p}(\overline{U}_k) N_{i,p}(\overline{U}_k), \qquad \vec{B}_l = \sum_{k=1}^{m2-1} N_{l,p}(\overline{U}_k)\vec{R}_k,$$

$$l = 1 + q_1 + q_2, \ldots, n_2 + q_1 + q_2 - 1, \quad i = 1 + q_1 + q_2, \ldots, n_2 + q_1 + q_2 - 1..$$

В результате решения системы определяются векторы контрольных точек, образующие контрольный полигон. Дальнейшие шаги остаются прежними. Рассмотренная схема пригодна и для вычислений при отсутствии сопряжения по производной. В этом случае параметры $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$ и схема приобретает вид, изложенный для 1-й секции.

Приведём пример, иллюстрирующий изложенные положения.

Пусть заданный массив точек

$$\{Q_k\} = \{(0,0),(50,310),(100,440),(200,600),(400,800),(600,900),(700,950),$$
$$(800,980),(900,990),(1000,1000),(1100,990),(1200,980),(1300,950),$$
$$(1400,900),(1600,800),(1800,600),(1900,440),(1950,310),(2000,0)\}$$

разбит на 2 секции:

1-я секция – 10 точек от (0,0) до (1000,1000);
2-я секция – 10 точек от (1000,1000) до (2000.0).

Точка $\vec{Q}_9(1000{,}1000)$ – общая точка двух секций, и в ней должно быть получено сопряжение по 1-й и 2-й производным.

Пусть для первой итерации при построении аппроксимирующей кривой 1-й секции принято $n = 3$ (т. е. $n + 1 = 4$ – контрольные точки), $p = 3$, заданная точность аппроксимации $\delta \le 10$.

1.Рассчитываем параметры $\overline{U}_k$ по (5)

$$\overline{U}_0 = 0,\quad \overline{U}_1 = 0{,}2,\quad \overline{U}_2 = 0{,}29,\quad \overline{U}_3 = 0{,}41,\quad \overline{U}_4 = 0{,}59,$$
$$\overline{U}_5 = 0{,}73,\quad \overline{U}_6 = 0{,}8,\quad \overline{U}_7 = 0{,}87,\quad \overline{U}_8 = 0{,}94,\quad \overline{U}_0 = 1.$$

2.Параметры

$$h = \frac{m+1}{n-p+1} = 10,\qquad i = \operatorname{int}(jh),\qquad j = 1,\qquad n - p = 0.$$

Узловой вектор не имеет внутренних узлов

$$U = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$$

Базисные функции 3-й степени будут иметь выражения

$$\left.\begin{aligned} N_{0,3}(U) &= -U^3 + 3U^2 - 3U + 1,\\ N_{1,3}(U) &= 3U^3 - 6U^2 + 3U,\\ N_{2,3}(U) &= -3U^3 + 3U^2,\\ N_{3,3}(U) &= U^3. \end{aligned}\right.\qquad U \in (0,\ 1)$$

Далее вычисляем значения базисных функций в точках $\overline{U}_k$, $k = 1, \dots, 8$, рассчитываем векторы $\vec{R}_k$, коэффициенты A_{l_i}, векторы $\vec{B}_l$ и записываем систему уравнений. В данном случае контрольный полигон составляют векторы $\vec{P}_0 = \vec{Q}_0, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3 = \vec{Q}_9$. Подлежат определению векторы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$. Система уравнений имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{B}_1 \\ \vec{B}_2 \end{vmatrix}.$$

Вычисляем

$$A_{11} = \sum_{k=1}^{8} N_{1,3}(\overline{U}_k) N_{1,3}(\overline{U}_k) = 0{,}6490,\qquad A_{12} = \sum_{k=1}^{8} N_{1,3}(\overline{U}_k) N_{2,3}(\overline{U}_k) = 0{,}4911,$$
$$A_{21} = \sum_{k=1}^{8} N_{2,3}(\overline{U}_k) N_{1,3}(\overline{U}_k) = 0{,}4911,\qquad A_{22} = \sum_{k=1}^{8} N_{2,3}(\overline{U}_k) N_{2,3}(\overline{U}_k) = 0{,}7596,$$
$$\vec{B}_1 = \sum_{k=1}^{8} N_{1,3}(\overline{U}_k) \vec{R}_k = (222{,}532, 842{,}852),\qquad \vec{B}_2 = \sum_{k=1}^{8} N_{2,3}(\overline{U}_k) \vec{R}_k = (356{,}476, 1625{,}706).$$

