Д. А. Дёмин, д-р техн. наук

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина
e-mail: c7508990@gmail.com

УДК 681.5:519.24

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ПОЛУЧЕНИЯ СПЛАВОВ ДЛЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

Ключові слова: *математична модель, керування, енергетичне машинобудування, сплав, надійність*

Анотація. *Описані результати досліджень, присвячених математичному моделюванню в задачах пошуку оптимального за кінцевим станом керування процесами отримання сплавів для відповідальних деталей енергетичного машинобудування. Запропоновано математичний опис об'єкта керування і показано, які з параметрів математичної моделі підлягають оцінці для реалізації відомих методів пошуку оптимального керування в лінійно-квадратичної задачі і задачі пошуку оптимального за кінцевим станом керування. Наведено алгоритм оцінювання параметрів математичної моделі досліджуваного процесу в умовах дворівневої невизначеності.*

Введение

Сплавы для деталей машиностроения, как известно, получают выплавкой в металлургических печах, основными и наиболее прогрессивными из которых являются электродуговые и индукционные печи. Детали энергетического оборудования обладают той специфической особенностью, что «плата за ошибку» в процессе её изготовления может быть непомерно высокой. Именно поэтому требования высокой функциональной надежности таких деталей могут рассматриваться в числе доминирующих. При этом следует отметить, что высокая функциональная надёжность деталей связана с высокой параметрической надёжностью отливок, из которых данные детали изготавливаются. Параметрическая надежность может оцениваться величиной вероятности получения качественной отливки при существующем уровне технологической оснащенности, оборудования и степени автоматизации технологических процессов. Это означает, что все параметры отливки должны находиться внутри поля допуска, регламентированного соответствующими ГОСТами или ТУ. Наиболее «узким местом» в формировании качества отливок является качество сплава, оцениваемого, как известно, химическим составом и микроструктурой, влияющими на физико-механические или специальные свойства сплава. Поэтому, если в процессе плавки удается добиться стабильного химического состава, микроструктуры и свойств в смысле обеспечения попадания каждого из его параметров в заданный диапазон от одной кампании плавки к другой или в пределах одного непрерывного процесса плавки, можно говорить о достаточной параметрической надежности. Иными словами, такая параметрическая надежность обеспечивает заданный уровень требований по функциональной надёжности деталей машин вообще, и деталей энергетического оборудования в частности. Однако рассмотрение процесса получения сплава в качестве объекта управления вызывает ряд серьёзных проблем, вызванных наличием многоуровневой неопределённости и слабой формализацией – большой сложностью математического описания управляемого процесса плавки. В основном, причина этой сложности кроется в том, что адекватную математическую модель, работоспособную в смысле использования для решения задачи поиска оптимального управления, можно строить лишь на основе данных пассивного эксперимента, причём непосредственно по данным цеховых исследований, т.е. в условиях наличия малой выборки данных. Именно поэтому решение задачи оценивания структуры и параметров математических моделей, описывающих процессы плавки, является первоочередным в процедуре поиска оптимального управления и весьма актуальными.

Анализ литературных данных и постановка проблемы

Для решения большого количества реальных производственных задач, связанных с моделированием и оптимизацией управления в условиях неопределенности, сегодня сформированы специальные научные дисциплины, среди которых можно выделить теорию нечетких множеств, теорию интервальной математики, теории свидетельств Демпстера-Шефера [1 – 2] и теорию возможностей, математической основой которой является теория нечетких множеств. Для математической формализации неопределенностей возможно применение теории приближенных (грубых) множеств Павлака [3], позволяющей на основе итоговых экспертных оценок о состоянии системы и объективных или субъективных оценках ее параметров строить алгоритмы прогнозирования на основе процедур логического вывода [4]. В фундаментальной работе [4] отмечается также, что в приложениях могут быть успешно применены подходы на основе теорий приближенных и нечетких множеств [5]. Эффективными на практике оказываются методы моделирования, построенные на основе теории недоопределенных множеств [6 – 8], как элемент методологического обобщения существующих подходов к анализу и формализации неопределенностей. Основоположником же теории нечетких множеств в современной трактовке, как отмечено в работе [4], является Л. А. Заде [9]. Фундаментальным трудом, позволяющим использовать аппарат нечёткой математики для решения проблем управления сложными объектами, является работа [10]. Математический аппарат теории нечетких множеств находит применение в разнообразных технических приложениях, примеры которые даны в работе [4]. В задаче математического моделирования и поиска оптимального управления процессами плавки в условиях неопределенности основной проблемой является выбор структуры математической модели и оценивание её параметров в условиях двухуровневой неопределенности. Решению именно этой проблемы и посвящено исследование.

