4. *Описание* изобретения к патенту России RU 2 234 626 Способ автоматического и непрерывного изменения крутящего момента и скорости вращения выходного вала в зависимости от сопротивления движению и устройство для его осуществления / И. В. Волков. – 27.03.2004.
5. Pat. Great Britain GB2238090 (A). Power transmission system comprising two sets of epicyclic gears / John Harries. – 1991. – 11 p.
6. *Предварительный* пат. Республики Казахстан № 3208 Передача с автоматически регулируемой скоростью / К. С. Иванов. – 15.03.1996.
7. *Пат.* 2398989 RU. Способ автоматического и непрерывного изменения крутящего момента и скорости вращения выходного вала в зависимости от сопротивления движению и устройство для его осуществления / К. С. Иванов, Е. К. Ярославцева. – 10.09.2010. – 10 с.
8. *Ivanov K. S.* The Question of the Synthesis of Mechanical Automatic Variable Speed Drives / K. S. Ivanov // Proc. of the Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Vol.1, Politechnico di Milano, Italy, August 29–Sept 2, 1995. – P. 580–584.
9. *Ivanov K. S.* Discovery of the Force Adaptation Effect / K. S. Ivanov // Proc. of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Sci. V. 2. April 1–4, 2004, Tianjin, China. – P. 581–585.
10. *Ivanov K. S.* Gear Automatic Adaptive Variator with Constant Engagement of Gears / K. S. Ivanov // Proc. of the 12th World Congress in Mechanism and Machine Sci. Besancon. France. 2007, Vol. 2. – P. 182–188.
11. *Иванов К. С.* Функциональные свойства бесступенчатых зубчатых адаптивных трансмиссий / К. С. Иванов, А. А. Джомартов // Журн. объединен. ин-та машиностроения. Механика механизмов, машин и материалов. – 2010. – № 3. – С. 45–50.

Поступила в редакцию
15.05.12

УДК 621.9.06

Ю. А. Раисов, д-р техн. наук
И. В. Бычков, д-р. техн. наук
Н. И. Бычков

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, e-mail forma54@mail.ru)

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ B-СПЛАЙН КРИВОЙ

Предложен метод вычисления длины B-сплайн кривой. Метод основан на представлении B-сплайн кривой в виде многочлена в пределах каждого сегмента B-сплайна и использовании формулы Симпсона (парабол) для численного интегрирования. Методика проиллюстрирована примером.

Запропоновано метод обчислення довжини B-сплайн кривої. Метод ґрунтується на представленні B-сплайн кривої у вигляді багаточлена в межах кожного сегмента B-сплайна і використанні формули Сімпсона (парабол) для чисельного інтегрування. Методика проілюстрована прикладом.

Введение

Одной из задач, решение которой обязательно при организации поддержки сплайн-интерполяции, является определение длины сплайн-кривой. Знание длины кривой необходимо, во-первых, для точного выхода в конечную точку сплайна и, во-вторых, для определения точки начала торможения при необходимости перехода на более низкую скорость.

Формат задания сплайн-кривой не содержит сведений о длине сплайна. В частности, B-сплайн задаётся показателем степени кривой p, узловым вектором U и координатами точек контрольного полигона $\{\vec{P}_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Некоторое представление о длине сплайн-кривой можно получить, если вычислить сумму длин хорд, соединяющих точки контрольного полигона. Более точные данные могут быть получены в системе CAD при построении сплайн-кривой по заданному массиву точек $\{\vec{Q}_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

В этом случае длина ломаной линии, соединяющей точки $\{\vec{Q}_k\}$,

$$L = \sum_{k=1}^{m} \left| \vec{Q}_k - \vec{Q}_{k-1} \right| < l_{SP},$$

где l_{SP} – длина сплайн-кривой.

