[1] **О. О. Литвин**, канд. фіз.-мат. наук
[1] **Н. І. Штепа**, канд. фіз.-мат. наук
[2] **С. І. Кулик**, канд. фіз.-мат. наук
[1] **О. С. Чорна**

[1] Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків, e-mail: loo71@bk.ru
[2] Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, e-mail: academ_mail@ukr.net

Ключові слова: *математична модель, інтерлінація, керни, похилі свердловини, поліноміальна інтерполяція.*

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ КОРИСНИХ КОПАЛИН ЗА ДОПОМОГОЮ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ІНТЕРЛІНАНТІВ НА СИСТЕМІ ПОХИЛИХ СВЕРДЛОВИН

Запропонований метод моделювання розподілу корисних копалин за допомогою поліноміальних інтерлінантів на системі похилих свердловин, розміщених як в одній площині, так і довільним чином. Як експериментальні дані взято розподіл корисних копалин в кожній точці системи свердловин. Математична модель дозволяє обчислювати невідомий розподіл корисних копалин між свердловинами.

Вступ

Похило направлене буріння поступово стає основним видом буріння як на суші, так і на морі при проходці свердловин із стаціонарних платформ. Одночасно існує тенденція підвищення вимог до точності попадання забою свердловин в задану точку і щодо дотримання проектного профілю свердловини. Тому необхідно забезпечувати ефективний контроль просторового положення стовбура свердловин [1].

Загально відомим є метод розвідки корисних копалин, що грунтується на аналізі вмісту кернів свердловин, просвердлених в різних точках поверхні даного регіону. В роботах [2–5] запропоновано і досліджено загальний метод побудови просторових математичних моделей розподілу корисних копалин на основі даних вмісту кернів вертикальних свердловин та інтерлінації функцій трьох змінних $f(x, y, z)$ – розподілу корисних копалин в кожній точці (x, y, z). У вказаних роботах істотно використовувалось припущення про те, що всі свердловини вертикальні.

У теорії наближення функцій двох і більше змінних $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \ge 2$, в останні десятиліття інтенсивно розвивається розділ, присвячений побудові, дослідженню і деяким застосуванням операторів, які відновлюють (можливо, наближено) функції $f(x)$ за відомими їх слідами та слідами їх частинних похідних до фіксованого порядку N ($N \ge 0$) на M ($M \ge 1$), m-вимірних ($0 \le m < n$) поверхнях в R^n. З метою уніфікації тверджень будемо вважати точки нуль-вимірними поверхнями, а лінії – одновимірними поверхнями. У випадку $m = 0$, $n \ge 1$ інформація про функцію $f(x)$ задається в M точках (полюсах), і такі оператори наближення називаються операторами *інтерполяції* (inter – між, pol – полюс, точка) для $M \ge 2$. У випадку $m = 1$, $n \ge 2$ інформація про функцію $f(x)$ задається слідами $f(x)$ та слідами її частинних похідних $\dfrac{\partial^{|s|} f(x)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}}$, $|s| = s_1 + \ldots s_n$, $1 \le |s| \le N$ на M лініях, і такі оператори будемо називати *операторами інтерлінації* (inter – між, line – лінія).

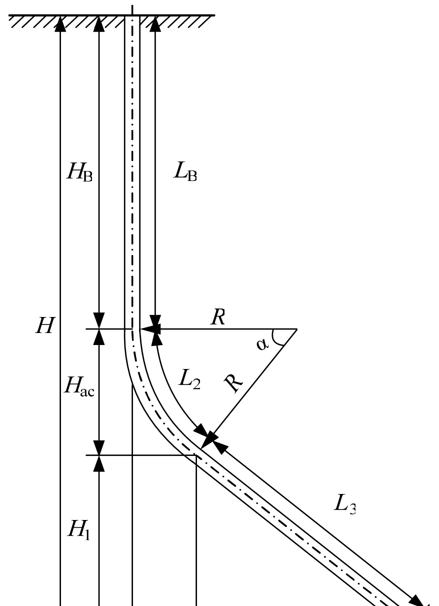

Рис. 1. Графічне зображення похилої свердловини

У зарубіжній літературі для операторів інтерлінації використовується декілька назв. Найпоширенішою є назва «blending function interpolation» – «змішана інтерполяція функцій».

