мума к решению задач математического программирования на последовательности подобластей области допустимых решений.

Литература

1. *George, J. A.* Packing different-sized circles into a rectangular container / J. A. George, J. M. George, B. W. Lamar // European J. Oper. Res. – 1995. – № 84. – P. 693–712.
2. *George, J. A.* Multiple container packing: a case study of pipe packing / J. A. George // J. Oper. Res. Soc. –1996. – №. 47. – P. 1098–1109.
3. *Birgin, E. G.* Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container / E. G. Birgin, J. M. Martinez, D. P. Ronconi // European J. Oper. Res. – 2005. – Vol. 160. – P. 19–33.
4. *Стоян, Ю. Г.* Упаковка различных круговых цилиндров в параллелепипеде / Ю. Г. Стоян, Д. И. Придатко // Доп. НАН України. – 2004. – № 4. – С. 27–32.
5. *Стоян, Ю. Г.* Математическая модель и метод решения задачи размещения сфероцилиндров и цилиндров с учетом специальных ограничений / Ю. Г. Стоян, А. М. Чугай // Электрон. моделирование. – 2008. – Т. 30, № 5. – С. 3–20.
6. *Scheithauer, G.* Mathematical modeling of interactions of primary 3D geometric objects / G. Scheithauer, Y. Stoyan, T. Romanova // Cybernetics and System Analysis. – 2005. – Vol. 41 (3). – P.332– 342.
7. *Wachter, A.* On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming / A. Wachter, L. T. Biegler // Math. Program. – 2006. – № 106 (1). – P. 25–57.

Поступила в редакцию 15.08.14

О. О. Литвин,
канд. фіз.-мат. наук
Є. Л. Хурдей

Українська інженерно-педагогічна академія
м. Харків,
e-mail: hurdei@mail.ru

Ключові слова: *комп'ютерна томографія, проекція, поліноміальна інтерполяція функцій двох змінних.*

УДК 519.6

ПОЛІНОМІАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ З ВІДОМИМИ ПРОЕКЦІЯМИ НА ДОВІЛЬНІЙ СИСТЕМІ N ГРУП ПРЯМИХ, ЯКІ СКЛАДАЮТЬСЯ З M ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

Задано N груп прямих, кожна з яких складається з M паралельних прямих. Кожна пряма з однієї групи перетинається з усіма прямими з інших N – 1 груп. Вважається, що в точках перетину цих прямих задаються значення фінітної функції f(x, y) неперервної разом із своїми похідними першого порядку, носій якої квадрат [0, 1]×[0, 1]. Вважаються також відомими проекції, тобто інтеграли вздовж кожної із n×m прямих, які поступають з комп'ютерного томографа. Розв'язується така задача: побудувати оператор наближення функції f(x, y), який не тільки інтерполює функцію у вказаних вузлах, але й також має вказані проєкції. Результати даної роботи можуть бути використані при неруйнівному контролі важливих деталей в машинобудуванні.

Вступ

На сьогодні зрозуміло, що методи неруйнівного контролю, зокрема методи комп'ютерної томографії, є невід'ємною частиною дослідження важливих деталей у машинобудуванні, митному контролі тощо. При цьому важливим є використання для контролю невеликої кількості ракурсів. Тому актуальною є задача відновлення функції за допомогою проекцій на довільній системі N груп прямих, які складаються з M паралельних прямих.

В роботах [1–6] запропоновано загальний метод побудови оператора інтерлінації функції двох змінних з відомими проекціями – інтегралами вздовж заданої системи прямих. Цей метод полягає у виконанні таких двох кроків:

Крок 1. Побудова оператора інтерлінації зі слідами на заданій системі прямих.

Крок 2. Заміна слідів наближуваної функції у вказаних операторах інтерлінації операторами інтерполяції із заданими проекціями вздовж прямих, на яких ця функція від однієї змінної є слідом наближуваної фінітної функції $f(x, y)$, $\sup f \subseteq D \subset R^2$.