Такая предварительная оценка сплайна может быть использована для построения алгоритма определения точки начала торможения и точки позиционирования, как это предложено в работе [1]. Непосредственное вычисление длины сплайна выполнено в работах [2, 3]. В работе [2] это сделано применительно к А-сплайнам (Akima-spline), задаваемым в виде полиномов третьей степени, в работе [3] – применительно к NURBS-сплайнам. В обоих случаях для расчёта длин используется формула Симпсона (парабол), но оценки точности хотя и близки, но выполнены по-разному. О различиях подходов авторов [2] и [3] будет сказано ниже.

Основная часть

Рассмотрим решение задачи применительно к В-сплайнам. Как известно [4], В-сплайн описывается векторным выражением

$$\vec{C}(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \vec{P}_i, \tag{1}$$

где $\vec{P}_i$ – контрольные точки, образующие контрольный полигон; $N_{i,p}(u)$ – базисные функции степени p, задаваемые соотношениями $N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u_i < u < u_{i+1} \\ 0, & u \notin (u_i, u_{i+1}) \end{cases}$,

$N_{i,p}(u) = \dfrac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \dfrac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$ u – параметр, $u \in (0,1)\, u \in (0,1)$, а величины u_i заданы узловым вектором $U = \left\{ \underbrace{0,0,\ldots,0}_{p+1}, u_{p+1}, \ldots, u_n, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{p+1} \right\}$.

В общем случае длина (i-го) сегмента параметрически заданной кривой (1) определяется интегралом

$$l_i = \int_{U_i}^{U_{i+1}} \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} \right) du. \tag{2}$$

Интеграл (2) не берётся в элементарных функциях, и для его вычисления используем формулу Симпсона (парабол)

$$l = \int_{X_0}^{X_n} y dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots.. + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right), \tag{3}$$

где $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$ – шаг вычислений, $y_0, \ldots, y_n$ – значения подынтегральной функции в точках $x_0, \ldots, x_n$, n – число интервалов разбиения промежутка $(x_n - x_0)$, должно быть чётным.

В выражение (2) введём обозначение $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{du}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{du}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{du}\right)^2} = dl(u)$

Тогда формула (2) с учётом (3) принимает следующий вид:

$$l_i = \int_{u_i}^{u_{i+1}} dl(u)du = \frac{u_{i+1}-u_i}{3\cdot 2^k}\left(dl(u_0)+4dl(u_1)+2dl(u_2)+\ldots+2dl(u_{n-2})+4dl(u_{n-1})+dl(u_n)\right), \tag{4}$$

$$n = 2^k, \quad k = 1,2,\ldots .$$

Основные трудности при применении формулы (4) связаны с вычислениями величин $dl(u_j)$. В работе (2), в которой рассмотрены А-сплайны, трудностей при вычислении величин $dl(u_j)$ нет, а оценка точности выполняется проверкой неравенства

$$\frac{l_{2n}-l_n}{2^p-1} < \varepsilon , \tag{5}$$

где l_{2n}, l_n – значения интеграла при числе разбиений интервала $2n$ и n соответственно, p – порядок точности метода (для формулы парабол $p = 4$), ε – заданная погрешность определения длины. При выполнении неравенства (5) длина кривой принимается

$$l = l_{2n} + \frac{l_{2n}-l_n}{2^p-1} . \tag{6}$$

В работе (3) для упрощения вычислений производных NURBS-сплайна авторы предлагают представить его в интервале искомой длины в виде многочлена Эрмита 3-й или 5-й степени и уже для него применять формулу (4). При этом оценку точности результата выполняют по неравенству

$$0,1(l_{2n} - l_n) < \varepsilon.$$

Вернёмся к рассмотрению В-сплайна. Используя методику, описанную в [5], представим каждый сегмент В-сплайн кривой в виде многочлена степени p. В частности, для кубического В-сплайна выражения для координат будут иметь вид

$$X, Y, Z(U) = A_{X,Y,Z}u^3 + B_{X,Y,Z}u^2 + C_{X,Y,Z}u + D_{X,Y,Z}, \quad u \in (u_i, u_{i+1}) \tag{6}$$

По выражению (6) при известных значениях u_j производные $X'(u)$, $Y'(u)$, $Z'(u)$ выполняется просто, а по ним – и значение $dl(u_j)$. Далее для расчёта l по формуле (4) может быть использована одна из двух схем:

1. Величина l подсчитывается для каждого i-го сегмента кривой (т. е. в пределах каждого узлового интервала), а затем длины сегментов суммируются $l = \sum_{i=1}^{m+1} l_i$, где m – число внутренних узлов узлового вектора. В этом случае значения коэффициентов A, B, C, D в выражениях (6) для координат остаются неизменными при расчёте l_i в пределах сегмента.