Враховуючи, що інтерлінація є природним узагальненням інтерполяції, в теорії інтерлінації використовуємо терміно-

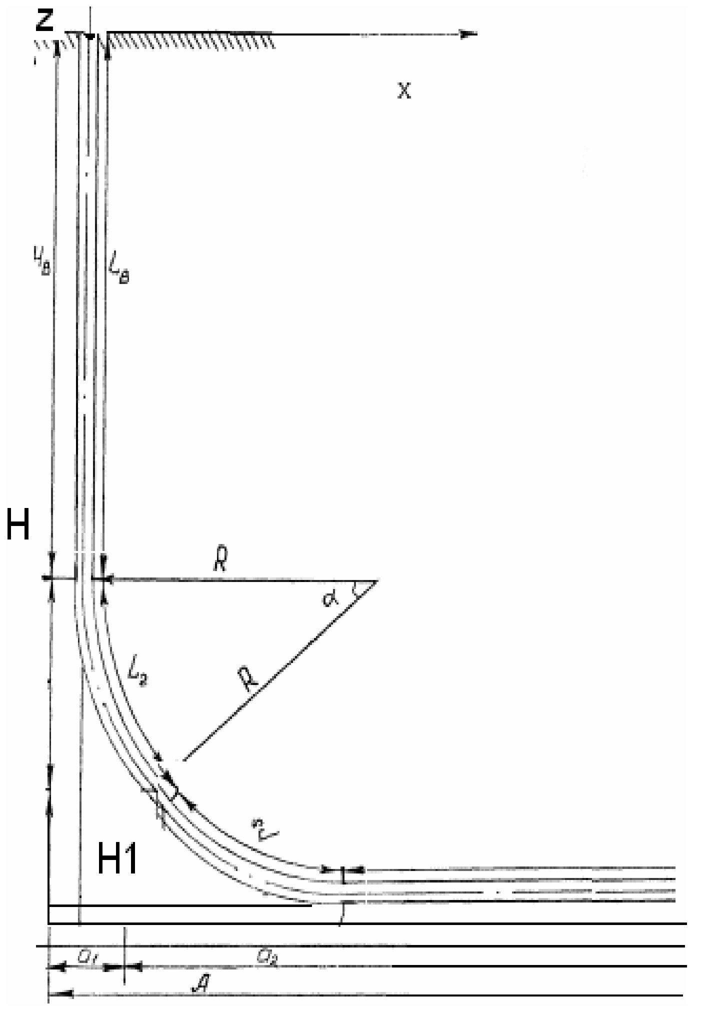

Рис. 2. Графічне зображення горизонтальної свердловини

логію з теорії інтерполяції (інтерполююча функція – інтерлінуюча функція, вузли інтерполяції – лінії інтерлінації тощо).

В даній роботі вважаємо, що інформація про розподіл корисних копалин задана на системі як вертикальних, так і похилих свердловин спеціальної геометричної форми.

Свердловини, для яких проектом передбачається певне відхилення осі від вертикалі по певній кривій, називаються похилими.

Похиле буріння на цей час широко застосовується при бурінні свердловин для дослідження нафти, газу і твердих корисних копалин.

Основне завдання похило направленого буріння – проводка свердловин з максимальною відповідністю проекту в мінімальні терміни і з мінімальними витратами – може бути забезпечена лише за умови контролю за положенням стовбура свердловин [6].

Таким чином, актуальною є задача побудови просторових математичних моделей розподілу корисних копалин для випадку, коли інформацію про функцію розподілу корисних копалин $f(x, y, z)$ задано у M похилих свердловинах (допускаються також вертикальні свердловини). Для того щоб побудувати математичні моделі для цього випадку, дамо спочатку математичне означення похилої свердловини.