Расчёты сведены в таблицу

Результаты расчётов B-сплайн аппроксимации для первой секции

№ т.	$\overline{U}_k$	$N_{0,3}$	$N_{1,3}$	$N_{2,3}$	$N_{3,3}$	$\Sigma N_{i,3}$	$\vec{Q}_k$	$\vec{R}_k$	$\vec{C}(\overline{U}_k)$	ε_k
0	0	1,0	–	–	–	1,00	0,0	–	0, 0	0
1	0,2	0,512	0,384	0,096	0,008	1,00	50,310	42,302	45,3, 312	9,3
2	0,29	0,358	0,439	0,179	0,024	1,00	100,440	76,416	100,3, 440,9	0,94
3	0,41	0,205	0,428	0,298	0,069	1,00	200,600	131,531	263,3, 599	3,4
4	0,59	0,069	0,298	0,428	0,205	1,00	400,800	195,595	405,4, 794,5	7,7
5	0,73	0,02	0,16	0,432	0,388	1,00	600,900	312,512	593,7, 906,7	9,2
6	0,8	0,008	0,096	0,384	0,512	1,00	700,950	188,438	695,9, 948	4,1
7	0,87	0,002	0,044	0,295	0,659	1,00	800,980	141,321	801, 977,9	2,4
8	0,94	$2\cdot 10^{-4}$	0,01	0,159	0,831	1,00	900,990	69,159	907,9, 995,4	9,6
9	1,0	–	0,00	–	1,00	1,00	1000,1000	–	1000, 1000	0

Решение системы уравнений даст

$$\vec{P}_1 = (-24{,}542), \qquad \vec{P}_2 = \left(485{,}1000\right).$$

Контрольный полигон

$$\{\vec{P}_i\} = \{(0{,}0), (-24{,}542), (485{,}1000), (1000{,}1000)\}.$$

Из таблицы видно, что заданная точность достигается при 1-й итерации.

При полученном контрольном полигоне выражения координат представляются в виде полиномов

$$X(U) = 527U^3 + 1599U^2 - 721U, \qquad Y(U) = -374U^3 - 252U^2 + 1626U, \qquad U \in (0{,}1).$$

Значение производных в точке $\vec{Q}_9$, (т. е. при $U = 1$)

$$X'(1) = 1545, \qquad Y'(1) = 0,$$

$$X''(1) = 36, \qquad Y''(1) = -2748.$$

Тогда для начальной точки второй секции принимаем

$$C_2'(0) = (1545{,}0); \qquad C_2''(0) = (36,\ -2748).$$

Вторая секция. Возьмём для первой итерации $n = 3$. С учётом требования сопряжения по 1-й и 2-й производным получим $n + q_1 + q_2 = 5$ и контрольный полигон будет иметь 6 точек. Из них заданы $\vec{P}_0 = \vec{Q}_9,\ \vec{P}_5 = \vec{Q}_{18}$. По значениям $\vec{P}_0,\ C_2'(0),\ C_2''(0)$ и узловому вектору второй секции определяются векторы $\vec{P}_1,\ \vec{P}_2$. Остаются неизвестными векторы $\vec{P}_3,\ \vec{P}_4$.

Находим значение параметра

$$h = \frac{m+1}{n-p+3} = \frac{10}{3}.$$

Определяем внутренние узлы узлового вектора, т. к. $j = 1, 2$, $\alpha_1 = 1/3$, $\alpha_2 = 2/3$ узловой вектор

$$U = (0, 0, 0, 0, 0{,}15, 0{,}53, 1, 1, 1, 1).$$

Рассчитываем по (18) и (19) векторы $\vec{P}_1,\ \vec{P}_2$ соответственно

$$\vec{P}_1 = (1077,\ 1000),$$

$$\vec{P}_2 = (1351,\ 964).$$

Рассчитываем значения базисных функций $N_{i,3}(\overline{U}_k),\ i = 0,\ldots 5,\ k = 1,\ldots 8$, векторы $\vec{R}_k$ ($k = 1, \ldots, 8$) и $\vec{B}_l$ ($k = 3, 4$), составляем систему уравнений

$$\begin{vmatrix} \vec{P}_3 \\ \vec{P}_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} \\ A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{B}_3 \\ \vec{B}_4 \end{vmatrix}$$