2. Величина l рассчитывается для всей В-сплайн кривой. В этом случае для 1-й итерации берётся интервал (0–1), который делится пополам, величина l рассчитывается по формуле

$$l_1 = \frac{1}{6}\left(dl_0 + 4dl_1 + dl_2\right);$$

$$dl_0 = \sqrt{X'^2(0) + Y'^2(0) + Z'^2(0)};$$

$$dl_1 = \sqrt{X'^2(0,5) + Y'^2(0,5) + Z'^2(0,5)};$$

$$dl_2 = \sqrt{X'^2(1) + Y'^2(1) + Z'^2(1)}.$$

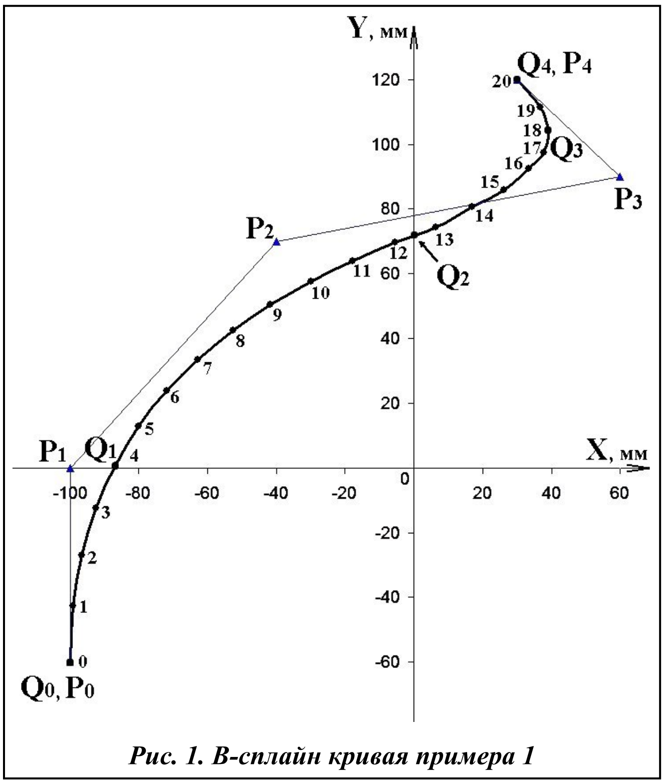

Рис. 1. В-сплайн кривая примера 1

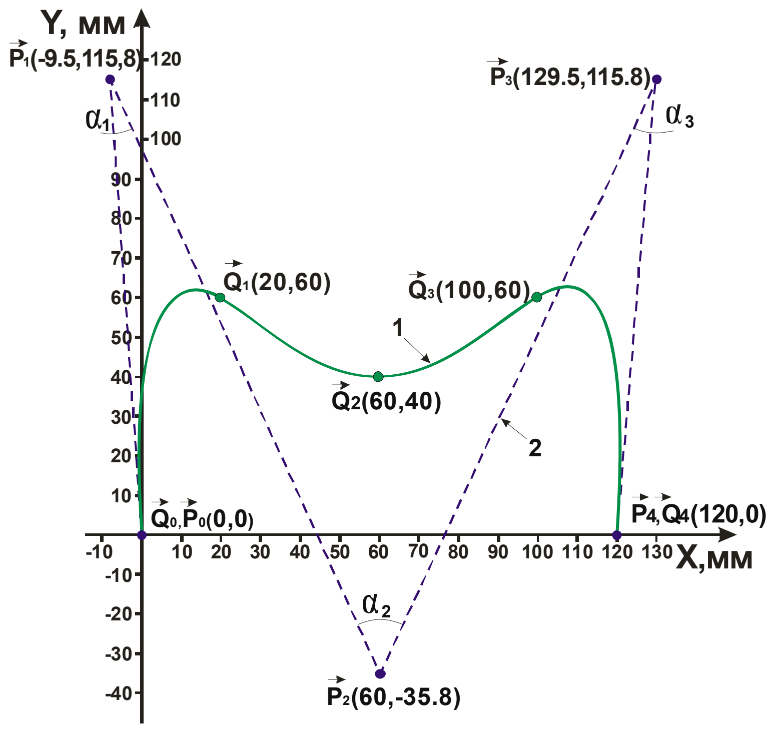

Рис. 2. B-сплайн кривая примера 2

Далее каждый из субинтервалов делится пополам, дополнительно рассчитываются значения $dl(0{,}25)$ и $dl(0{,}75)$ и по (4) вычисляется l и т.д. При этом надо следить, в какой из узловых интервалов попадают расчётные точки и использовать соответствующие этому узловому интервалу коэффициенты в выражениях координат X, Y, Z. При использовании этой схемы независимо от вида B-сплайн кривой и узлового вектора шаги вычислений всегда одни и те же: 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625 и т. д.

Оценка точности в обоих случаях выполняется проверкой неравенства (6). Практически расчёт ведётся до получения одинаковых значений l_n и l_{2n}, выраженных в целых дискретах.

Приведём несколько примеров, демонстрирующих применение изложенных положений.

Пример 1. B-сплайн (рис. 1) задан следующими данными: $p = 3$, $U = (0, 0, 0, 0, 0{,}5 , 1, 1, 1, 1)$, $\{\vec{P}_i\} = \{(-100,-60),(-100,0),(-40,70),(60,90),(30,120)\}$