Означення. Будемо вважати похилою свердловиною множину точок такого вигляду $\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z),$
$-H \le z \le 0\}$, $k = 1, \dots, M$, де функції $X_k(z)$, $Y_k(z)$ задовольняють умови $r_k'(z) < 0$ де $r_k = \sqrt{\left(X_k(z) - X_k(0)\right)^2 + \left(Y_k(z) - Y_k(0)\right)^2}$ (див. рис. 1).

Таким чином, у даному означенні свердловини ми свідомо вважаємо, що діаметр свердловини дорівнює нулю, тобто що множина точок, які належать свердловині, є у своїй сукупності деякою лінією.

1. Інтерлінація на системі похилих свердловин, розміщених в одній площині

Припустимо, що система свердловин розміщена таким чином, що кожна з них може бути похилою лише в площині $y = Y_i = \text{const}$, $l = 1, \dots, n$, $x = x_k(z)$, $k = 1, \dots, m$.

Зауважимо, крім того, що в даній роботі виключається випадок горизонтальних свердловин, у яких при фіксованому значенні $z = -H_1$, система точок у свердловині лежить у горизонтальній площині (рис. 2). Цей випадок буде розглянутий в окремій роботі авторів.

Хай $s_{1k}(x, z)$, $k = 1, \dots, m$ $s_{2l}(y, z)$, $l = 1, \dots, n$ базисні функції, які визначаються формулами (нижче $X_k = X_k(z)$)

$$s_{1k}(x,z)=\frac{(x-X_1)(x-X_2)...(x-X_{k-1})(x-X_{k+1})...(x-X_m)}{(X_k-X_1)(X_k-X_2)...(X_k-X_{k-1})(X_k-X_{k+1})...(X_k-X_m)},$$

$$s_{2l}(y)=\frac{(y-Y_1)(y-Y_2)...(y-Y_{l-1})(y-Y_{l+1})...(y-Y_n)}{(Y_l-Y_1)(X_l-Y_2)...(Y_l-Y_{l-1})(Y_l-Y_{l+1})...(Y_l-Y_n)}.$$

Лема 1. Базисні функції $s_{1k}(x)=s_{1k}(x,z)$, $s_{2l}(y)$, $k=1,\ldots,m$, $l=1,\ldots,n$ мають такі властивості:

$$s_{1k}(X_p(z),z)=\delta_{k,p},\quad k,p=1,\ldots,m;\quad s_{2l}(X_q)=\delta_{l,q},\quad l,q=1,\ldots,n;\quad G=[X_1,X_m]\times[Y_1,Y_n]. \qquad (1)$$

Доведення цієї леми можна провести за допомогою безпосередньої підстановки у формули s_{1k}, s_{2l} замість змінних x та y відповідних функцій.

Теорема 1. Оператор $O_{MN}f(x,y,z)=\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N}s_{1k}(x,z)s_{2l}(y)f_{k,l}(z)$ є оператором інтерлінації функції $f(x,y,z)$ на системі похилих свердловин $\Gamma_{k,l}=\{(x,y,z): x=X_k(z), y=Y_l=\text{const}, -H\le z\le 0\}$, $k=1,\ldots,m$, $l=1,\ldots,n$, який має властивості

1. $O_{MN}f(X_p(z),Y_q,z)=f(X_p(z),Y_q,z)=f_{p,q}(z)$, $p=1,\ldots,M$, $q=1,\ldots,N$.

2. Для кожного фіксованого z оператор $O_{MN}f(x,y,z)$ є оператором поліноміальної інтерполяції функції за двома змінними x та y.

Доведення. Враховуючи властивості (1) для базових функцій

$$s_{1k}(X_q(z),z)=\delta_{k,p},\quad 1\le k,q\le m,\quad s_{2l}(Y_r)=\delta_{rl},\quad 1\le r,l\le n,$$

можна записати

$$O_{MN}f(X_p(z),Y_q,z)=\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N}s_{1k}(X_p(z),z)s_{2l}(Y_q)f_{k,l}(z)=$$

$$=\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N}\delta_{k,l}\delta_{l,q}f_{k,l}(z)=f_{p,q}(z),\qquad p=1,\ldots,M,\quad q=1,\ldots,N,\quad -H\le z\le 0.$$

Таким чином, перше твердження теореми 1 доведене.

