

УДК 536.24

А. П. Слесаренко, д-р. физ.-мат. наук
Ю. О. Кобринович

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, e-mail: kobrinovich.jul@mail.ru)

РЕГИОНАЛЬНО-СТРУКТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Предлагается регионально-структурный метод идентификации неоднородной температуры, окружающей конструктивный элемент среды при высокоскоростных тепловых процессах с осциллирующим теплообменом. Построены регионально-аналитические структуры решения задач, точно удовлетворяющие высокоскоростному осциллирующему теплообмену на участках границ сложной двухсвязной области при любой заданной зависимости во времени температуры окружающей среды и относительных коэффициентов теплоотдачи. Использование S-функций в структурах решений для учета информации о геометрии области впервые дает возможность построить непрерывно-дифференцируемые базисные функции в приближенных регионально-аналитических решениях задач высокоскоростного теплообмена.

Запропоновано регіонально-структурний метод ідентифікації неоднорідної температури оточуючого конструктивний елемент середовища при високошвидкісних теплових процесах з осцилюючим теплообміном. Побудовано регіонально-аналітичні структури розв'язків задач, що точно задовольняють високошвидкісний осцилюючий теплообмін на ділянках границь складної двозв'язної області за будь-якої заданої залежності в часі температури оточуючого середовища та відносних коефіцієнтів тепловіддачі. Використання S-функцій в структурах розв'язків для обліку інформації щодо геометрії області вперше дає змогу побудувати неперервно-диференційовані базисні функції в наближених регіонально-аналітичних розв'язках задач високошвидкісного теплообміну.

Введение

В задачах математического моделирования высокоскоростных процессов теплообмена возникает ряд проблем. Эти проблемы обуславливаются сложностью создания математических моделей, нелинейностью данных задач, включая высокоскоростной осциллирующий теплообмен, сложностью рассматриваемых областей и заданных граничных условий (различные граничные условия на участках границы области), несоизмеримостью физических и геометрических параметров и т. д. Уровень сложности математических моделей, достаточно точно отражающих исследуемые тепловые процессы, определяет уровень сложности методов решения соответствующих задач теплообмена.

Классические аналитические методы позволяли решать только упрощенные исходные задачи теплообмена для областей канонической формы. Создание приближенных аналитических методов позволило расширить сферу их применимости для областей сложной формы. Важным достоинством приближенных аналитических решений задач теплообмена является то, что в них зависимость от параметров содержится в явном виде. Приближенные аналитические решения помогают из всего многообразия критериев выделить определяющие, это значительно облегчает постановку физического эксперимента. Точные аналитические решения задач выполняют роль эталонов при проверке достоверности полученных результатов.

Следует отметить, что вычислительный эксперимент в некоторых случаях является единственным источником информации о температурном поле объекта, когда размещение датчиков температуры или теплового потока практически невозможно.

Высокоскоростные тепловые процессы характерны для многих технологических процессов: высокоскоростной обработки металлов резанием и фрезерованием, сварки и лазерной обработки деталей, для процессов волочения, спекания и литья. Также высокоскоростные процессы необходимо учитывать при определении режимов тепловой нагрузки и тепловой защиты элементов аэрокосмических аппаратов, сверхзвуковых и гиперзвуковых летательных аппаратов.

Математическое моделирование высокоскоростных тепловых процессов для конструктивных элементов, характерная длина которых значительно превышает размер поперечного сечения, сводится к решению задачи теплопроводности с нестационарными граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, y, Fo)}{\partial Fo} &= \left(\frac{\partial^2 T(x, y, Fo)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, Fo)}{\partial y^2} \right) + F(x, y, Fo); \quad (x, y) \in \Omega; \quad 0 < x, y, Fo < \infty; \\ \left(\frac{\partial T(x, y, Fo)}{\partial \nu} + Bi(Fo)T(x, y, Fo) \right) \Big|_{\Gamma} &= Bi(Fo)T_{cp}(x, y, Fo); \quad 0 < Fo < \infty; \\ F(x, y, Fo) &= \frac{\partial T_m(x, y, Fo)}{\partial Fo} - \left(\frac{\partial^2 T_m(x, y, Fo)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_m(x, y, Fo)}{\partial y^2} \right); \quad (x, y) \in \Omega; \quad 0 < Fo < \infty; \\ T(x, y, 0) &= \theta(x, y); \quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

где $T(x, y, Fo)$ – температура поперечного сечения конструктивного элемента; $\theta(x, y)$ – начальная температура; $T_{cp}(x, y, Fo)$ – температура среды возле границы рассматриваемого конструктивного элемента; $Bi(Fo)$ – критерий Био, Fo – критерий Фурье; $T_m(x, y, Fo)$ – точное решение модельной задачи для реальных геометрии и заданных граничных условий; ν – направление нормали к границе поперечного сечения конструктивного элемента. В общем случае функция $F(x, y, Fo)$ характеризует распределение источников и стоков тепловой энергии во внутренних точках области Ω .