Практична реалізація вказаного загального алгоритму була виконана в роботі [2] лише для випадку, коли проекції знаходились вздовж системи взаємно перпендикулярних прямих. В роботі [7] вказаний метод реалізовано для випадку M перетиннних прямих, серед яких немає паралельних і результат узагальнюється на випадок, коли проекції відомі вздовж N груп перетинних прямих, кожна з яких складається з M паралельних прямих та інтерполяційні дані задаються в точках перетину прямих.

Постановка проблеми

Задано N груп перетинних прямих $\Gamma_i^k = \{(x, y) : \omega_i^k(x, y) = xA_{k1} + yA_{k2} - \gamma_i^k = 0\}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots, M$, $A_{k1}^2 + A_{k2}^2 = 1$, $\Gamma_i^k \cap D \neq \varnothing$, кожна з яких складається з M паралельних прямих. Позначимо через $P(x_{ij}^{kl}, y_{ij}^{kl}) = \Gamma_i^k \cap \Gamma_j^l$, $k, l = 1, 2, \ldots, N$, $k \neq l$, $i, j = 1, 2, \ldots, M$ – точки перетину прямих. В даній роботі розв'язується така задача: нехай $f(x, y)$ неперерерервна функція з заданими значеннями $f(x_{ij}^{kl}, y_{ij}^{kl})$, $k, l = 1, 2, \ldots, N$, $i, j = 1, 2, \ldots, M$ і відомими числами $\int\limits_{\Gamma_l^k} f(x, y)ds = a_i^k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots, M$, які будемо називати проекціями, як це прийнято в комп'ютерній томографії [8–14]. Для системи N груп M паралельних прямих побудувати оператор $Lf(x, y)$ з властивостями

1. $Lf(x_{ij}^{kl}, y_{ij}^{kl}) = f(x_{ij}^{kl}, y_{ij}^{kl})$, $k, l = 1, 2, \ldots, N$, $k \neq l$, $i, j = 1, 2, \ldots, M$.
2. $\int\limits_{\Gamma_i^k} Lf(x, y)ds = \int\limits_{\Gamma_l^k} f(x, y)ds = a_i^k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots, M$.

Побудова оператора інтерлінації функції *f*(*x*, *y*) на вказаній системі прямих

Введемо для фіксованих пар (p, q) та (r, s) систему базисних функцій $h_{rs}^{pq}(x, y)$

$$h_{rs}^{pq}(x, y) = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu\neq r}}^{M} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq s}}^{M} \frac{\omega_\mu^p(x, y)}{\omega_\mu^p(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq})} \cdot \frac{\omega_\nu^q(x, y)}{\omega_\nu^q(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq})}.$$

Теорема 1. Функції $H_{rs}^{pq}(x, y) = h_{rs}^{pq}(x, y) \prod_{\substack{\rho=1 \\ \rho\neq p \\ \rho\neq q}}^{N} \prod_{\pi=1}^{M} \frac{\omega_\pi^\rho(x, y)}{\omega_\pi^\rho(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq})}$ мають властивості

1. $H_{rs}^{pq}(x, y)|_{\Gamma_i^k} = 0, i \neq r, k \neq p; i \neq s, k \neq q$.
2. $H_{rs}^{pq}(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq}) = 1$, $p, q = 1, 2, \ldots, N$, $r, s = 1, 2, \ldots, M$.

тобто $H_{rs}^{pq}(x_{\mu\nu}^{\alpha\beta}, y_{\mu\nu}^{\alpha\beta}) = \delta_{(r,s),(\mu,\nu)}\delta_{(p,q),(\alpha,\beta)}$, де $\delta_{(r,s),(\mu,\nu)} = \delta_{r,\mu}\delta_{s,\nu}$, $\delta_{(p,q),(\alpha,\beta)} = \delta_{p,\alpha}\delta_{q,\beta}$.