Для доведення другого твердження теореми 1 достатньо зауважити, що при фіксованому z базисні функції $s_{1k}(x,z)$, $s_{2l}(y)$, $k=1,\ldots,M$, $l=1,\ldots,N$. є базисними поліномами лагранжевої інтерполяції за змінними x та y відповідно.

Теорема 1 доведена.

Теорема 2. Нехай $f(x,y,z)\in C^{\mu,\nu,0}(D)$, де $D\in R^3$ – область, якій належать всі свердловини. Тоді залишок інтерлінації $R_{NM}f(x,y,z)=f-O_{NM}f$ можна подати так:

$$R_nf(x,y,z)==\sum_{k=1}^{N}s_{1,k}(x,z)\int_{X_k}^{x}\frac{\partial^\mu}{\partial\xi^\mu}f(\xi,y,z)\frac{(X_k(z)-\xi)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}d\xi++\sum_{\ell=1}^{N}s_{2,\ell}(y)\int_{Y_\ell}^{y_0}\frac{\partial^\nu}{\partial\eta^\nu}f(x,\eta,z)\frac{(Y_\ell-\eta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}d\eta-$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{M}s_{1,k}(x,z)s_{2,\ell}(y)\int_{X_k}^{x}\int_{Y_\ell}^{y_0}f^{(\mu,\nu,o)}(\xi,\eta,z)\frac{(X_k(z)-\xi)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\frac{(Y_\ell-\eta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}d\xi d\eta,\qquad 1\le\mu\le M, 1\le\nu\le N.$$

Доведення. Скористаємося тотожностями [9, 10]

$$R_{NM}f(x,y,z)=(R_1+R_2-R_1R_2)f(x,y,z),$$

де $R_1f(x,y,z)=f-L_Mf=\sum_{k=1}^{M}s_{1,k}(x,z)\int_{X_k(z)}^{x}\frac{\partial^\mu}{\partial\xi^\mu}f(\xi,y,z)\frac{(X_k(z)-\xi)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}d\xi$, $L_Mf=\sum_{k=1}^{M}s_{1,k}(x,z)f(x_k,y,z)$,

$$R_2f(x,y,z)=f-L_Nf=\sum_{\ell=1}^{N}s_{2,\ell}(y)\int_{Y_\ell}^{y_0}\frac{\partial^\nu}{\partial\eta^\nu}f(x,\eta,z)\frac{(Y_\ell-\eta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}d\eta,\quad L_Nf=\sum_{l=1}^{M}s_{1,l}(y)f(x,Y_l,z),$$

$$f(x,y,z)=\sum_{k=1}^{M}s_{1,k}(x,z)f(x,y,z),\left[L_M\,\frac{(x-u)^{\mu}}{\mu!}\right]\Bigg|_{u=x}=0,\quad 1\le\mu\le M-1,$$

які є узагальненнями відповідних тотожностей [9] на випадок, коли базисні функції $s_{1k}(x, z)$ залежать не тільки від змінної x, але також від параметра z.

Вище в записі $L_M\,\frac{(x-u)^{\mu}}{\mu!}$ вважається, що оператор L_M діє на змінну x. Скористаємося також тотожностями, які перевіряються інтегруванням частинами

$$f(x,y,z)=f\left(X_k(z),y,z\right)-\sum_{\mu=1}^{r-1}f^{(\mu)}(x,y,z)\frac{\left(X_k(z)-x\right)^{\mu}}{(\mu)!}+$$
$$+\int_{X_k(z)}^{x}f^{(r)}(\xi,y,z)\frac{\left(X_k(z)-\xi\right)^{r-1}}{(r-1)!}d\xi,k=\overline{1,M}.$$