Решение краевых задач, искомая температура в которых характеризуется большими градиентами, с помощью численных методов встречает ряд трудностей, связанных с тем, что дискретизации в процессе поиска решения подвергаются и дифференциальное уравнение, и граничные условия.

Для решения прямой задачи теплопроводности с высокоскоростными нестационарными граничными условиями разработан приближенный аналитический подход с использованием S-функций [1–4], который позволяет учитывать граничные условия точно, а уравнение теплопроводности подвергается дискретизации с помощью разностных схем повышенного порядка точности. Приближенное аналитическое решение ищется для каждого шага во времени последовательно.

Для задач теплопроводности на базе структурного и регионально-структурного методов разработаны классы точных решений [5] для тестовых задач, максимально приближенных к реальным научно-практическим задачам. Такие точные решения тестовых задач с помощью S-функций сохраняют геометрию и теплофизические характеристики и отличаются от реальных научно-практических задач только начальными условиями и функцией в правых частях уравнений теплопроводности, которая характеризует распределение внутренних источников и стоков энергии.

1. Идентификация температуры среды в высокоскоростном тепловом процессе

Рассмотрим задачи об идентификации температуры среды в высокоскоростном осциллирующем теплообмене, происходящем на границах двухсвязной области сложной фор-

мы по данным вычислительного эксперимента. Рассматриваются конструктивные элементы, характерная длина которых значительно превышает размеры их сечения.

Пусть температура среды, зависящая от времени, на наружной и внутренней границах поперечного сечения конструктивного элемента – $T_{cp1}(Fo)$ и $T_{cp2}(Fo)$ соответственно. Критерии Био, зависящие от времени, на наружной и внутренней границах поперечного сечения конструктивного элемента – $Bi_1(Fo)$ и $Bi_2(Fo)$ соответственно.

Структуру решения задачи теплопроводности (1) для двухсвязной области построим с помощью регионально-структурного метода и S-функций

$$T_k(x, y, Fo) = \Phi_{0k}(x, y, Fo) + \sum_{k,l} C_{k,l} \chi_{k,l}(x, y, Fo), \quad (2)$$

где $k = 1, 2$, $C_{k,l}$ – неизвестные коэффициенты; $\Phi_{0k}(x, y, Fo)$ – региональные функции, точно удовлетворяющие нестационарным неоднородным граничным условиям; $\chi_{k,l}(x, y, Fo)$ – региональные базисные функции, точно удовлетворяющие нестационарным однородным граничным условиям $\theta(x, y) = T_m(x, y, 0)$, $(x, y) \in \Omega$.

Региональные базисные функции $\chi_{k,l}(x, y, Fo)$, точно удовлетворяющие нестационарным однородным граничным условиям в структуре решения (2), построим в виде

$$\chi_{k,l}(x, y, Fo) = \begin{cases} \chi_{k,l_1}(x, y, Fo), & x \geq x_{12}, \quad y \geq y_{12}; \\ \chi_{k,l_2}(x, y, Fo), & x < x_{12}, \quad y < y_{12} \end{cases}$$

$$\chi_{k,l_1}(x, y, Fo) = (P_k(x)P_l(y) - W_1(x, y)) \left(\frac{\partial P_k(x)}{\partial x} P_l(y) \frac{\partial W_1(x, y)}{\partial x} + P_k(x) \frac{\partial P_l(y)}{\partial y} \frac{\partial W_1(x, y)}{\partial y} \right) + W_1(x, y) Bi_1(Fo) P_k(x) P_l(y) \exp(-p_1 W_1^2(x, y));$$

$$\chi_{k,l_2}(x, y, Fo) = (P_k(x)P_l(y) - W_2(x, y)) \left(\frac{\partial P_k(x)}{\partial x} P_l(y) \frac{\partial W_2(x, y)}{\partial x} + P_k(x) \frac{\partial P_l(y)}{\partial y} \frac{\partial W_2(x, y)}{\partial y} \right) + W_2(x, y) Bi_2(Fo) P_k(x) P_l(y) \exp(-p_2 W_2^2(x, y)),$$

где $p_1 = \text{const}$, $p_2 = \text{const}$, x_{12} и y_{12} – координаты границы контакта регионов, $W_1(x, y)$ и $W_2(x, y)$ – функции, описывающие внешнюю и внутреннюю границы регионов, построенные с помощью S-функций и соответствующих опорных функций, положительные при $(x, y) \in \Omega$ и $\left. \frac{\partial W_l}{\partial l} \right|_{\Gamma_l} = 1, l = 1, 2$.