Доведення. Враховуючи, що $(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq}) = \Gamma_r^p \cap \Gamma_s^q$, то

$$H_{rs}^{pq}(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq}) = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu\neq r}}^{M} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq s}}^{M} \frac{\omega_\mu^p(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq})}{\omega_\mu^p(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq})} \cdot \frac{\omega_\nu^q(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq})}{\omega_\nu^q(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq})} \prod_{\substack{\rho=1 \\ \rho\neq p \\ \rho\neq q}}^{N} \prod_{\pi=1}^{M} \frac{\omega_\pi^\rho(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq})}{\omega_\pi^\rho(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq})} = 1.$$

Розглянемо точку $(x_{\mu\nu}^{pq}, y_{\mu\nu}^{pq}) = \Gamma_\mu^p \cap \Gamma_\nu^q, \mu \neq r, \nu \neq s$. У цій точці виконуються рівності $\omega_\mu^p(x_{\mu\nu}^{pq}, y_{\mu\nu}^{pq}) = 0,\ \omega_\nu^q(x_{\mu\nu}^{pq}, y_{\mu\nu}^{pq}) = 0$, враховуючи які, можемо написати

$$H_{rs}^{pq}(x_{\mu\nu}^{pq}, y_{\mu\nu}^{pq}) = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu\neq r}}^{M} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq s}}^{M} \frac{\omega_\mu^p(x_{\mu\nu}^{pq}, y_{\mu\nu}^{pq})}{\omega_\mu^p(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq})} \cdot \frac{\omega_\nu^q(x_{\mu\nu}^{pq}, y_{\mu\nu}^{pq})}{\omega_\nu^q(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq})} \prod_{\substack{\rho=1 \\ \rho\neq p \\ \rho\neq q}}^{N} \prod_{\pi=1}^{M} \frac{\omega_\pi^\rho(x_{\mu\nu}^{pq}, y_{\mu\nu}^{pq})}{\omega_\pi^\rho(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq})} = 0.$$

Теорема 1 доведена.

Введемо до розгляду позначення

$$\varphi_i^k(y) = f\left(\frac{\gamma_i^k - A_{k2}y}{A_{k1}}, y\right) \vee \varphi_i^k(x) = f\left(x, \frac{\gamma_i^k - A_{k1}x}{A_{k2}}\right),$$

$$\Delta_{kl} = \begin{vmatrix} A_{k1} & A_{k2} \\ A_{l1} & A_{l2} \end{vmatrix} = -\Delta_{lk} \neq 0, k \neq l; k, l = 1, 2, \ldots N,$$

$$\nu_k = (A_{k1}, A_{k2}), \qquad \tau_k = (A_{k2}, -A_{k1}).$$

та оператор $\overline{O}_{rs}^{pq} f(x,y) = \left[\varphi_r^p\left(y_{rs}^{pq} - \frac{\tau_p}{\Delta_{pq}}\omega_s^q(x,y)\right) + \varphi_s^q\left(y_{rs}^{pq} - \frac{\tau_q}{\Delta_{pq}}\omega_r^p(x,y)\right) - \varphi_r^p\left(y_{rs}^{pq}\right)\right].$

Для подальшого використання доведемо таке твердження.

Теорема 2. Оператор $\overline{O}_{rs}^{pq} f(x,y)$ має такі властивості:

$\overline{O}_{rs}^{pq} f(x,y)|_{\Gamma_i^k} = f(x,y)|_{\Gamma_i^k} = \varphi_i^k(y), k = p, q; i = r, s$, $p, q = 1, 2, \ldots, N, r, s = 1, 2, \ldots, M$.

Доведення. Враховуючи, що $\varphi_r^p(y_{rs}^{pq}) = \varphi_s^q(y_{rs}^{pq})$ та $\omega_r^p(x,y)|_{\Gamma_r^p} = 0$, $\omega_s^q(x,y)|_{\Gamma_s^q} = 0$, маємо

$$\overline{O}_{rs}^{pq} f(x,y)|_{\Gamma_r^p} = \left[\varphi_r^p\left(y_{rs}^{pq} - \frac{\tau_p}{\Delta_{pq}}\omega_s^q(x,y)\right) + \varphi_s^q\left(y_{rs}^{pq} - \frac{\tau_q}{\Delta_{pq}}\omega_r^p(x,y)\right) - \varphi_r^p\left(y_{rs}^{pq}\right)\right]|_{\Gamma_r^p} =$$

$$= \varphi_r^p\left(y_{rs}^{pq} - \frac{\tau_p}{\Delta_{pq}}\omega_s^q(x,y)\right)|_{\Gamma_r^p} + \varphi_s^q\left(y_{rs}^{pq} - \frac{\tau_q}{\Delta_{pq}}\omega_r^p(x,y)\right)|_{\Gamma_r^p} - \varphi_r^p\left(y_{rs}^{pq}\right) =$$