Математическое описание и постановка задачи оптимального управления процессом получения сплава

Объект управления в задаче математического моделирования и поиска оптимального управления процессом получения сплава представляет собой процесс плавки, реализуемой в плавильно-заливочной системе, центральной частью которой является электропечь. На этапе плавки объект управления может быть описан линейной системой вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), t \in [t_0, T], x(t_0) = x_0, x \in R_n, u \in R_m, \tag{1}$$

где *A(t), B(t)* – матрицы, имеющие кусочно-непрерывные ограниченные элементы;

x(t) – вектор состояния системы в момент времени *t;*

u(t) – вектор-функция управления в момент времени *t;*

R_n – заданное допустимое множество значений вектора состояний системы;

R_m – заданное допустимое множество значений вектора-функции управления.

Как следует из накопленного в промышленности опыта плавок, управление процессом осуществляется путем регулирования положения электрода относительно шихты при выбранной ступени напряжения трансформатора. Если перемещение электрода осуществляется электродвигателем, то в качестве управляющего воздействия может быть выбрана величина приложенного к электродвигателю напряжения, если же перемещение электрода осуществляется с помощью гидропривода, в качестве управляющего воздействия может быть выбрано давление в гидроцилиндре механизма перемещения электрода.

Компонентами фазового вектора целесообразно выбрать координату рабочего торца электрода относительно шихты или зеркала расплава и скорость перемещения электрода. В этом случае система может быть описана уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= ku(t), \end{aligned} \tag{2}$$

где $x_1(t)$ – перемещение электрода,

$x_2(t)$ – скорость перемещения электрода,

$k = \dfrac{S}{m}$, S – площадь поршня гидроцилиндра перемещения электрода, m – масса системы.

Критерий качества управления задаётся в виде

$$J_0 = x'(T)C_1x(T) + \int_{t_0}^{T} \left(x'(t)C_2(t)x(t) + u'(t)C_3(t)u(t) \right) dt, \tag{3}$$

где C_i – неотрицательно определенные матрицы.

При таком описании объекта управления и критерия качества управление сводится к решению линейно-квадратичной задачи, требующему минимизации квадратичного функционала вида (3) на траекториях линейной системы (1). При этом моменты времени t_0, T, и начальное положение x_0 должны быть заданы, а матрица $C_i \geq 0$, если $x'(t)C_ix(t) \geq 0$ для любого вектора x из заданного допустимого множества, и $C_i > 0$, если $x'(t)C_ix(t) > 0$ для любого вектора x из заданного допустимого множества при $x(t) \neq 0$.

Для нахождения оптимального управления в линейно-квадратичной задаче, описываемой системой (1) с критерием качества управления (3), устанавливаются следующие условия оптимальности [11]:

$$\begin{aligned}
&H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = -x'(t)C_2(t)x(t) - u'(t)C_3(t)u(t) + \\
&+\psi'(t)\left[A(t)x(t) + B(t)u(t)\right], \\
&-\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{\psi}(t) = -A'(t)\psi(t) + 2C_2(t)x(t), \\
&\psi(t) = -2C_1x(t), \\
&\frac{\partial H}{\partial u} = B'\psi(t) - 2C_3(t)u(t) = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\psi(t)$ – решение задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -H_x\left(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)\right), \ \psi(t) = -\varphi_x\left(x_0(t)\right), \tag{5}$$

где $\varphi_x\left(x_0(t)\right) = \dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$, $\varphi(x)$ - критерий качества управления: $J(u) = \varphi(x(T)) \to \inf$.

Так как соотношения (1) и (4) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями оптимальности [12], оптимальное управление может быть найдено путем реализации трехшаговой последовательной процедуры [11].

Шаг 1. Из условия (2.4) записывается выражение для оптимального управления:

$$u_0 = \frac{1}{2}C_3^{-1}(t)B'(t)\psi(t). \tag{6}$$

Шаг 2. Выражение для оптимального управления (6) подставляется в условия (1) и (4)

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_0(t) = A(t)x_0(t) + \frac{1}{2}B_1(t)\psi(t), \\
&\dot{\psi}(t) = -A'(t)\psi(t) + 2C_2(t)x_0(t), \\
&\psi(t) = -2C_1x_0(t), \\
&B_1(t) = B(t)C_3^{-1}(t)B'(t).
\end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, получена краевая задача для оптимальной траектории $x_0(t)$ и вектор сопряженных переменных $\psi(t)$, для решения которой необходимо задать функцию вектора сопряженных переменных.

Шаг 3. Функция вектора сопряженных переменных ищется в виде

$$\psi(t) = -2P(t)x_0(t), \tag{8}$$

где *P(t)* – симметричная матрица, подлежащая определению.