Региональные функции $\Phi_0(x, y, Fo)$, точно удовлетворяющие нестационарным неоднородным граничным условиям, построим в виде

$$\Phi_{0k}(x, y, Fo) = \begin{cases} T_{cp1}(x, y, Fo) \exp(-p_1 W_1^2(x, y)), & x \geq x_{12}, y \geq y_{12}; \\ T_{cp2}(x, y, Fo) \exp(-p_2 W_2^2(x, y)), & x < x_{12}, y < y_{12}; \end{cases}$$

В качестве точного решения тестовой задачи выберем такое решение

$$T_m(x, y, Fo) = \begin{cases} T_{m1}(x, y, Fo), & x \geq x_{12}, y \geq y_{12}; \\ T_{m2}(x, y, Fo), & x < x_{12}, y < y_{12}; \end{cases}$$

$$T_{m1}(x, y, Fo) = T_{cp1}(Fo) \exp(-p_1 W_1^2(x, y)) + \gamma(Fo)(1 + W_1(x, y) Bi_1(Fo)) \exp(-p_1 W_1^2(x, y));$$

$$T_{m2}(x, y, Fo) = T_{cp2}(Fo) \exp(-p_2 W_2^2(x, y)) + \gamma(Fo)(1 + W_2(x, y) Bi_2(Fo)) \exp(-p_2 W_2^2(x, y)).$$

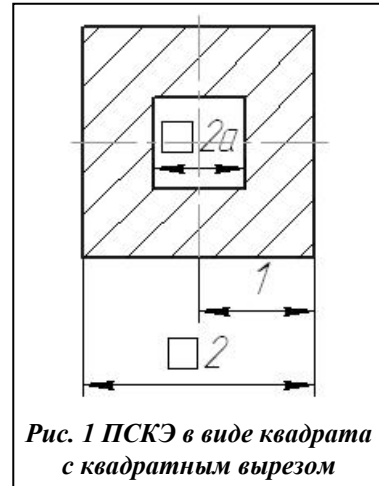


Рис. 1 ПСКЭ в виде квадрата с квадратным вырезом

Пусть поперечного сечение конструктивного элемента (ПСКЭ) имеет форму квадрата с квадратным вырезом в центре (рис. 1) в безразмерном виде. Наружная сторона квадрата равна 2, сторона квадратного выреза $2a = 0,6$. В этом случае нестационарная задача теплопроводности примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, y, Fo)}{\partial Fo} &= \Delta T(x, y, Fo) + F(x, y, Fo), & x, y \in \Omega, & 0 < Fo < \infty; \\ T(x, y, 0) &= \theta(x, y), & x, y \in \Omega; \\ \left(\pm \frac{\partial T(x, y, Fo)}{\partial Fo} + Bi_1(Fo)T(x, y, Fo) \right) \Big|_{x=\pm 1} &= Bi_1(Fo)T_{cp1}(x, y, Fo), & y \in \Omega, & 0 < Fo < \infty; \\ \left(\pm \frac{\partial T(x, y, Fo)}{\partial Fo} + Bi_1(Fo)T(x, y, Fo) \right) \Big|_{y=\pm 1} &= Bi_1(Fo)T_{cp1}(x, y, Fo), & x \in \Omega, & 0 < Fo < \infty; \\ \left(\pm \frac{\partial T(x, y, Fo)}{\partial Fo} + Bi_2(Fo)T(x, y, Fo) \right) \Big|_{x=\pm a} &= Bi_2(Fo)T_{cp2}(x, y, Fo), & y \in \Omega, & 0 < Fo < \infty; \\ \left(\pm \frac{\partial T(x, y, Fo)}{\partial Fo} + Bi_2(Fo)T(x, y, Fo) \right) \Big|_{y=\pm a} &= Bi_2(Fo)T_{cp2}(x, y, Fo), & x \in \Omega, & 0 < Fo < \infty. \end{aligned}$$

Для построения $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$ применим S-функции 1-го класса [6] с параметром $k = 200$, $b = 1$: $W_1(x, y) = f_1(x) \wedge f_2(y)$; $W_2(x, y) = f_3(x) \vee f_4(y)$; $f_1(x) = 0,5(1 - x^2)$; $f_2(y) = 0,5(1 - y^2)$; $f_3(x) = -0,5a^{-1}(a^2 - x^2)$; $f_4(y) = -0,5a^{-1}(a^2 - y^2)$.

Регионально-аналитическая структура решения (2) построена в модульном виде, в ней в явной форме заданы критерии Био, температура среды, информация о геометрии поперечного сечения конструктивного элемента. Использование бесконечно дифференцируемых S-функций в построении функций $W_1(x, y)$ и $W_2(x, y)$ позволяет обеспечить консервативность построенных регионально-аналитических структур решения, так как сохраняются физические законы ограниченности энергии в угловых точках.