$$= \varphi_r^p\left(y_{rs}^{pq} - \frac{\tau_p}{\Delta_{pq}}\omega_s^q(x,y)|_{\Gamma_r^p}\right) + \varphi_s^q\left(y_{rs}^{pq}\right) - \varphi_r^p\left(y_{rs}^{pq}\right) = f(x,y)|_{\Gamma_r^p},$$

$$\overline{O}_{rs}^{pq} f(x,y)|_{\Gamma_s^q} = \left[\varphi_r^p\left(y_{rs}^{pq} - \frac{\tau_p}{\Delta_{pq}}\omega_s^q(x,y)\right) + \varphi_s^q\left(y_{rs}^{pq} - \frac{\tau_q}{\Delta_{pq}}\omega_r^p(x,y)\right) - \varphi_r^p\left(y_{rs}^{pq}\right)\right]|_{\Gamma_s^q} =$$

$$= \varphi_r^p\left(y_{rs}^{pq} - \frac{\tau_p}{\Delta_{pq}}\omega_s^q(x,y)\right)|_{\Gamma_s^q} + \varphi_s^q\left(y_{rs}^{pq} - \frac{\tau_q}{\Delta_{pq}}\omega_r^p(x,y)\right)|_{\Gamma_s^q} - \varphi_r^p\left(y_{rs}^{pq}\right) =$$

$$= \varphi_r^p\left(y_{rs}^{pq}\right) + \varphi_s^q\left(y_{rs}^{pq} - \frac{\tau_q}{\Delta_{pq}}\omega_r^p(x,y)|_{\Gamma_s^q}\right) - \varphi_r^p\left(y_{rs}^{pq}\right) = f(x,y)|_{\Gamma_s^q}.$$

Теорема 2 доведена.

Таким чином, оператор $\overline{O}_{rs}^{pq} f(x,y)$ є оператором інтерлінації функції $f(x, y)$ на двох прямих Γ_r^p та Γ_s^q, що належать групам з номерами p та q відповідно.

Побудуємо оператор інтерполяції $f(x, y)$ із заданими проекціями.

Введемо до розгляду систему операторів

$$U^{pq} f(x,y) = \sum_{r=1}^{M}\sum_{s=1}^{M} H_{rs}^{pq}(x,y)\overline{O}_{rs}^{pq} f(x,y). \tag{1}$$

Теорема 3. Оператори $U^{pq} f(x,y)$ мають властивості

$$U^{pq} f(x,y)|_{\Gamma_i^k} = f(x,y)|_{\Gamma_i^k}, i = 1, 2, \ldots, M, k = p \vee k = q$$

$$U^{pq} f(x,y)|_{\Gamma_i^k} = 0, 1 \leq i \leq M, 1 \leq k \leq N; k \neq p, q.$$

Доведення. З теореми 1 маємо $H_{rs}^{pq}(x_{\mu\nu}^{\alpha\beta}, y_{\mu\nu}^{\alpha\beta}) = \delta_{(r,s),(\mu,\nu)}\delta_{(p,q),(\alpha,\beta)}$, де $\delta_{(r,s),(\mu,\nu)} = \delta_{r,\mu}\delta_{s,\nu}$, $\delta_{(p,q),(\alpha,\beta)} = \delta_{p,\alpha}\delta_{q,\beta}$, p, q, α, β= 1, 2, …, N, r, s, μ, ν = 1, 2, …, M.

