

**А. А. Клименко**  
**Ю. В. Михлин,**  
 д-р физ.-мат. наук

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»  
 e-mail: muv@kpi.kharkov.ua

**Ключові слова:** маятникові системи, нелінійні нормальні форми коливань.

УДК 534, 517.928

## НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ МАЯТНИКОВЫЙ ГАСИТЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ

*Для аналізу системи з маятниковим гасником коливань використовується метод нелінійних нормальних форм коливань. У системі можна виділити пов'язану (нелокальну) і локалізовану форми коливань. У другому випадку більша частина енергії коливань зосереджена в маятниковому гаснику, тому локалізована форма коливань сприятлива для гасіння коливань пружної підсистеми. Проведено побудову нормальних форм коливань, досліджено їх стійкість.*

### 1. Введение

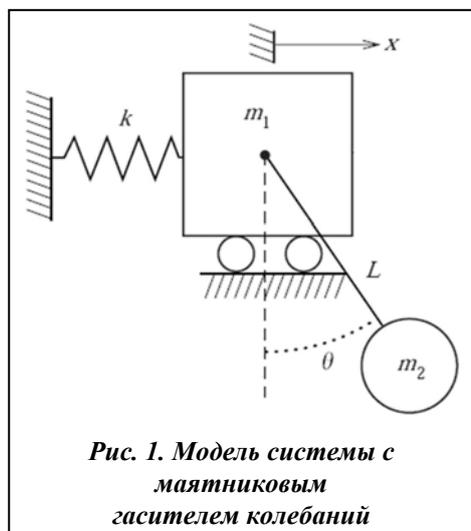
Маятниковые системы, изучение которых продолжается и в настоящее время, представляют значительный интерес как для нелинейной динамики [1–3], так и для разнообразных технических приложений, в частности, они используются в задачах виброгашения [4–6], а также при описании физических процессов [7, 8]. Несмотря на то, что движения маятниковых систем детально изучались как в прошлом [9], так и в последнее время [10, 11], аналитические результаты получены только лишь для колебаний с относительно небольшими амплитудами. В настоящей работе рассмотрена динамика системы с маятниковым гасителем колебаний. Современные методы теории возмущений в сочетании с вычислительными процедурами использованы для построения и анализа устойчивости нелинейных нормальных форм колебаний [12–14] как для малых, так и для больших амплитуд колебаний.

### 2. Построение нелинейных нормальных форм колебаний

Рассматриваются свободные колебаний системы с двумя степенями свободы, модель которой дана на рис. 1.

В этой модели механическая система, колебания которой необходимо загасить, представляет собой точечную массу  $m_1$  на линейной пружине с жесткостью  $k$ . К линейному осциллятору присоединен маятниковый гаситель колебаний с массой  $m_2$  и длиной  $l$ . Колебания системы описываются двумя обобщенными координатами  $x$  (смещение массы  $m_1$ ) и  $\theta$  (угол отклонения маятника с массой  $m_2$ ). Уравнения движения системы имеют следующий вид:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta + kx = 0; \\ \ddot{x} \cos \theta + l \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0. \end{cases}$$



**Рис. 1. Модель системы с маятниковым гасителем колебаний**

Функции  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$  раскладываются в степенной ряд, причем отбрасываются слагаемые, содержащие  $\theta$  в степени выше третьей, что вполне приемлемо для углов, меньших  $0,7-0,8$  рад. Сделаем предположение о малости массы маятника по отношению к массе основной линейной подсистемы, вводя преобразование  $m_2 \rightarrow \varepsilon m_2$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр. Это предположение вводится из соображений инженерной практики. Теперь уравнения движения принимают следующий вид:

$$\begin{cases} (m_1 + \varepsilon m_2)\ddot{x} + \varepsilon m_2 l \ddot{\theta} (1 - \theta^2/2) - \varepsilon m_2 l \dot{\theta}^2 (\theta - \theta^3/6) + kx = 0; \\ \ddot{x} (1 - \theta^2/2) + l \ddot{\theta} + g (\theta - \theta^3/6) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

В системе (1) можно выделить две формы колебаний: а) форма связанных колебаний,  $x = x(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$ , когда амплитуды движений по двум обобщенным координатам сравнимы; б) локализованная форма колебаний (имеются незначительные сме-

щения массы  $m_1$  наряду с большими колебаниями гасителя  $m_2$ ).