Дискретная математическая модель высокоскоростного процесса теплопроводности строится на базе совместного использования регионально-аналитических структур решения (2), уравнения теплопроводности (1) и разностных схем повышенного порядка точности. Применение разностных схем высокого порядка точности позволяет выполнить условия теоремы Годунова-Рябенского, согласно которой скорость сходимости приближенного решения к обобщенному точному решению задачи равна порядку точности аппроксимации разностной схемы.

В качестве разностных схем повышенного порядка точности используются схемы «3 слоя по времени» и «9 точек по координатам». Из девятиточечных схем используются схемы типа «большой крест» и «большой ящик» [7]

$$\left(T_{Fo} \right)_{3, i, j}^s = \left(T_{i, j}^s - T_{i, j}^{s-1} \right) \cdot Fo^{-1}, \quad s = 1, 2; \tag{3}$$

$$\left(T_{Fo} \right)_{i, j}^s = \left(T_{i, j}^{s-2} - 4 \cdot T_{i, j}^{s-1} + 3 \cdot T_{i, j}^s \right) \cdot (2 \cdot Fo)^{-1}, \quad s > 2,$$

$$(\Delta)_{9, б.к. i, j}^s = \left(12h^2 \right)^{-1} \cdot \left(-T_{i-2, j}^s - T_{i, j-2}^s - T_{i+2, j}^s - T_{i, j+2}^s + 16 \left(T_{i-1, j}^s + T_{i, j-1}^s + T_{i+1, j}^s + T_{i, j+1}^s \right) - 60T_{i, j}^s \right); \tag{4}$$

$$(\Delta T)_{9, я. i, j}^s = \left(6h^2 \right)^{-1} \cdot \left(T_{i-1, j-1}^s + T_{i+1, j+1}^s + T_{i-1, j+1}^s + T_{i+1, j-1}^s + 4 \left(T_{i-1, j}^s + T_{i, j-1}^s + T_{i+1, j}^s + T_{i, j+1}^s \right) - 20T_{i, j}^s \right). \tag{5}$$

Рассмотрим сочетания разностных схем «3 слоя по времени (3) и «большой крест» (4) и «3 слоя по времени и «большой ящик» (5)

$$\left(T_{Fo}'\right)_{3i,j}^s = (\Delta T)_{9\delta,k,i,j}^s, \quad (6)$$

$$\left(T_{Fo}'\right)_{3i,j}^s = (\Delta T)_{9\gamma,i,j}^s. \quad (7)$$

Необходимое спектральное условие устойчивости разностных схем (6) и (7) найдем, задавая $(T)_{ij}^0 = \exp(I(\mu \cdot i + \nu \cdot j))$ в виде двухмерной гармоники. Получим $(T)_{ij}^s = \lambda^s(\mu, \nu, r) \exp(I(\mu \cdot i + \nu \cdot j))$, где $r = \Delta F_0 \cdot h^{-2}$, μ, ν – вещественные параметры. Необходимое условие устойчивости Неймана $|\lambda(\mu, \nu, r)| \leq 1$ выполняется при $r = 0,889$ для разностной схемы (6) и $r = 0,511$ для разностной схемы (7) [3]. На рис. 2 показан спектр $\lambda(\mu, \nu, r)$ большего из двух комплексных корней для этих схем.

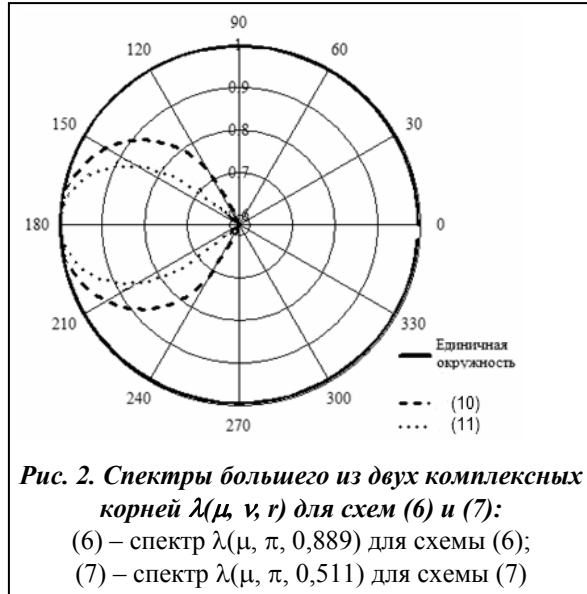


Рис. 2. Спектры большего из двух комплексных корней $\lambda(\mu, \nu, r)$ для схем (6) и (7):
 (6) – спектр $\lambda(\mu, \pi, 0,889)$ для схемы (6);
 (7) – спектр $\lambda(\mu, \pi, 0,511)$ для схемы (7)

Для каждого момента времени заменим уравнение теплопроводности структурно-разностным уравнением. В результате получим дискретную модель в виде системы уравнений, неизвестными в которой будут коэффициенты при региональных базисных функциях, точно удовлетворяющих нестационарным граничным условиям, и значение температуры среды на контурах области.