Получим

$$\vec{P}_3 = (1834, 684),$$
$$\vec{P}_4 = (2005,\ 251).$$

Далее вычисляем значения сплайна в точках $\overline{U}_k$ и определяем отклонения этих точек от $\vec{Q}_k$. Опуская расчёты, укажем лишь, что при определении векторов $\vec{R}_k$ следует использовать выражение

$$\vec{R}_k = \vec{Q}_k - N_{0,3}(\overline{U}_k)\vec{P}_0 - N_{1,3}(\overline{U}_k)\vec{P}_1$$
$$- N_{2,3}(\overline{U}_k)\vec{P}_2 - N_{5,3}(\overline{U}_k)\vec{Q}_{18}, \qquad k = 3,\ldots,8.$$

Эти же пределы изменения k берутся при расчёте коэффициентов A_{li} и векторов $\vec{B}_l$. В итоге получаем, что заданная точность аппроксимации выполняется во всех точках $\vec{C}(\overline{U}_k)$, кроме одной: $\varepsilon_4 = \left|\vec{Q}_4^{(2)} - \vec{C}(\overline{U}_4)\right| = 12{,}8,\ \ \overline{U}_4 = 0{,}266$.

Если критически важно получение точности $\varepsilon_k \le 10$ и в этой точке, то следует взять $n = 4$ и выполнить ещё одну итерацию. При этом получим $h = 4/10$, $j = 1, 2, 3$, узловой вектор будет иметь 3 внутренних узла, изменится положение векторов $\vec{P}_1,\ \vec{P}_2$, контрольный полигон составят 7 контрольных точек, из которых $\vec{P}_0, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_6$ определены, а $\vec{P}_3, \vec{P}_4, \vec{P}_5$ будут определены в результате оптимизации.

В заключение приведём график аппроксимирующей кривой (рис. 1), графики первых производных $X'(U)$, $Y'(U)$ для 1-й и 2-й секций (рис. 2) и графики вторых производных $X''(U)$, $Y''(U)$ для 1-й и 2-й секций (рис. 3).

Выводы

1. Показано, что в практике ЧПУ существует необходимость сопряжения сплайн-кривых, образованных при аппроксимации больших кусочно-линейных массивов данных.

2. Отмечено, что для сохранения неизменных величин скорости и ускорения при переходе с одной сплайн-кривой на другую требуется сопряжение сплайнов по 1-й и 2-й производным.

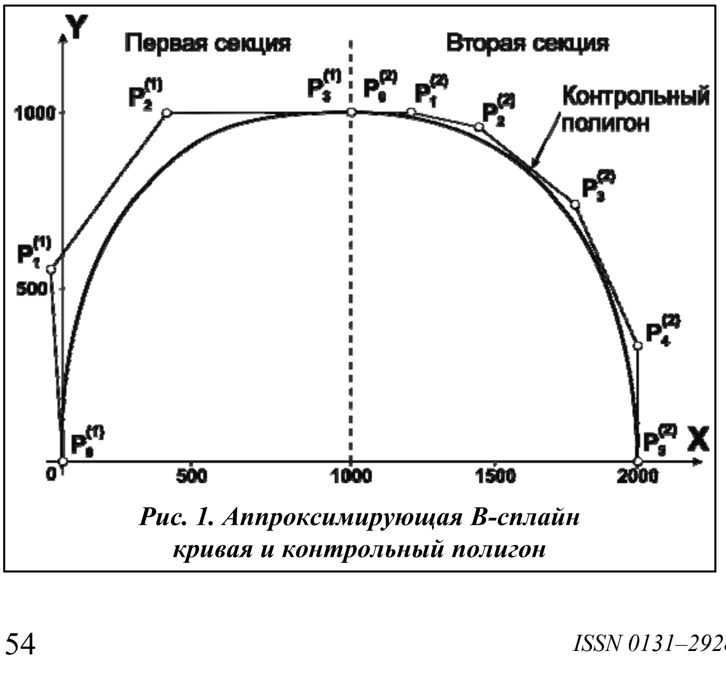

Рис. 1. Аппроксимирующая B-сплайн кривая и контрольный полигон

3. Получены соотношения, позволяющие вычислить точки контрольного полигона сопрягающегося сплайна, обеспечивающие сохранение значений 1-й и 2-й производных в точке сопряжения.