Дифференцированием по *t*, заменой $\dot{\psi}(t)$ и $\dot{x}_0(t)$ в соответствии с выражениями (7) и подстановкой (8) в (7) получаются равенства

$$\begin{aligned}&\left[\dot{P}(t)+A'(t)P(t)+P(t)A(t)-P(t)B_1(t)P(t)+C_2(t)\right]x_0(t)=0,\\&P(t)x_0(T)=C_1x_0(T),\end{aligned} \tag{9}$$

которые выполняются для любого $x_0(t)$ в том случае, если выполняется матричное уравнение Риккати

$$\begin{aligned}&\dot{P}(t)+A'(t)P(t)+P(t)A(t)-P(t)B_1(t)P(t)+C_2(t)=0,\\&P(t)=C_1.\end{aligned} \tag{10}$$

Оптимальное управление, минимизирующее функционал (2) при найденной матрице *P(t)*, записывается в виде

$$u_0=-C_3^{-1}(t)B'(t)P(t)x_0(t). \tag{11}$$

При решении задачи стабилизации движения электрода, выбирая в качестве приоритетных требования стабилизации электрических режимов плавки, при постоянных значениях матриц *A*, *B*, C_2 и C_3 объект управления (2) описывается системой

$$\dot{x}(t)=Ax+Bu, x(0)=x_0, \tag{12}$$

а критерий качества управления имеет вид

$$J_0=\int_0^\infty\left(x'(t)C_2x(t)+u'C_3u\right)dt, C_2>0, C_3>0. \tag{13}$$

Оптимальное управление, согласно (11), имеет вид

$$u_0(t,x)=u_0(x)=-C_3^{-1}B'Px, \tag{14}$$

где *P* – постоянная симметричная матрица, являющаяся решением алгебраического уравнения Риккати:

$$A'P+PA-PBC_3^{-1}B'P+C_2=0. \tag{15}$$

Одним из вариантов решения данного уравнения является реализация следующей процедуры [11]:

– этап 1: на основе выбранного критерия качества управления в виде (13) выписывается матрица C_3 и находится матрица C_3^{-1};

– этап 2: строится матрица *M* с элементами m_{ij} вида

$$M=\begin{pmatrix}-A & BC_3^{-1}B'\\ C_2 & A'\end{pmatrix}. \tag{16}$$

– этап 3: реализуется QR-алгоритм, приводящий матрицу *M* к верхней форме Шура

$$S=W'MW, \tag{17}$$

где W – ортогональная матрица, S – верхняя блочно-треугольная матрица.

Для этого производится разложение матрицы M

$$M = QR, \tag{18}$$

где Q – ортогональная матрица; R – верхняя треугольная матрица.

Ортогональная матрица Q строится как произведение *n-1* элементарных отражений матрицы H_i. На начальном шаге выбирается матрица H_1 вида

$$H_1 = E - 2\beta^2 uu', \tag{19}$$

где

$$2\beta^2 = \frac{1}{\gamma(\gamma - m_{11})}, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} u &= (m_{11} - \gamma_1 m_{21}, \ldots m_{n1})' \\ \gamma &= \left(m_{11}^2 + m_{21}^2 + \ldots + m_{n1}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Проверяется непосредственно, что $H_1 = H_1' = H_1^{-1}$, $H_1 m = \gamma e_1$. Здесь

$$m = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ . \\ . \\ m_{n1} \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, результатом преобразования (19) является получение ортогональной матрицы H_1, а в матрице $M_1 = H_1 M$ поддиагональные элементы первого столбца равны нулю.

На следующем шаге находится матрица $M_2 = H_2 M_1$, причём матрица H_2 имеет вид

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widehat{H_2} \end{pmatrix},$$

где $\widehat{H_2}$ – матрица отражений, такая же, как и матрица H_1, но *(n-1)* порядка. При этом в матрице M_2 поддиагональные элементы уже первых двух столбцов равны нулю.

Продолжая описанную процедуру, находятся матрицы вида

$$M_3 = H_3 M_2, \ldots, M_{n-1} = H_{n-1} M_{n-2} = H_{n-1} \ldots H_2 H_1 M = R, \tag{22}$$

где R – верхняя треугольная матрица.

Так как $M = H_1 H_2 H_3 \ldots H_{n-1} R = QR$, $Q = H_1 H_2 H_3 \ldots H_{n-1}$, что следует из равенства (22) и ортогональности матрицы H_i, разложение (18) матрицы M построено.

Следующим шагом является построение последовательности матриц $M^{(k)}$: $M^{(1)} = RQ$, $M^{(2)} = R_1 Q_1 \ldots$

Так как $QM^{(1)}Q^{-1} = QRQQ^{-1} = QR = M$, матрицы $M^{(k)}$ ортогональны, подобно M. При этом, как доказано в работах [13, 14], последовательность $M^{(k)}$ сходится некоторой матрице Шура.