Количество уравнений для каждого момента времени будет больше количества неизвестных. В матричной форме полученную систему уравнений можно записать как

$$\bar{C}A + T_{cp1}B + T_{cp2}E = \bar{D}.$$

Определение неизвестных коэффициентов \bar{C} и неизвестных температур среды T_{cp1} и T_{cp2} сводится к совместному решению вариационной задачи о минимуме двух функционалов. Построим функционалы на базе точечного метода наименьших квадратов: сумма квадратов отклонений ϵ должна стремиться к минимуму. Отыскание этого минимума приводит к решению вариационной задачи для системы функционалов

$$I_1 = \sum_{m=0}^M (T_m - T_{m_{экс}})^2; \quad (8)$$

$$I_2 = \sum_{i=0}^N (L_i T_i - F_i)^2; \quad (9)$$

где $T_{экс}$ – температура поперечного сечения конструктивного элемента, полученная из экспериментальных данных, при размещении датчиков близко к границе контакта поверхности конструктивного элемента и внешней среды; M – количество точек, в которых получены данные эксперимента; N – количество узлов разностной схемы; F_i – источники (стоки) энергии; $L_i T_i$ – однородное дифференциальное уравнение, представленное в i -м узле в разностном виде.

В случае тестовой задачи вместо температуры, полученной из эксперимента, используется температура, найденная из точного решения.

Алгебраическая система уравнений для определения T_{cp1} , T_{cp2} и коэффициентов $C_{k,l}$ при базисных функциях для каждого слоя во времени имеет вид

$$\frac{\partial I_1}{\partial T_{cp1}} = 0, \quad \frac{\partial I_1}{\partial T_{cp2}} = 0, \quad \frac{\partial I_2}{\partial C_{k,l}} = 0.$$

Найденные значения $C_{k,l}$, T_{cp1} и T_{cp2} можно подставить в приближенную аналитическую структуру решения (2) непосредственно и получить приближенное решение задачи

теплопроводности в замкнутом виде для рассматриваемых в математической модели моментов времени.

2. Вычислительный эксперимент. Прямая задача

Примем критерии Био равными $Bi_1(Fo) = \sin(300Fo + 10) + 12$, $Bi_2(Fo) = \sin(500Fo) + 1,2$ а температуру среды в точном решении тестовой задачи (5) – изменяющейся как функция Бесселя и равной $T_{cp1} = 500(1 + J_0(500Fo) + 2$, $T_{cp2} = 300(1 + J_0(500Fo))$.

Граница контакта регионов имеет форму квадрата – $x_{12} = y_{12} = 0,65$, $p_1 = p_2 = 10$, $\gamma(Fo) = 50 + \exp(150Fo)$.

Проверим эффективность предлагаемого подхода на примере решения прямой задачи теплопроводности. При этом считаем, что температура среды и критерии Био в граничных условиях третьего рода заданными такими, как в тестовой задаче.

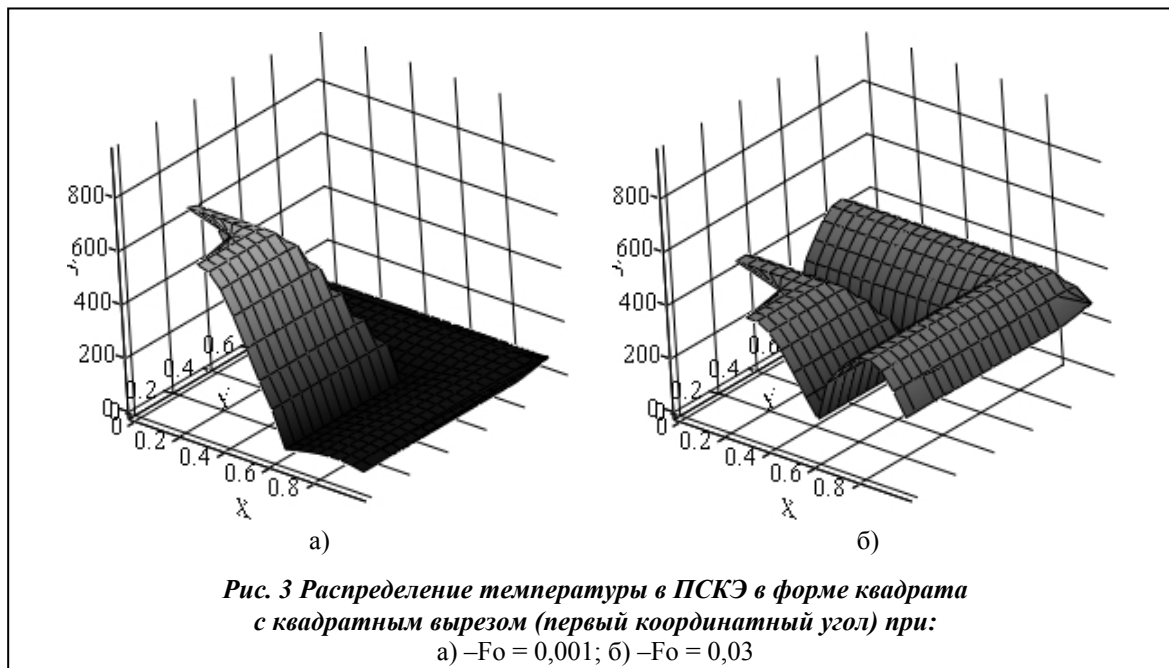
В этом случае неизвестные коэффициенты при базисных функциях ищутся из решения вариационной задачи $I = \| \bar{C}A - \bar{D} \|^2$ и соответствующей системы алгебраических уравнений.