Представление B-сплайна в виде полинома даёт такие выражения:

$$X(u) = \begin{cases} -160u^3 + 360u^2 - 100, & u \in (0;0{,}5) \\ -720u^3 + 1200u^2 - 420u - 30, & u \in (0{,}5;1), \end{cases}$$

$$Y(u) = \begin{cases} 100u^3 - 300u^2 + 360u - 60, & u \in (0;0{,}5) \\ 260u^3 - 540u^2 + 480u - 80, & u \in (0{,}5;1). \end{cases}$$

Результаты вычисления дины кривой по формуле Симпсона приведены в табл. 1

Прямая интерполяция с шагом h = 0,015625 даёт значение l = 249,438 мм.

Пример *2*. B-сплайн (рис. 2) задан следующими данными: $p = 3$, $U = (0, 0, 0, 0, 0{,}5, 1, 1, 1, 1)$, $\{\vec{P}_i\} = \{(0{,}0),(-9{,}5;115{,}8),(60;-35{,}8),(129{,}5;115{,}8),(120;0)\}$.

Выражения координат

Таблица 1. Результаты вычисления длины кривой примера 1

n	*h*	*l*, мм
2	0,5	286,002
4	0,25	254,16
8	0,125	248,737
16	0,0625	249,477
32	0,03125	249,462
64	0,015625	249,463

Таблица 2. Результаты вычисления длины кривой примера 2

n	*h*	*l*, мм
2	0,5	371,378
4	0,25	252,226
8	0,125	253,049
16	0,0625	252,185
32	0,03125	252,584
64	0,015625	252,584

$$X(u) = -354u^3 + 531u^2 - 57u,$$

$$u \in (0,1)$$

$$Y(u) = \begin{cases} 2139{,}2u^3 - 2299{,}2u^2 + \\ + 694{,}8u \quad u \in (0;0{,}5) \\ -2139{,}2u^3 + \\ + 4118{,}4u^2 - 2514u + \\ + 534{,}8 \quad u \in (0{,}5;1). \end{cases}$$

Результаты вычисления длины кривой по формуле Симпсона приведены в табл. 2.