Тоді можна написати послідовність тотожностей

$$f(x,y,z)=\sum_{k=1}^{M}s_{1,k}(x,z)f(x,y,z)=\sum_{k=1}^{M}s_{1,k}(x,z)\left[f(X_k(z),y,z)-\sum_{\mu=1}^{r-1}f^{(\mu,o,o)}(x,y,z)\frac{(X_k(z)-x)^{\mu}}{\mu!}+\right.$$
$$\left.+\int_{X_k(z)}^{x}f^{(r,o,o)}(\xi,y,z)\frac{(X_k(z)-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}d\xi\right]=L_M f(x,y,z)-\sum_{\mu=1}^{r-1}f^{(\mu,o,o)}(x,y,z)\left[L_M\,\frac{(x-u)^{\mu}}{\mu!}\right]\Bigg|_{u=x}+$$
$$+\sum_{k=1}^{M}s_{1,k}(x,z)\int_{X_k(z)}^{x}f^{(r,o,o)}(\xi,y,z)\frac{(X_k(z)-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}d\xi=L_M f(\xi,y,z)+R_{1r}f(\xi,y,z).$$

Аналогічне доведення можна провести і для залишку R_2. Таким чином, твердження теореми 2 доведено для $f(x, y, z)\in C^{\mu,\nu,0}(0)$, і для кожної функції $f(x, y, z)\in C(D)$, $D\subset R^3$, функція $O_{MN}f(x, y, z)\in C(D)$ має такі властивості:

$$O_{MN}f(X_p(z), Y_p, z) = f(X_p(z), Y_p, z),\quad p = 1, \ldots, M,\quad -H\le z\ 0.$$

Теорема 2 доведена.

Наслідок. Таким чином, оператор $O_{MN}f(x, y, z)$ дозволяє обчислювати значення функції $f(x, y, z)$ між похилими, взагалі кажучи, свердловинами, якщо інформація про функцію задана слідами в цих свердловинах. При цьому, якщо розподіл корисних копалин визначається неперервною функцією $f(x, y, z)$, яка є поліномом степеня n за змінними x та y при кожному z, то оператор $O_{MN}f(x, y, z)$ точно буде відновлювати таку функцію.

Зауваження. Аналогічно можна написати оператор інтерлінації для випадку, коли свердловини мають геометричну форму такого вигляду:

$$\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k = \text{const}, y = Y_l(z), -H\le z\le 0\}, k = 1, \ldots, M, l = 1, \ldots, N.$$

В цьому випадку оператор $O_{MN}f(x, y, z)$ є математичною моделлю розподілу корисних копалин з використанням інтерлінації функцій, побудованої на основі поліноміальних допоміжних функцій $s_{1k}(x)$, $s_{2l}(y, z)$.

2. Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою даних з кернів похилих свердловин, розміщених довільним чином

Вважаємо, що для довільної функції $f(x, y, z)\in C(R^3)$ (взагалі кажучи невідомої), яка є розподілом корисних копалин в корі планети, нам відомі її сліди $f(X_k(z), Y_k,(z), z) = \gamma_k$ $k = 1, \ldots, M$ в точках M похилих свердловин

$$\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), -H\le z\le 0\}, k = 1, \ldots, M.$$

Введемо позначення $X(z)_k = X_k(z)$, $Y(z) = Y_k(z)$, $k = 1, \ldots, M$.

$$O_{M,\lambda} f(x,y,z;X(z),Y(z)) = \sum_{k=1}^{M} \gamma_k(z) \ell_{M,k,\lambda}(x,y;X(z),Y(z)), \qquad \lambda \geq 1, \quad M = 2,3,...,$$

$$\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z;X(z),Y(z)) = \prod_{i=1, j\neq k}^{M} \frac{d_i(x,y,z;X(z),Y(z))^{\lambda}}{d_{i,k}^{\lambda}} = \prod_{i=1, j\neq k}^{M} \left(\frac{d_i(x,y,z;X(z),Y(z))}{d_{i,k}} \right)^{\lambda},$$

$$d_i(x,y,z;X(z),Y(z)) = \sqrt{(X_i(z)-x)^2 + (Y_i(z)-y)^2}; \qquad d_{i,k} = \sqrt{(X_i(z)-X_k(z))^2 + (Y_i(z)-Y_k(z))^2},$$

які для випадку $\gamma_k(z) = \gamma_k = \text{const}$, $k = 1, \ldots, M$, є інтерполяційними операторами на нерегулярній сітці вузлів, запропонованими О. М. Литвиним [7] у 1990 р.