В таблице приведены результаты вычислительного эксперимента. В верхних строках ячеек даны значения для точной температуры, в средних – значения, найденные регионально-структурным методом. В нижних строках ячеек таблицы приведена относительная погрешность вычисления в экспоненциальном формате данных.

В вычислительном эксперименте использовалось 36 координатных функций, разностная схема – трехслойная по времени, с шагом $0.001Fo$ и девятиточечная по координатам (типа «ящик») с постоянным шагом $h=0.05$. На рис. 3 показано распределение температуры в четвертой части симметричного поперечного сечения конструктивного элемента в моменты времени $0.001Fo$ и $0.03Fo$.

Результаты вычислительного эксперимента

Fo	x	Параметр	y = 0,35	y = 0,45	y = 0,6	y = 0,75
0,001	0,35	точная температура	617,8234	483,3027	178,5566	63,04159
		приближенная температура	617,8234	483,3027	178,5566	63,04159
		ε, %	$1,84 \cdot 10^{-14}$	0,00	$4,78 \cdot 10^{-14}$	$2,25 \cdot 10^{-13}$
	0,45	точная температура	483,3027	478,7126	178,5566	63,04159
		приближенная температура	483,3027	478,7126	178,5566	63,04159
		ε, %	$1,18 \cdot 10^{-14}$	$2,37 \cdot 10^{-14}$	$4,78 \cdot 10^{-14}$	$2,03 \cdot 10^{-13}$
	0,6	точная температура	178,5566	178,5566	175,7565	63,04159
		приближенная температура	178,5566	178,5566	175,7565	63,04159
		ε, %	$3,18 \cdot 10^{-14}$	$4,78 \cdot 10^{-14}$	$3,23 \cdot 10^{-14}$	$1,35 \cdot 10^{-13}$
	0,75	точная температура	63,04159	63,04159	63,04159	63,8391
		приближенная температура	63,04159	63,04159	63,04159	63,8391
		ε, %	0,00	$2,25 \cdot 10^{-14}$	$9,02 \cdot 10^{-14}$	$1,11 \cdot 10^{-13}$
0,03	0,35	точная температура	428,7944	339,3154	127,6547	136,202
		приближенная температура	428,7944	339,3154	127,6547	136,202
		ε, %	$7,95 \cdot 10^{-14}$	$1,68 \cdot 10^{-14}$	$2,12 \cdot 10^{-13}$	$1,98 \cdot 10^{-12}$
	0,45	точная температура	339,3154	336,1876	127,6547	136,202
		приближенная температура	339,3154	336,1876	127,6547	136,202
		ε, %	$6,70 \cdot 10^{-14}$	$2,20 \cdot 10^{-13}$	$5,90 \cdot 10^{-13}$	$2,07 \cdot 10^{-12}$
	0,6	точная температура	127,6547	127,6547	125,6783	136,202
		приближенная температура	127,6547	127,6547	125,6783	136,202
		ε, %	$6,68 \cdot 10^{-13}$	$8,02 \cdot 10^{-13}$	$8,71 \cdot 10^{-13}$	$1,77 \cdot 10^{-12}$
	0,75	точная температура	136,202	136,202	136,202	138,5808
		приближенная температура	136,202	136,202	136,202	138,5808
		ε, %	$2,40 \cdot 10^{-12}$	$2,48 \cdot 10^{-12}$	$2,55 \cdot 10^{-12}$	$1,85 \cdot 10^{-12}$