– этап 4: форма Шура с помощью некоторой ортогональной матрицы V $S_1 = V'SV$ переупорядочивается таким образом, чтобы первыми n элементами главной диагонали новой формы S_1 были собственные значения $\lambda_i(M)$ такие, что $Re\lambda_i(M)>0$, $i=1,\ldots,n$.

– этап 5: находится матрица $U = WV$ и выделяются её блоки U_{ij} $(i=1, 2; j=1,2)$ размера $n \times n$: $U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$.

– этап 6: решением методом Гаусса системы уравнений $U_{11}' P = U_{21}'$ определяется матрица P по формуле

$$P = U_{21} U_{11}^{-1}. \tag{23}$$

Построенная матрица P является решением уравнения Риккати.

Определение структуры и параметров математической модели процесса плавки

Система уравнений вида (2) может быть преобразована с учетом особенностей управления процессом плавки в электродуговой печи. Для этого следует учесть, что главной целью управления на этапе расплавления шихты является регулирование электрической мощности и в практике применяются дифференциальные регуляторы мощности, поддерживающие постоянство отношения напряжения к силе тока. При этом параметр регулирования имеет вид

$$A = aI - bU = bI\frac{a}{b} - bI\frac{U}{I} = bIr_0 - bIr\ , \tag{24}$$

где I – сила тока, А;

U – напряжение, В;

r – сопротивление фазы, Ом;

$r_0 = \dfrac{a}{b}$ – заданное значение полного сопротивления, Ом;

a, b – постоянные коэффициенты, зависящие от коэффициентов трансформаторов тока и напряжения и требуемого соотношения тока и напряжения.

Перемещение электрода вниз уменьшает расстояние от торца электрода до поверхности шихты или зеркала расплава (шлака), что вызывает увеличение тока дуги и уменьшение напряжения между торцом электрода и ванной. При движении электрода вверх величина тока дуги начинает падать, напряжение между торцом электрода и ванной увеличиваться. Таким образом, величина сопротивления может быть принята пропорциональной перемещению электрода. С учетом этого может быть записано уравнение

$$R(t) = k_1 x_1(t)\,, \tag{25}$$

где k_1 – коэффициент пропорциональности между величиной перемещения электрода и сопротивлением фазы.

Если в качестве приоритета в задаче управления процессом плавки на первом этапе выбрать критерии качества сплава, получаемые в результате реализации выбранного управления, то необходимо произвести замену переменных в системе (2), а именно: обозначить через x_1 температуру ванны, через x_2 - сопротивление фазы r, через x_3 – скорость движения электрода. Если при этом учесть линейную зависимость между сопротивлением фазы и величиной перемещения электрода, аналитическое описание объекта управления примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= k_2 x_3, \\ \dot{x}_3 &= k_3 u, \end{aligned} \tag{26}$$

где x_1 – температура ванны, T, x_2 – сопротивление фазы; r, x_3 – скорость движения электрода; υ, u – управление; давление в гидроцилиндре перемещения электрода; k_1 – коэффициент пропорциональности; учитывающий силу тока и теплоемкость ванны; k_2 – коэффициент пропорциональности между сопротивлением фазы и расстоянием от торца электрода и поверхностью ванны; k_3 – коэффициент пропорциональности между скоростью движения электрода и давлением в гидроцилиндре перемещения электрода.

Матрицы A и B при таком описании объекта управления имеют вид:

$A = \begin{pmatrix} 0 & k_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \end{pmatrix}$, а в качестве минимизируемого функционала может быть выбран квадратичный функционал вида:

$$J_0 = x'(T)C_1 x(T)\,. \tag{27}$$

Следовательно, задача управления электроплавкой на этапе плавления является задачей управления по конечному состоянию. При этом необходимо учесть, что конечное состояние оценивается по значениям параметра качества сплава, которые должны соответствовать заданным (регламентным) на момент времени выдачи расплава на конвейер. Такие параметры – выходные переменные процесса плавки – в свою очередь, зависят от входных переменных процесса, определяемых на основе измерения величин $x_i(t)$ в реальном времени. Поэтому задача управления существенно усложняется – в сформулированной постановке необходимо отыскивать такое управление $u(t)$, при котором вектор-функция выхода $y(t)=Cx(t)$ была бы близка к заданной вектор-функции $z(t)$, минимизируя квадратичный функционал вида (28) [15]

$$J_0 = \frac{1}{2} e'(T) C_1 e(T), \tag{28}$$

где $e(t) = z(t)-y(t)$ – величина рассогласования между фактическим значением параметров вектор-функции выхода $y(t)$ в процессе плавки и заданным эталонным значением вектор-функции выхода $z(t)$.