Теорема 3. Якщо у формулі для $O_{M,\lambda} f(x, y, z; X(z), Y(z))$ покласти

$$\ell_{M,k,\lambda}(x,y;X(z),Y(z)) = \frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} \left| (x - X_i(z))(X_k(z) - X_i(z)) + (y - Y_i(z))(Y_k(z) - Y_i(z)) \right|^{\lambda}}{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} \left((X_k(z) - X_i(z))^2 + (Y_k(z) - Y_i(z)^2 \right)^{\lambda}},$$

то оператор $O_{M,\lambda} f(x, y, z; X(z), Y(z))$ буде мати властивості:

1. Для $\lambda/2 \in D$ допоміжні функції $\ell_{M,k,\lambda}(x, y; X(z), Y(z))$ будуть поліномами від двох змінних степеня $(M-1)\lambda$.

2. $O_{M,\lambda} f(X_p(z), Y(z), z; X(z), Y(z)) = \gamma_p(z)$, $\quad p = 1, \ldots, M$.

Доведення. Узагальнюючи аналогічне доведення теореми 6.1.2 з [8], зауважимо, що при $\lambda/2 \in D$ чисельник у формулі для функцій $\ell_{M,k,\lambda}(x, y; X(z), Y(z))$ є поліномом степеня $(M-1)\lambda$ за змінними x та y, що і доводить перше твердження теореми. Враховуючи, що знаменники у формулі для $\ell_{M,k,\lambda}(x, y; X(z), Y(z))$ залежать лише від z, зробимо висновок, що $\ell_{M,k,\lambda}(x, y; X(z), Y(z))$ – поліном степеня $(M-1)\lambda$ за змінними x та y. Тобто $O_{M,\lambda} f(x, y, z; X(z), Y(z))$ також є поліномом степеня $(M-1)\lambda$ за змінними x та y, якщо $\lambda/2 \in D$, $\forall z \in [-H, 0]$.

Дослідимо допоміжні функції $\ell_{M,k,\lambda} f(x, y; X(z), Y(z))$. Для цього запишемо таку послідовність рівностей:

$$\ell_{M,k,\lambda}(X_p(z),Y_p(z);X(z),Y(z)) = \frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} \left| (X_p(z) - X_i(z))(X_k(z) - X_i(z)) + (Y_p(z) - Y_i(z))(Y_k(z) - Y_i(z)) \right|^{\lambda}}{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} \left((X_k(z) - X_i(z))^2 + (Y_k(z) - Y_i(z)^2 \right)^{\lambda}} =$$

$$= \begin{cases} 1, p = k, \\ 0, p \neq k, p = \overline{1,M}, \end{cases} \quad \forall z \in [-H, 0].$$

Таким чином і при такому виборі $\ell_{M,k,\lambda} f(x, y; X_k(z), Y_k(z))$, виконуються співвідношення

$$\ell_{M,k,\lambda} f(X_p(z), Y_p(z); X(z), Y(z)) = \delta_{k,p}, \quad k, p = 1, \ldots, M.$$