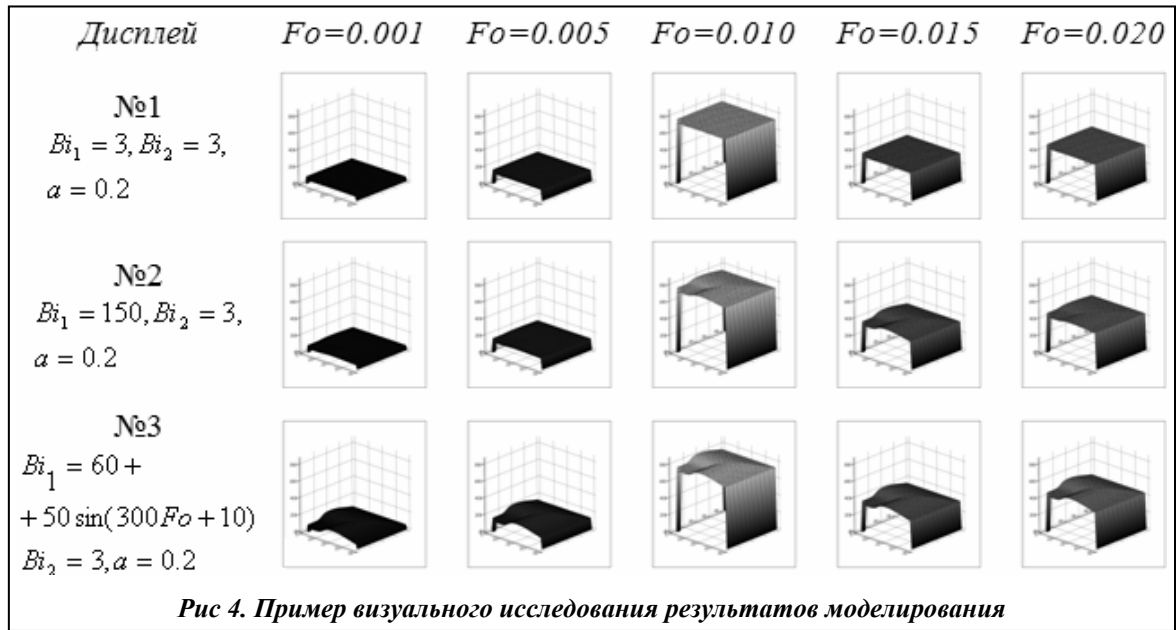
3. Построение точных решений тестовых задач

Проблема построения эталонных точных решений линейных и нелинейных задач теплопроводности стоит перед исследователями уже много десятилетий. С использованием классически аналитических методов эту проблему удалось решить только для областей канонической формы и то только для линейных нестационарных задач. Для нелинейных задач с использованием нелинейных интегральных преобразований для простых областей эту проблему удалось решить исследователям только в некоторых частных случаях.

Поэтому разработка аналитических подходов, позволяющих для областей любой заданной сложной формы получить точные решения модельных задач, является чрезвычайно актуальной. При этом модельные задачи должны совпадать с реальными научно-практическими задачами по геометрическим параметрам математической модели и заданным граничным условиям, а отличаться только заданными начальными условиями и функциями в уравнениях теплопроводности, описывающими в математической модели процесса распределение источников и стоков энергии. Эту задачу до появления S-функций не позволяли решить принципиальные трудности математического характера. Они заключались в необходимости строить уравнения границ и поверхностей тел, скругляющих острые углы и ребра с любой заданной степенью скругления. S-функции позволили впервые в научной практике строить непрерывно-дифференцируемые базисные функции, точно удовлетворяющие граничным условиям и устраняющие сингулярные особенности при построении функционалов для соответствующих вариационных задач. Для областей сложной формы с угловыми регионами ограниченность функционалов возможно достичь только с помощью S-функций.

Таким образом, консервативность гладких приближенных аналитических решений задач теплопроводности позволяет впервые решить вопрос о построении модельных точных решений для сложных научно-практических задач теплообмена.

Процесс математического моделирования с использованием модельных точных решений задач теплообмена позволяет увеличить скорость анализа процессов теплообмена более чем в 10^3 – 10^4 раз. Это делает возможным ставить и решать вопросы аналитико-параметрической поддержки принятия решений с использованием большого ряда согласованных вычислительных машин.



В качестве примера приведен анализ высокоскоростного теплового процесса в поперечном сечении конструктивного элемента в виде двухсвязной области при высокоскоростном осциллирующем теплообмене на участках границ области с использованием ряда согласованных дисплеев. На рис. 4 показана серия графиков, отображающих изменение температурного поля в поперечных сечениях конструктивного элемента (рис. 1) для трех дисплеев, на каждый из которых выводятся результаты моделирования с разными значениями критерия Био.