Алгоритм нахождения оптимального управления при такой постановке задачи в общем виде подробно описан в работе [15].

Исследуемый объект управления имеет ту особенность, что связь между параметрами, описывающими состояние системы (1) и параметрами вектор-функции выхода $y(t)$, имеет гораздо более сложную функциональную зависимость

$$y(t) = f\left(F_i(t), x(t)\right), \tag{29}$$

где $F_i(t)$ – содержание i-го элемента химического состава сплава в момент времени t.

Кроме этого, задаче адекватного описания объекта управления и последующего поиска оптимального управления должен предшествовать анализ входных и выходных переменных процесса. Для этого необходимо представить схему взаимосвязи входов и выходов, рассматривая их с точки зрения формирования структуры аналитического описания вида (29). Входными переменными в исследуемом процессе являются элементы химического состава сплава $F_i(t)$. Выходными переменными могут выступать либо физико-механические, специальные свойства сплава или параметры его микроструктуры.

Наиболее эффективным инструментом для получения такого аналитического описания является регрессионный анализ [16 – 19]. Его использование для решения широкого круга задач по моделированию сложных процессов в реальных промышленных условиях тормозится до сегодняшнего дня сложностью получения адекватного описания объекта в многомерном факторном пространстве по малой выборке данных, доступных для контроля в реальных промышленных условиях, а также невозможностью реализации активного промышленного эксперимента. Если удалось бы решить эту проблему, можно было бы с большой эффективностью использовать методы регрессионного анализа для задач управления такими сложными процессами, как процессы электроплавки.

Уравнение регрессии, описывающее функциональную зависимость (29) в исследуемом объекте, с учетом введенных входных переменных F_i, имеет вид

$$y_i = a_0 + a_1 F_1 + \ldots + a_m F_m + a_{12} F_1 F_2 + \ldots + a_{m-1,m} F_{m-1} F_m + \ldots + a_{12\ldots m} F_1 F_2 \ldots F_m, \tag{30}$$

$$F_i(t) = A_{0_i} e^{A_i e^{-\frac{E_i^a}{R x_1(t)} \cdot \frac{S}{m} t}}, \tag{31}$$

где A_{0_i} – параметр интегрирования кинетического уравнения $F_i=\varphi(t)$, A_i – параметр уравнения Аррениуса; E_i^a – энергия активации химической реакции, в которой принимает участие компонент F_i, x_1 – температура ванны; S – площадь реакционной поверхности в системе, в которой протекают химические реакции с участием компонента; F_i, m - масса расплава в печи (загрузка печи), кг.

Анализ параметров нечётких входных переменных и возможные пути снижения их неопределённости представлен на рис. 1.

Таким образом, процедуре поиска оптимального управления процессом электроплавки должна предшествовать процедура получения адекватного уравнения регрессии в виде (30). При этом процесс управления описывается следующим образом: по результатам измерения температуры в электропечи выполняется расчет содержания каждого из компонентов F_i по уравнению (31), полученный результат в этом же преобразователе пересчитывается в значение параметра функции выхода, которое сравнивается с заданным значением функции выхода, установленным на задатчике. При наличии рассогласования этих двух величин соответствующий сигнал управления подается на гидроцилиндр механизма перемещения электрода, последний перемещает электрод таким образом, чтобы ликвидировать это рассогласование. Структурная схема системы управления на первом этапе процесса представлена на рис. 2.

Характерной особенностью в рассматриваемой задаче является неопределённость в значениях входных переменных F_i, поэтому ключевым моментов в решении задачи математического моделирования для дальнейшего поиска оптимального управления является процедура оценивания параметров – суть нечётких оценок коэффициентов в уравнении (30).

Рис.1. Структурная схема формирования неопределенности и возможные пути её снижения в задаче математического моделирования процесса плавки

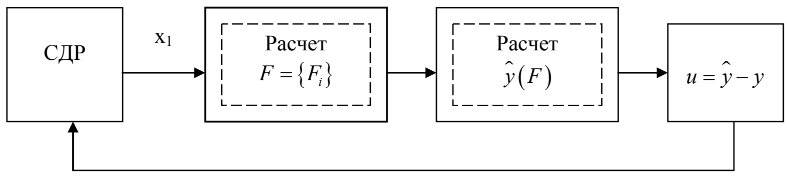

Рис. 2. Структурна схема системы управления
СДР – система дифференциальных уравнений, y – заданное значение выходной переменной, $\hat{y}$ – рассчитанное значение выходной переменной

Процедура оценивания параметров математической модели – СДР в структурной схеме системы управления

Подробно теоретические аспекты процедуры оценивания нечётких оценок коэффициентов в уравнении регрессии (30), которые входят в общее математическое описание управляемого процесса плавки СДР, подробно описаны в работах [20, 21], поэтому в качестве обобщения полученных результатов уместно привести общий алгоритм решения задачи.