Зазначимо, що знаменник $\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_{i,k}^{\lambda}(z)$ у формулі для $\ell_{M,k,\lambda} f(x, y; X(z), Y(z))$ залежить від z і $d_{i,k}^{\lambda}(z) > 0 \ \forall i,k \in \{1,...,M\}$, $\lambda > 0$, а чисельник – невід'ємна функція $\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_i(x,y,z;X(z),Y(z))^{\lambda} \geq 0$. Тому $\ell_{M,k,\lambda}(x, y; X_k(z), Y_k(z)) \geq 0$ $\forall k = 1, \ldots, M$, $\lambda > 0$,

$$\ell_{M,k,\lambda}(|X_p(z),Y_p(z);X(z),Y(z)) = \prod_{i=1,i\neq k}^{M} \frac{d_i(X_p(z),Y_p(z),z;X(z),Y(z))^{\lambda}}{d_{i,k}^{\lambda}(z)} = \frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_{i,p}^{\lambda}(z)}{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_{i,k}^{\lambda}(z)} = \delta_{k,p}, \quad k,p=1,\ldots,M,$$

оскільки $\dfrac{\prod_{i=1,i\neq 0}^{M} d_{i,p}^{\lambda}(z)}{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_{i,k}^{\lambda}(z)} = \begin{cases} 1, \text{якщо } p=k, \\ 0, \text{якщо } p=i, \text{бо } \ d_{i,i}(z)=0. \end{cases}$

Таким чином, $\ell_{M,k,\lambda}f(X_p(z), Y_p(z); X(z), Y(z)) = \delta_{k,p}$, $k, p = 1, \ldots, M$. Враховуючи це, можна записати послідовність рівностей

$$O_{M,\lambda}f(X_p(z),Y_p(z),z;X(z),Y(z)) = \sum_{k=1}^{M}\gamma_k(z)\ell_{M,k,\lambda}(X_p,Y_p;X(z),Y(z)) = \sum_{k=1}^{M}\gamma_k(z)\delta_{k,p} = \gamma_p(z), \quad p=1,\ldots,M.$$

Теорема 3 доведена.

Будемо використовувати при побудові операторів $O_{M,\lambda}f(x, y, z; X(z), Y(z))$ такі допоміжні функції:

$$h_{p,\lambda}(x,y) = \frac{\ell_{M,p,\lambda}(x,y,X(z),Y(z))}{\sum_{q=1}^{M}\ell_{M,p,\lambda}(x,y,X(z),Y(z))}.$$

Лема 2. Функції $h_{p,\lambda}(x, y)$ мають властивості

1. $h_{p,\lambda}(x, y) \geq 0$;
2. $0 \leq h_{p,\lambda} \leq 1$;
3. $h_{p,\lambda}(X_k(z), Y_k(z)) = \delta_{k,p}$, $1 \leq k, p \leq M$.

Доведення. Доведення першої властивості випливає з того, що чисельник і знаменник у формулі для $h_{p,\lambda}(x, y)$ є додатними функціями. Друга властивість випливає з того, що сума M додатних чисел, одне з яких може дорівнювати нулю, є більшою, ніж кожне з цих чисел. Доведення третьої властивості випливає з рівності нулю чисельника формули $h_{p,\lambda}(x, y)$ у всіх точках $X_m(z)$, $Y_m(z)$, $m \neq p$, тобто чисельник і знаменник функції $h_{p,\lambda}(x, y)$ у точці $(X_p(z), Y_p(z))$ є однаковими.

Лема 2 доведена.

Теорема 4. Справедливі такі співвідношення: якщо $\gamma_k(z) \in C[-H, 0]$, $k = 1, \ldots, M$, то $O_{M,\lambda}f(x, y, z; X(z), Y(z)) \in C(R^3)$; $O_{M,\lambda}f(X_p(z), Y_p(z), z; X(z), Y(z)) = \gamma_p(z)$, $p = 1, \ldots, M$, $\forall z \in [-H, 0]$.

Доведення. Використовуючи введені вище позначення та твердження леми 2, можна дійти висновку, що

$$O_{M,\lambda}(X_p(z),Y_p(z),z;X(z),Y(z)) = \frac{\sum_{k=1}^{M}\gamma_k(z)l_{k,\lambda}(X_p(z),Y_p(z);X(z),Y(z))}{\sum_{i=1}^{M}l_{i,\lambda}(X_p(z),Y_p(z);X(z),Y(z))} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{M}\gamma_k(z)\delta_{k,p}}{\sum_{i=1}^{M}\delta_{i,p}} = \frac{\gamma_p(z)\delta_{p,p}}{\delta_{p,p}} = \gamma_p(z), \quad p=1,\ldots M.$$

Таким чином, теорема 4 доведена.