Интерполяция с шагом $h = 0{,}015625$ даёт значение $l = 252{,}561$ мм.

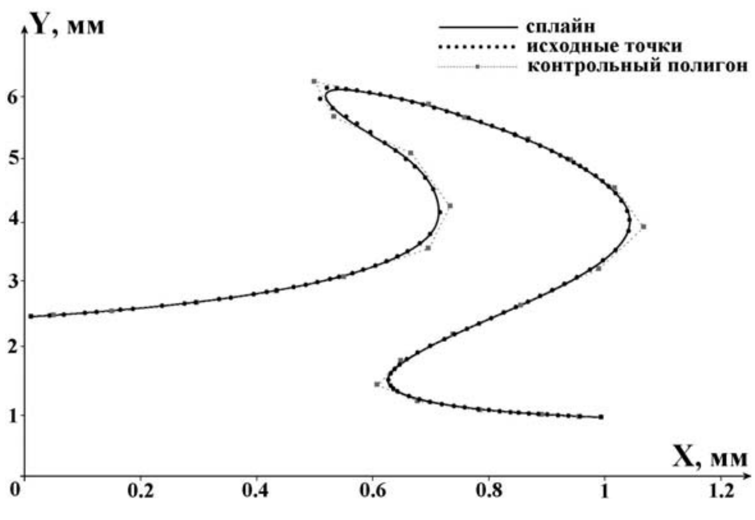

Рис. 3. В-сплайн кривая примера 3

Пример 3. Кубический В-сплайн задан узловым вектором, содержащим 23 внутренних узла, и 26 контрольными точками. Узловой вектор U = (0, 0, 0, 0, 0,0136, 0,0373, 0,0613, 0,0859, 0,1186, 0,2099, 0,3066, 0,3771, 0,4187, 0,4395, 0,4677, 0,5036, 0,5429, 0,5817, 0,6473, 0,7430, 0,7941, 0,8403, 0,8914, 0,9333, 0,9610, 0,9775, 0,9860, 1, 1, 1, 1) и точки контрольного полигона указаны на рис. 3. Опуская выражения координат, приведём результаты расчёта длины сплайн-кривой по формуле Симпсона при $n = 512$ $l = 9888{,}944d$, при $n = 1024$ $l = 9888{,}941d$ (d – дискрета), прямая интерполяция с шагом 1/1024 $l = 9888{,}939d$

Выводы

Вычисление длины В-сплайн кривой по методике Симпсона обеспечивает достаточную для практики точность. Неизбежные различия расчетной длины от величины длины кривой при прямой интерполяции тем меньше, чем меньше шаг вычислений по Симпсону и шаг интерполяции. Эти различия могут быть учтены при организации процедур начала торможения и выхода в конечную точку сплайна.

Литература

1. *Emami M. M.* A look-ahead command generator with control over trajectory and chord error for NURBS curve with unknown arc length / M. M. Emami, B. Arezoo // Computer-Aided Design. – 2010. – №. 43. – P. 625–632.
2. *Обухов А. И.* Принцип реализации сплайнового интерполятора системы ЧПУ / А. И. Обухов // Инновационные технологии: теория, инструменты. практика INOTECH-2010. Междунарoд. интернет-конф. молодых учёных, аспирантов и студентов WWW.NCSISTEM.ru/ru/education/conference
3. *Fast* real-time NURBS path interpolation for CNC machine tools / W. T. Lei, M. P. Sung, L. Y. Lin, J. J. Huang // Intern. J. Machine tools and Manufacture. – 2007. – Vol. 47. – P. 1530–1541.
4. *Piegle L.* The NURBS book / L. Piegle, W. Tiller. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1997. – 578 p.
5. *Раисов Ю. А.* В-сплайн интерполяция для двухуровневых систем ЧПУ / Ю. А. Раисов, И. В. Бычков, П. А. Кулаков // Інформаційно-керуючі системи на залізнич. трансп. – 2008. – № 5–6. – С. 71–74.

Поступила в редакцию
01.06.12