Этап 1. Расчет координат вершин гипермногогранника в пространстве факторов нечётких входных переменных, кластеризация точек

$$F_{p,\min}=\min_j\{\overline{F}_{jp}\},\ p=1,2,...,m\,.,\ F_{p,\max}=\max_j\{\overline{F}_{jp}\},\ p=1,2,...,m\,,$$

$$\mu(F_{jp})=\begin{cases} L\left(\left(\left(\overline{\rho_{kj}^2}\right)-\rho_{kj}^2\right)\Big/\alpha_{kj}\right), \\ R\left(\left(\rho_{kj}^2-\left(\overline{\rho_{kj}^2}\right)\right)\Big/\beta_{kj}\right), \end{cases} \tag{32}$$

где $\rho_{kj}^2=\sum_{p=1}^{m}(a_{kp}-F_{jp})^2$, $k=1,2,...,2^m$. – мера нечёткого расстояния между k-й вершиной и j-й точкой;

$\alpha_{kj}=\sum_{p=1}^{m}\left(\alpha_{kp}^{(a)}+\beta_{jp}^{(F)}\right)$, $\beta_{kj}=\sum_{p=1}^{m}\left(\alpha_{jp}^{(F)}+\beta_{kp}^{(a)}\right)$ – левый и правый коэффициенты нечёткости;

$k^*=\arg\min_k\min_l\left\{\mu^\alpha\left(\rho_{kl}^2\right)\right\}$, $k,l\in\{1,2,...,m\}$. – критерий выбора принадлежности j-й точки к k-й вершине гипермногогранника в пространстве факторов нечётких входных переменных.

Этап 2. Формирование системы нечётких линейных алгебраических уравнений и построение локальных уравнений регрессии.

Системы нечётких линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) имеют вид

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 F_{11} + a_2 F_{12} + ... + a_m F_{1m} + a_{12} F_{11} F_{12} + ... + a_{m-1,m} F_{1,m-1} F_{1m} = y_i \\ .... \\ a_0 + a_1 F_{N_k 1} + a_2 F_{N_k 2} + ... + a_m F_{N_k m} + a_{12} F_{N_k 1} F_{N_k 2} + ... + a_{m-1,m} F_{N_k, m-1} F_{N_k m} = y_{N_k} \end{array} . \quad (33)$$

Функция принадлежности нечёткой величины невязки z_j

$$\mu\left(z_j\right) = \exp\left\{ -\frac{\left(z_j - \overline{z}_j\right)^2}{2D\left(z_j\right)} \right\}$$

$$z_j = a_0 + a_1 F_{j1} + a_2 F_{j2} + ... + a_m F_{jm} + a_{12} F_{j1} F_{j2} + ... + a_{m-1,m} F_{j,m-1} F_{jm} - y_j, \;\; j = 1, 2, ..., N_k ,$$

$$\overline{z}_j = a_0 + \sum_{p=1}^{m} a_p \overline{F}_{jp} + \sum_{p_1=1}^{m} \sum_{p_2 > p_1} a_{p_1 p_2} \overline{F}_{jp_1} \overline{F}_{jp_2} - y,$$

$$D\left(z_j\right) = \sum_{p=1}^{m} a_p^2 \sigma_{jp}^2 + \sum_{p=1}^{m} \sum_{p_2 > p_1} \sigma_{jp_1}^2 \sigma_{jp_2}^2 a_{p_1 p_2}^2 \; .$$

Решение системы нечётких линейных алгебраических уравнений (33) имеет вид

$$a_0 + a_1 \overline{F_{j1}} + ... + a_m \overline{F_{jm}} + a_{12} \overline{F_{j1}}\,\overline{F_{j2}} + ... + a_{m-1,m} \overline{F_{j,m-1}}\,\overline{F_{jm}} = y_j, \;\; j = 1, 2, ..., N_k ,$$

где

$$A_k^{(0)} = \begin{pmatrix} a_0^{(0)} \\ a_1^{(0)} \\ ... \\ a_{m-1,m}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad H_e = \begin{pmatrix} 1 & \overline{F_{11}} & ... & \overline{F}_{1,m-1} \overline{F}_{1,m} \\ 1 & \overline{F_{21}} & ... & \overline{F}_{2,m-1} \overline{F}_{2,m} \\ - & - & - & - \\ 1 & \overline{F_{N_k 1}} & ... & \overline{F}_{N_k,m-1} \overline{F}_{N_k,m} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_{N_k} \end{pmatrix}, A_k^{(0)} = \left(H^T H\right)^{-1} H^T Y \; .$$