З теореми 2 маємо

$$\overline{O}_{rs}^{pq} f(x,y)|_{\Gamma_i^k} = f(x,y)|_{\Gamma_i^k}, k = p,q; i = r,s$$

Отже,

$$U^{pq} f(x,y)|_{\Gamma_i^k} = \sum_{r=1}^{M}\sum_{s=1}^{M} H_{rs}^{pq}(x,y)|_{\Gamma_i^k}\ \overline{O}_{rs}^{pq} f(x,y)|_{\Gamma_i^k} = [\text{за теоремою}] =$$

$$= \sum_{r=1}^{M}\sum_{s=1}^{M} \delta_{r,\mu}\delta_{s,\nu}\delta_{p,\alpha}\delta_{q,\beta}\overline{O}_{rs}^{pq} f(x,y)|_{\Gamma_i^k} = f(x,y)|_{\Gamma_i^k}, i = r \vee i = s; k = p \vee k = q; r,s = 1,2,\ldots,M; p,q = 1,2,\ldots,N$$

$$U^{pq} f(x,y)|_{\Gamma_i^k} = \sum_{r=1}^{M}\sum_{s=1}^{M} H_{rs}^{pq}(x,y)|_{\Gamma_i^k}\ \overline{O}_{rs}^{pq} f(x,y)|_{\Gamma_i^k} = [\text{за ттеоремою}] =$$

$$= \sum_{r=1}^{M}\sum_{s=1}^{M} \delta_{r,\mu}\delta_{s,\nu}\delta_{p,\alpha}\delta_{q,\beta}\overline{O}_{rs}^{pq} f(x,y)|_{\Gamma_i^k} = 0, 1 \le i \le M, 1 \le k \le N, i \ne r,s; k \ne p,q.$$

Отже, $U^{pq} f(x,y)|_{\Gamma_i^k} = (\delta_{p,k} + \delta_{q,k}) f(x,y)|_{\Gamma_i^k}$, i = 1, 2, …, M, k = 1, 2, …, N.

Теорема 3 доведена.

Теорема 4. Оператор

$$Uf(x,y) = \sum_{p=1}^{N}\sum_{\substack{q=1\\ q\ne p}}^{N} U^{pq} f(x,y) \tag{2}$$

є оператором інтерлінації функції $f(x, y)$ на вказаній системі N груп прямих, кожна з яких складається з M прямих $Uf(x,y)|_{\Gamma_i^k} = f(x,y)|_{\Gamma_i^k}$, i = 1, 2, …, M, k = 1, 2, …, N.

Доведення. Використовуючи теорему 3, маємо

$$Uf(x,y)|_{\Gamma_i^k} = \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} U^{pq} f(x,y)|_{\Gamma_i^k} = \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} (\delta_{p,k} + \delta_{q,k}) f(x,y)|_{\Gamma_i^k} = f(x,y)|_{\Gamma_i^k},\ i = 1, 2, \ldots, M,\ k = 1, 2, \ldots, N.$$

Теорема 4 доведена.

Наслідок. Отримані результати можемо використовувати для побудови операторів інтерполяції на системі точок, що є перетинами M не паралельних прямих із заданими проекціями вздовж цих прямих, отримані в роботі [7].

Побудова операторів інтерполяції із заданими проекціями

Теорема 5. Оператори

$$L_{ki}\varphi(y) = a_i^k + \sum_{j=1}^{M}\left(\varphi_i^k(y_{ij}^{pq}) - a_i^k\right)\left[L_{ij}^{pqrs}(y) - \int_{\Gamma_i^k} L_{ij}^{pqrs}(y)ds\,\frac{wr_i^{pqrs}(y)}{\int_{\Gamma_i^k} wr_i^{pqrs}(y)ds}\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M}\left(\varphi_i^k(y_{ij}^{rs}) - a_i^k\right)\left[L_{ij}^{rspq}(y) - \int_{\Gamma_i^k} L_{ij}^{rspq}(y)ds\,\frac{wr_i^{pqrs}(y)}{\int_{\Gamma_i^k} wr_i^{pqrs}(y)ds}\right]$$

де $\varphi_i^k(y) = f\left(\frac{\gamma_i^k - A_{k2}y}{A_{k1}}, y\right) \vee \varphi_i^k(x) = f\left(x, \frac{\gamma_i^k - A_{k1}x}{A_{k2}}\right)$, $L_{kl}^{pqrs}(y) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{M} \frac{y - y_{ki}^{pq}}{y_{kl}^{pq} - y_{ki}^{pq}} \prod_{j=1}^{M} \frac{y - y_{kj}^{rs}}{y_{kl}^{pq} - y_{kj}^{rs}}$,

$$wr_k^{pqrs}(y) = \prod_{i=1}^{M}(y - y_{ki}^{pq})^2 \prod_{j=1}^{M}(y - y_{kj}^{rs})^2 .$$