4. Разработаны дополнения к общему методу B-сплайн аппроксимации с учётом обеспечения непрерывности C^2 при сопряжении кубических B-сплайн кривых.

Работоспособность разработанного метода проиллюстрирована примером.

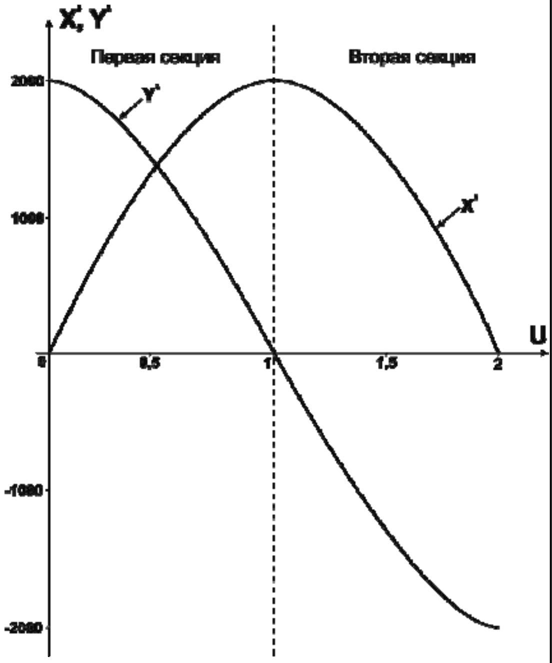

Рис. 2. Графики первых производных перемещений по осям X' ***и*** Y'

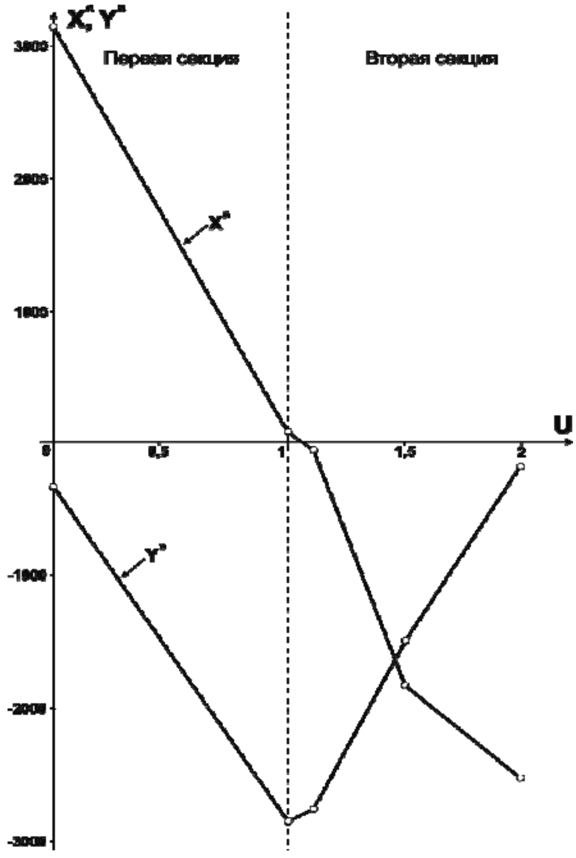

Рис. 3. Графики вторых производных перемещений по осям X'' ***и*** Y''

Литература

1. *Sinumeric* 840D/840Di/810D Руководство по программированию. Расширенное программирование. – SIEMENS. – 2001. – 650 с. Также доступен в http://www.siemens.com.
2. *GE Fanuc* Automation. Series 16i/160i/160is-MB. Series 18i/180i/180is-MB5. Operator's Manual. – Fanuc. – 2002. – 1257 p. Также доступен в http:// www.fanuc.com
3. *PC-based* Controller with Real-time Look-ahead NURBS Interpolator [Text] / H. T. Yau1, J. B. Wang, C. Y. Hsu, C. H. Yeh // Computer-Aided Design & Applications. – 2007. – Vol. 4. – № 1–4. – P. 331–340.
4. *Piegle L.* The NURBS book [Text] / L. Piegle, W. Tiller. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer. – 1997. – 578 p.
5. *Раисов Ю. А.* B-сплайн интерполяция для двухуровневых систем ЧПУ [Текст] / Ю. А. Раисов, И. В. Бычков, П. А. Кулаков // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2008. – №5–6. – С. 71–74.

Поступила в редакцию
02.03.12