Требования к чёткому решению нечёткой СЛАУ задаются следующим образом:

1. Близость к модальному значению $A^{(0)}$.
2. Компактность тела неопределённости нечёткого числа z_k.

$$\Phi_1\left(A_k\right) = S\left(z_k\right) dz_k + \left(A - A_k^{(0)}\right)^T \left(A - A_k^{(0)}\right) = \min ,$$

$$S\left(z_k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z_k) dz_k = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{\left(z_k - \overline{z}_k\right)^2}{2D(z_k)} \right\} dz_k = \sqrt{2\pi D(z_k)} \; .$$

Значение функции в *k-й* ортогональной точке рассчитывается по уравнению

$$y_k = a_{k0} + a_{k1} F_1^{(0)} + ... + a_{km} F_m^{(0)}, \;\; k = 1, 2, ..., 2^m \; .$$

Дисперсия функции в *k-й* ортогональной точке рассчитывается по уравнению

$$\sigma_k^2 = D\left(F_1^{(0)}\right) a_{k1}^2 + ... + D\left(F_m^{(0)}\right) a_{km}^2, \;\; k = 1, 2, ..., 2^m \; .$$

Этап 3. Процедура построения усеченного представительного ортогонального плана и выбор наиболее представительного плана.

Значение функции в V -й ортогональной точке рассчитывается по уравнению

$$y_{i_1i_2i_3} = y_V = b_{V0} + b_{V1}F_1^{(0)}\left(V\right) + b_{V2}F_2^{(0)}\left(V\right) + \ldots + +b_{Vm}F_m^{(0)}\left(V\right).$$

Дисперсия функции в V -й ортогональной точке рассчитывается по уравнению

$$\sigma^2_{i_1i_2i_3} = \sigma^2_V = D\left(b_{V0}\right) + D\left(b_{V1}\right)\left(F_1^{(0)}\left(V\right)\right)^2 + D\left(b_{V2}\right)\left(F_2^{(0)}\left(V\right)\right)^2 + \ldots + D\left(b_{Vm}\right)\left(F_m^{(0)}\left(V\right)\right)^2 .$$

где V – номер строки $i_1\ i_2\ i_3$ полного факторного эксперимента; $V = i_1 2^{2p} + i_2 2^p + i_3$; $F_i^{(0)}\left(V\right)$ – значение i -го фактора в V -й вершине гиперкуба; $D\left(b_{Vi}\right)$ – дисперсия ошибки оценивания i -го коэффициента V -го уравнения регрессии.

Критерий представительности плана имеет вид

$$\Phi = \sum_{i_1}^{2^p}\sum_{i_2}^{2^p}\sum_{i_3}^{2^p}\sigma^2_{i_1i_2i_3}Z_{i_1i_2i_3} .$$

Этап 4. Оценка коэффициентов уравнения регрессии.

Нечеткая оценка коэффициента $a_s^{(k)}$ перед s-м слагаемым уравнения регрессии имеет вид

$$a_s^{(k)} = \frac{1}{n_k}\sum_{l\in N_k}F_{ls}y_l^{(0)} ,$$

где $y_l^{(0)}$ - нечёткая оценка значения функции отклика в l-й вершине гиперкуба в m-м пространстве параметров $\left(F_1, F_2, ..., F_m\right)$.

Критерий компактности для k-го плана имеет вид

$$D_k = \max_{l\in N_k}\sigma_l^2 .$$

Выводы

Предложенная процедура оценивания структуры и параметров математических моделей, описывающих процессы получения сплавов для деталей энергетического машиностроения в электропечах, позволяет обойти принципиальные сложности, связанные с наличием многоуровневой неопределённости и сложностью математического описания управляемого процесса плавки. Реализация этой процедуры, основанной на получении аналитического описания взаимосвязи выходных и нечётких входных переменных в виде уравнения регрессии и последующем использовании этого описания в структурной схеме системы управления, позволяет получать стабильный химический состав и микроструктуру сплава, обуславливающих его высокие механические свойства. При этом понятие стабильности предполагает попадание значений параметров сплава в заданный диапазон на протяжение всего процесса плавки, т.е. параметрическую надежность отливок. Приведенный алгоритм оценивания параметров математической модели исследуемого процесса в условиях двухуровневой неопределённости может быть использован при решении вопросов технической реализации систем управления процессом получения сплава в АСУ ТП, так как позволяет в реальном времени рассчитывать те параметры, которые не подлежат непосредственному контролю в ходе технологического процесса.

Литература

1. Dempster, A. P. Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping / A. P. Dempster // Ann. of Math. Statistics, 1967. - V.38. - P. 325 - 339.