мають властивості

1. $L_{ki}\varphi(y_{kl}^{pq}) = f(x_{kl}^{pq}, y_{kl}^{pq})$
2. $\int\limits_{\Gamma_i^k} L_{ki}\varphi(y)ds = \int\limits_{\Gamma_i^k} f(x,y)ds.$

Доведення. Доведемо властивість 1.

$$L_{ki}\varphi(y_{kl}^{pq}) = \int\limits_{\Gamma_i^k} f(x_{kl}^{pq}, y_{kl}^{pq})ds + \sum_{j=1}^{M}\left(\varphi(y_{ij}^{pq}) - \int\limits_{\Gamma_i^k} f(x_{kl}^{pq}, y_{kl}^{pq})ds\right)\left[L_{ij}^{pqrs}(y_{kl}^{pq}) - \int\limits_{\Gamma_i^k} L_{ij}^{pqrs}(y_{kl}^{pq})ds \frac{wr_i^{pqrs}(y_{kl}^{pq})}{\int\limits_{\Gamma_i^k} wr_i^{pqrs}(y_{kl}^{pq})ds}\right] +$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\left(\varphi(y_{ij}^{rs}) - \int\limits_{\Gamma_i^k} f(x_{kl}^{pq}, y_{kl}^{pq})ds\right)\left[L_{ij}^{rspq}(y_{kl}^{pq}) - \int\limits_{\Gamma_i^k} L_{ij}^{rspq}(y_{kl}^{pq})ds \frac{wr_i^{pqrs}(y_{kl}^{pq})}{\int\limits_{\Gamma_i^k} wr_i^{pqrs}(y_{kl}^{pq})ds}\right] = \int\limits_{\Gamma_i^k} f(x_{kl}^{pq}, y_{kl}^{pq})ds = f(x_{kl}^{pq}, y_{kl}^{pq}).$$

Доведемо властивість 2.

$$\int\limits_{\Gamma_i^k} L_{ki}\varphi(y)ds = \int\limits_{\Gamma_i^k}\left(a_i^k + \sum_{j=1}^{M}\left(\varphi(y_{ij}^{pq}) - a_i^k\right)\left[L_{ij}^{pqrs}(y) - \int\limits_{\Gamma_i^k} L_{ij}^{pqrs}(y)ds \frac{wr_i^{pqrs}(y)}{\int\limits_{\Gamma_i^k} wr_i^{pqrs}(y)ds}\right]\right)ds +$$

$$+\int\limits_{\Gamma_i^k}\left(\sum_{j=1}^{M}\left(\varphi(y_{ij}^{rs}) - a_i^k\right)\left[L_{ij}^{rspq}(y) - \int\limits_{\Gamma_i^k} L_{ij}^{rspq}(y)ds \frac{wr_i^{pqrs}(y)}{\int\limits_{\Gamma_i^k} wr_i^{pqrs}(y)ds}\right]\right)ds =$$

$$= \left(\int\limits_{\Gamma_i^k} f(x,y)ds + \sum_{j=1}^{M}\left(\varphi(y_{ij}^{pq}) - \int\limits_{\Gamma_i^k} f(x,y)ds\right)\left[\int\limits_{\Gamma_i^k} L_{ij}^{pqrs}(y)ds - \int\limits_{\Gamma_i^k} L_{ij}^{pqrs}(y)ds \frac{\int\limits_{\Gamma_i^k} wr_i^{pqrs}(y)ds}{\int\limits_{\Gamma_i^k} wr_i^{pqrs}(y)ds}\right]\right) +$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{M}\left(\varphi(y_{ij}^{rs}) - \int\limits_{\Gamma_i^k} f(x,y)ds\right)\left[\int\limits_{\Gamma_i^k} L_{ij}^{rspq}(y)ds - \int\limits_{\Gamma_i^k} L_{ij}^{rspq}(y)ds \frac{\int\limits_{\Gamma_i^k} wr_i^{pqrs}(y)ds}{\int\limits_{\Gamma_i^k} wr_i^{pqrs}(y)ds}\right]\right) = \int\limits_{\Gamma_i^k} f(x,y)ds.$$

Теорему 5 доведено.

ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2014, Т. 17, № 3

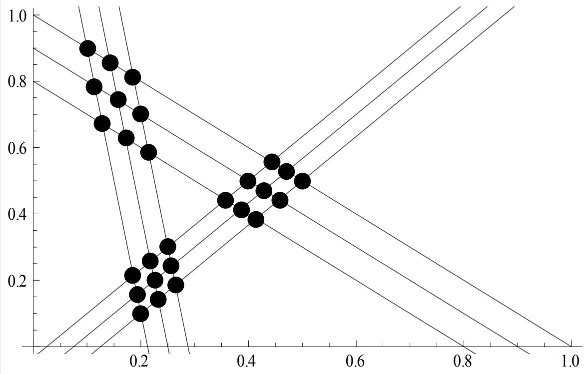
Приклад

Нехай задана система з трьох груп паралельних прямих (рисунок)

$\Gamma_i^k = \{(x, y) : \omega_i^k(x, y) = xA_{k1} + yA_{k2} - \gamma_i^k = 0\}$,

$k = 1, 2, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots, M$, де

$$\gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{0{,}9}{\sqrt{2}} & \frac{0{,}8}{\sqrt{2}} \\ \frac{1.7}{\sqrt{65}} & \frac{2}{\sqrt{65}} & \frac{2.3}{\sqrt{65}} \\ \frac{-0{,}1}{5} & \frac{-0{,}3}{5} & \frac{-0{,}5}{5} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{8}{\sqrt{65}} & \frac{1}{\sqrt{65}} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$



Графіки трьох систем прямих з прикладу

які перетинаються в точках $(x_{rs}^{pq}, y_{rs}^{pq}) = \Gamma_r^p \cap \Gamma_s^q$,

$$X^{12} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & \frac{1}{7} & \frac{13}{70} \\ \frac{4}{35} & \frac{11}{70} & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{70} & \frac{6}{35} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}, \quad Y^{12} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & \frac{6}{7} & \frac{57}{70} \\ \frac{11}{14} & \frac{26}{35} & \frac{7}{10} \\ \frac{47}{70} & \frac{22}{35} & \frac{41}{70} \end{pmatrix}$$

$$X^{13} = \begin{pmatrix} \frac{31}{70} & \frac{33}{70} & 0{,}5 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{7} & \frac{16}{35} \\ \frac{5}{14} & \frac{27}{70} & \frac{29}{70} \end{pmatrix}, \quad Y^{13} = \begin{pmatrix} \frac{39}{70} & \frac{37}{70} & 0{,}5 \\ \frac{1}{2} & \frac{33}{70} & \frac{31}{70} \\ \frac{31}{70} & \frac{29}{70} & \frac{27}{70} \end{pmatrix}$$

$$X^{23} = \begin{pmatrix} \frac{13}{70} & \frac{27}{140} & 0{,}2 \\ \frac{61}{280} & \frac{9}{40} & \frac{13}{56} \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{35} & \frac{37}{140} \end{pmatrix}, \quad Y^{23} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{11}{70} & 0{,}1 \\ \frac{9}{35} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{10} & \frac{17}{70} & \frac{13}{70} \end{pmatrix}.$$

Використаємо формулу (2) інтерлінації для побудови оператора, який в точках $(x_{ij}^{kl}, y_{ij}^{kl})$ перетину цих прямих $\Gamma_i^k = \{(x, y) : \omega_i^k(x, y) = xA_{k1} + yA_{k2} - \gamma_i^k = 0\}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots, M$ набуває значень, що збігаються зі значеннями наближуваної функції і має інтеграли вздовж цих прямих, які збігаються з проекціями вздовж цих прямих від наближуваної функції $f(x, y)$.