Точные решения модельных задач построены согласно [5]

$$T(x, y, Fo) = T_{cp}(Fo) + 1 + \frac{\omega_1^2(x, y)\omega_2(x, y)Bi_1(Fo) + \omega_2^2(x, y)\omega_1(x, y)Bi_2(Fo)}{\omega_1^2(x, y) + \omega_2^2(x, y)},$$

где $T_{cp}(Fo)$ – температура среды, одинаковая возле двух границ конструктивного элемента, которая изменяется линейно от 30 до 630 °С, а в интервале $0,01 \leq Fo \leq 0,015$ температура среды резко возрастает до 500 °С и мощность внутренних источников энергии изменяется в импульсном режиме.

Выводы

Представление решений нестационарных задач теплопроводности с высокоскоростным осциллирующим теплообменом на каждом временном шаге в регионально-аналитической форме с параметрами в виде температуры окружающей среды и относительных коэффициентов теплоотдачи позволяет впервые проводить комбинированные исследования структуры высокоскоростного теплового процесса «моделирование – идентификация – аналитическое прогнозирование» для целой серии данных вычислительного эксперимента в реальном масштабе времени на согласованных дисплеях. Это дает возможность в диалоговом режиме с согласованными вычислительными машинами решать сложные задачи оптимизации высокоскоростных тепловых процессов, а также определять области допустимых значений для теплофизических параметров, исходя из заданных ограничений на градиенты температуры в конструктивных элементах.

Интерполяция коэффициентов при базисных функциях по времени в регионально-аналитических структурах решений задач теплопроводности позволяет получить компактные приближенные аналитические решения задач для высокоскоростного теплообмена. Это открывает новые качественные возможности для решения задач управления тепловыми процессами.

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований, проект № Ф54.1/025.

Литература

1. Слесаренко А. П. Структурно-разностный подход к математическому моделированию высокоскоростных тепловых процессов с нестационарным теплообменом на поверхности конструктивных элементов / А. П. Слесаренко, Ю. О. Кобринович // Пробл. машиностроения. – 2011. – Т. 14, № 3. – С. 66–75.
2. Кобринович Ю. О. Построение структурно-разностных моделей высокоскоростных тепловых процессов с осциллирующим теплообменом / Ю. О. Кобринович // Вісн. Харків. нац. ун-ту. Сер. Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2012. – № 68 (974). – С. 205–209.
3. Слесаренко А. П. Структурно-разностные модели, точно учитывающие осциллирующий во времени нестационарный теплообмен на поверхности конструктивных элементов / А. П. Слесаренко, Ю. О. Кобринович // Доп. НАН України. – 2012. – № 1. – С. 82–88.
4. Слесаренко А. П. Структурно-разностные модели тепловых процессов в областях сложной формы с высокоинтенсивным нестационарным теплообменом на границе / А. П. Слесаренко, Ю. О. Кобринович // Математичне моделювання та математична фізика: Тез. доп. конф., присвяченої 210-річчю від дня народження М. Остроградського, м. Кременчук, 21–24 вер. 2011 р. – Кременчук, 2011. – С. 51–52.
5. Слесаренко А. П. Визуальные исследования результатов моделирования высокоскоростных тепловых процессов на согласованных дисплеях / А. П. Слесаренко, Ю. О. Кобринович // Вісн. Харків. ун-ту. Сер. Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2013. – № 16 (989) – С. 193–201.
6. Слесаренко А. П. S-функции в обратных задачах дифференциальной геометрии и управлении образования форм / А. П. Слесаренко // Восточ.-Европ. журн. передовых технологий. – 2012. – № 1/4 (55). – С. 4–10.
7. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М: Наука, 1977. – 455 с.

Поступила в редакцию
03.09.13

УДК 519.6

О. О. Литвин^{*}, канд. фіз.-мат. наук

Н. І. Штепа^{*}, канд. фіз.-мат. наук

С. І. Кулик^{**}, канд. фіз.-мат. наук

О. С. Чорна^{*}

^{*} Українська інженерно-педагогічна академія
(м. Харків, e-mail: loo71@bk.ru)

^{**} Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
(м. Харків, e-mail: academ_mail@ukr.net)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ КОРИСНИХ КОПАЛИН МІЖ СИСТЕМОЮ НЕРЕГУЛЯРНО РОЗМІЩЕНИХ ПОХИЛИХ СВЕРДЛОВИН МЕТОДАМИ ГЛОБАЛЬНОЇ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Запропонований метод моделювання тривимірного розподілу корисних копалин методами глобальної інтерлінації на системі похилих свердловин, розміщених як в одній площині, так і довільним чином. Метод дозволяє відновлювати 3D розподіл корисних копалин між похилими свердловинами за допомогою інформації про розподіл в кернах свердловин.