2. Shafer, G. A. Mathematical Theory of Evidence. Princeton / G. A. Shafer // Princeton University Press, 1976. - 297 p.

3. Pawlak, Z. Rough relations / Z. Pawlak // Pr. IPI PAN. 1981. № 435. P. 10.

4. Дилигенский, Н. В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н. В. Дилигенский, Л. Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: Машиностроение − 1, 2004. – 397 с.

5. Bodjanova, S. Approximation of fuzzy concepts in decision making / S. Bodjanova // Fuzzy Sets and Systems. – 1997. – V.85. - P. 23 – 29.
6. Нариньяни, А. С. Недоопределенность в системе представления и обработки знаний / А. С. Нариньяни // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1986. – № 5. – С. 8 – 11.
7. Нариньяни, А. С. Недоопределенные множества - новый тип данных для представления знаний. / А. С. Нариньяни. - Препринт ВЦ СО АН СССР.: Новосибирск, 1980. - № 232.
8. Нариньяни, А. С. Недоопределенное календарное планирование: новые возможности / А. С. Нариньяни, Д. А. Иванов, С. В. Седреев, С. А. Фролов // Информационные технологии. – 1997. – № 1. – С. 34 – 37.
9. Zadeh L. A. Fuzzy Sets // Information and Control. - 1965. - V.8. - P. 338 - 353.
10. Раскин, Л. Г. Нечеткая математика: моногр. / Л. Г. Раскин, О. В. Серая. – Харьков: Парус, 2008. – 352 с.
11. Афанасьев, В. Н. Математическая теория конструирования систем управления [Текст] / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов – М.: Высш. шк. – 1989. – 447 с.
12. Ли, Э. Б. Основы теории оптимального управления / Э. Б. Ли, Л. Маркус. – М.: Наука, 1972, 578.
13. Икрамов, Х. Б. Численное решение матричных уравнений / Х. Б. Икрамов. – М.: Наука, 1984, 192
14. Воеводин, В. В. Вычислительные основы линейной алгебры / В. В. Воеводин. – М.: Наука, 1977, 304
15. Качанов, П. А. Оптимальное управление состоянием динамических систем в условиях неопределенности / П. А. Качанов. – Х.: ХГПУ, – 2000. – 209 с.
16. Серая, О. В. Оценивание параметров уравнения регрессии в условиях малой выборки / О. В. Серая, Д. А. Дёмин // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2009. – № 6/4(42). – 2009. – С. 14 – 19.
17. Раскин, Л. Г. Искусственная ортогонализация пассивного эксперимента в условиях малой выборки нечетких данных / Л. Г. Раскин, Д. А. Дёмин // Інформац.-керуючі системи на залізнич. трансп. – 2010. – № 1(80). – С. 20 – 23.
18. Серая, О. В. Оценка представительности усеченных ортогональных подпланов плана полного факторного эксперимента / О. В. Серая, Д. А. Дёмин // Систем. дослідження та інформац. технології. – 2010. – № 3. – С. 84 – 88.
19. Дёмин, Д. А. Метод обработки малой выборки нечетких результатов ортогонализованного пассивного эксперимента / Д. А. Дёмин, Т. И. Каткова // Вісн. Інженер. академії. – № 2. – 2010. – С. 234 – 237.
20. Seraya, O. V. Linear regression analysis of a small sample of fuzzy input data / O. V. Seraya, D. A. Demin // Journal Automation and Information Sciences. – 2012. – 44 (7). – P. 34 - 48.
21. Дёмин, Д. А. Применение искусственной ортогонализации в поиске оптимального управления технологическими процессами в условиях неопределенности / Д. А. Дёмин // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – №5/9 (65). – С. 45 – 53.

Поступила в редакцию 14.10.2013

Н. Е. Хацько

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина
e-mail: n.khatzko@gmail.com

УДК 629.054

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЕТОМ ПО ДАННЫМ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ ДАТЧИКОВ НИЗКОГО КЛАССА ТОЧНОСТИ

Ключові слова: *інерціальна навігаційна система, автоматична система керування, алгоритмічна компенсація, гіроскоп, акселерометр.*

Анотація. *Надано результати моделювання спільної роботи системи керування літальним апаратом і інерціальної навігаційної системи. Для підвищення точності керування використано метод алгоритмічної компенсації похибок вимірів інерціальних датчиків. Параметри математичних моделей похибок датчиків отримані в процесі їх калібрування. Показано, що розроблені методики калібрування інерціальних датчиків середньої точності дозволяють підвищити якість інерціального вимірювального блоку до навігаційного.*

Введение

В настоящее время в аэронавигации высокоточное позиционирование воздушных подвижных объектов является одной из ключевых задач управления. Вместе с тем огромное значение для обще-