Теорема 5. Досліджені в теоремі 4 оператори мають таку властивість: в кожній точці з координатами (x, y, z) виконуються нерівності $0 \leq O_{M,\lambda}(x, y, z; X(z), Y(z)) \leq \max\{\gamma_1(z), \ldots, \gamma_M(z)\}$.

Доведення. По-перше, зауважимо, що $\gamma_p(z) \geq 0$, крім того, скористаємось нерівністю $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_M a_M \leq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_M\}$, якщо $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_M = 1$ і $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M \geq 0$. Застосовуючи це твердження до розглядуваного нами твердження, коли $a_k = \gamma_k(z)$, $k = 1, \ldots, M$ і при цьому в кожній точці (x, y) може дорівнювати нулю лише одне з чисел λ_i, а всі інші більші нуля, можемо зробити висновок про справедливість твердження теореми 5.

Висновки

Таким чином, оператор $O_{M,\lambda}(x, y, z; X(z), Y(z))$ є тривимірною математичною моделлю розподілу корисних копалин з використанням інтерлінації функцій на системі довільно похилих свердловин, що грунтується на використанні обмежених дробово-раціональних допоміжних функцій. Він інтерлінує невідомий розподіл $f(x, y, z)$ в кожній з ліній – похилих свердловин. При цьому його максимальні значення в кожній точці (x, y, z) не перевищують максимальних значень слідів функції $f(x, y, z)$ у цих свердловинах.

Автори планують створити програмне забезпечення для запропонованих методів та алгоритмів побудови математичних моделей розподілу корисних копалин в корі планети на основі даних з кернів похилих свердловин, а також розробити і дослідити оператори сплайн-інтерлінації на системі похилих свердловин.

Література

1. *Исаченко, В. Х.* Инклинометрия скважин / В. Х. Исаченко. – М.: Недра, 1987. – 216 с.
2. *Литвин, О. М.* Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних / О. М. Литвин, Н. І. Штепа // Доп. НАН України. – 2009. – № 1. – С. 25–29.
3. *Литвин, О. М.* Метод оцінки запасів корисних копалин на основі аналізу результатів свердловинного буріння і узагальненої інтерлінації функцій 3-х змінних / О. М. Литвин, Н. І. Штепа // Зб. тез доп. XLII наук.-практ. конф. УІПА. 10–15 грудня 2008 р. Ч. 1. Харків. – 2008. – С. 84.
4. *Литвин, О. М.* Про математичне моделювання структури кори Землі з використанням інтерлінації функцій трьох змінних / О. М. Литвин, Н. І. Штепа // Теорія прийняття рішень : Пр. IV між нар. шк.-сем. Ужгород: УжНУ. 29 вересня – 4 жовтня. 2008. – С. 105.
5. *Литвин, О. М.* Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних / О. М. Литвин, Н. І. Штепа / Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV) : Пр. між нар симп. Крим, смт. Кацивелі, 24–29 вересня 2009. Т. 2; Київ. – 2009. – С. 20–24.
6. *Калинин, А. Г.* Бурение наклонных скважин: Справочник / А. Г. Калинин, Н. А. Григорян, Б. З. Султанов. – М.: Недра, 1990. – 348 с.
7. *Литвин, О. Н.* Интерполирование функций: Учеб. пособие / О. Н. Литвин // – Киев: УМК ВО, 1988. – 31 с.
8. *Литвин, О. М.* Математичне моделювання розподілу корисних копалин методами інтерлінації та інтерфлетації функцій / О. М. Литвин, Н. І. Штепа, О. О. Литвин. – К.: Наук. думка, 2011. – 228 с.
9. *Литвин, О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
10. *Литвин, О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. / О. М. Литвин. – К.: Наук. думка, 2005. – 331 с.

Надійшла до редакції 24.02.14