Використаємо теореми 3 та 5 для побудови

$$U^{pq} f(x, y) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} H_{kj}^{pq}(x, y) \times \left(L_{pk} \varphi\left(x_{kj}^{pq} - \frac{\tau_{p1}}{\Delta_{pq}} \omega_j^q(x, y), y_{kj}^{pq} - \frac{\tau_{p2}}{\Delta_{pq}} \omega_j^q(x, y) \right) + \right.$$

$$\left. + L_{qj} \varphi\left(x_{kj}^{pq} - \frac{\tau_{q1}}{\Delta_{qp}} \omega_k^p(x, y), y_{kj}^{pq} - \frac{\tau_{q2}}{\Delta_{qp}} \omega_k^p(x, y) \right) - L_{pk} \varphi\left(x_{kj}^{pq}, y_{kj}^{pq} \right) \right).$$

За теоремою 4 маємо

$$Uf(x, y) = U^{12} f(x, y) + U^{13} f(x, y) + U^{23} f(x, y).$$

Ця формула має шукані властивості

$$Uf\left(x_{kl}^{pq}, y_{kl}^{pq}\right) = f\left(x_{kl}^{pq}, y_{kl}^{pq}\right), p, q = 1,2,\ldots, N; p \neq q,$$

$$\int_{\Gamma_i^k} Uf(x, y)ds = \int_{\Gamma_i^k} f(x, y)ds, k = p \vee k = q; i = 1,2,\ldots M.$$

Висновок

Таким чином, в даній роботі розроблено і досліджено метод побудови операторів, які інтерполюють неперервну функцію $f(x, y)$ в точках перетину N груп перетинних прямих, кожна з яких складається з M паралельних прямих, і мають задані проекції (інтеграли від наближуваної функції $f(x, y)$ вздовж кожної прямої Γ_i^k, $k = 1, 2, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots, M$).

Оскільки в комп'ютерній томографії інтерполяційні дані невідомі, то в подальшому оператори, побудовані в цій статті, планується використати для побудови операторів наближеного відновлення функцій $f(x, y)$ лише за відомими їх проекціями. Для цього невідомі інтерполяційні дані будемо знаходити з умови мінімуму деякого функціонала [6].

Література

1. *Литвин, О. М.* Оператори інтерполювання із заданими значеннями інтеграла / О. М. Литвин, О. О. Литвин // Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях. Тези доп. Всеукраїн. наук. конф., Львів, 5–7 жовтня 1995 р. – Львів, 1995. – С. 113.
2. *Литвин, О. М.* Про один підхід до розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії / О. М. Литвин, О. О. Литвин // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр. Ин-та математики НАН Украины, Киев, 1996. – С. 170-–173.
3. *Литвин, О. М.* Метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії / О. М. Литвин, О. О. Литвин // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 29–33.
4. *Литвин, О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування/ О. М. Литвин. – Х., Основа, 2002. – 544 с.
5. *Литвин, О. О.* Математичне моделювання в малоракурсній комп'ютерній томографії на основі інтерлінації та мішаної апроксимації функцій: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – К: 2009. – 20 с.
6. *Литвин, О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи / О. М. Литвин. – К., Наук. думка, 2005. – 332 с.
7. *Литвин, О. О.* Методи побудови операторів із заданими проекціями вздовж перетинних прямих, які інтерполюють $f(x, y)$ в точках перетину цих прямих / О. О. Литвин Є. Л. Хурдей // Пробл. машиностроения. – 2013. – Т. 16, № 3. – С. 60–67.
8. *Попов, Д. А.* Восстановление характеристических функций в двумерной радоновской томографии / Д. А. Попов // Усп. мат. наук. – 1998. – Т.53, вып. 1 (319). – С. 115–198.
9. *Наттерер, Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. / Ф. Наттерер. – М.: Мир, 1990. – 279 с.
10. *Хермен, Г.* Востановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографи / Г. Хермен. – М.: Мир, 1983. – 352 с.
11. *Терещенко, С. А.* Методы вычислительной томографи / С. А. Терещенко. – М.: Физматгиз, 2004. – 320 с.
12. *Федоров, Г. А.* Вычислительная эмиссионная томография / Г. А. Федоров, С. А. Терещенко. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 184 с.
13. *Тихонов, А. Н.* Математические задачи компьютерной томографи / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, А. А. Тимонов. – М.: Наука, 1987. – 160 с.

Поступила в редакцию 21.08.14