**2.1. Построение траектории формы связанных колебаний**

Используется построение форм колебаний в виде траекторий в конфигурационном пространстве [12–14]. Этот метод позволяет получать решения без ограничений на амплитуды колебаний. Траектория связанной формы колебаний разыскивается в виде однозначной функции  $\theta = \theta(x)$ . В таком случае используются соотношения  $\dot{\theta} = \theta' \dot{x}$ ;  $\ddot{\theta} = \theta'' \dot{x}^2 + \theta' \ddot{x}$ , где штрихом обозначено дифференцирование по новой независимой переменной  $x$ . Кинетическую энергию запишем в таком виде:

$$K = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \varepsilon \dot{x}^2 \left( 1 + 2l\theta' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + l^2 \theta'^2 \right) = \dot{x}^2 (K_0 + \varepsilon K_1) = \dot{x}^2 \tilde{K}, \tag{2}$$

где  $\tilde{K} = K_0 + \varepsilon K_1$ ,  $K_0 = \frac{1}{2} m_1$ ,  $K_1 = \frac{1}{2} m_2 \left( 1 + 2l\theta' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + l^2 \theta'^2 \right)$ .

Потенциальная энергия запишется следующим образом:

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} \varepsilon m_2 g l \theta^2 = V_0 + \varepsilon V_1,$$

где  $V_0 = \frac{1}{2} kx^2$ ,  $V_1 = \frac{1}{2} m_2 g l \theta^2$ .

Из интеграла энергии и уравнения (2) можно получить выражение для  $\dot{x}^2$

$$\dot{x}^2 = \frac{K}{K_0 + \varepsilon K_1} = \frac{h - (V_0 + \varepsilon V_1)}{K_0 + \varepsilon K_1}. \tag{3}$$

Из первого уравнения системы (1) с учетом (3) имеем выражение для  $\ddot{x}$

$$\ddot{x} = - \frac{kx}{m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon m_2 l \theta' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right)} + \frac{\varepsilon m_2 l \left( \theta'^2 \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) - \theta'' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right)}{m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon m_2 l \theta' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right)} \cdot \frac{h - V}{\tilde{K}}. \tag{4}$$

После подстановки выражений (3) и (4) во второе уравнение системы (1) получаем уравнение для определения траектории формы связанных колебаний  $\theta = \theta(x)$  в конфигурационном пространстве

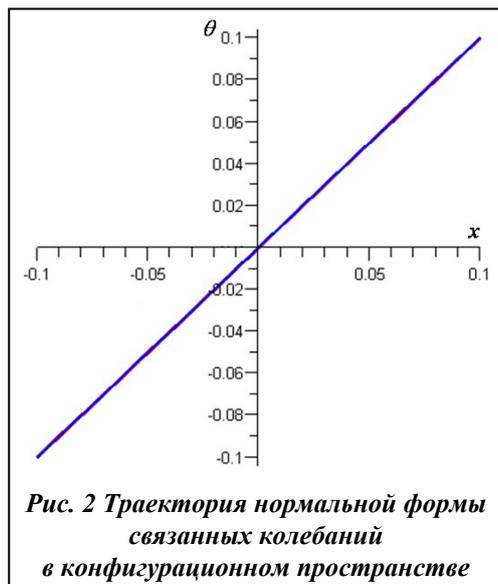
$$\begin{aligned} & (h - V) \varepsilon m_2 l \left( \theta'^2 \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) - \theta'' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) \left( l\theta' + 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + \\ & + (h - V) l \theta'' \left( m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon m_2 l \theta' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) + \\ & + \tilde{K} \left( -kx \left( l\theta' + 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + g \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) \left( m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon m_2 l \theta' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) \right) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет особую точку на максимальной изоэнергетической поверхности  $h - V = 0$ , где все скорости обращаются в нуль. Аналитическое продолжение траектории на эту поверхность возможно, если реализуются следующие граничные условия [12–14]:

$$\tilde{K} \left( -kx \left( l\theta' + 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + g \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) \left( m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon m_2 l \theta' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) \right) = 0. \tag{6}$$

Это условие должно выполняться при амплитудных значениях  $x = x_0$ , при этом  $\dot{x} = 0$ .

Решение уравнения (5) разыскивается в виде ряда по степеням малого параметра  $\theta = \theta(x) = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \dots$ , где  $\theta_0$  и  $\theta_1$ , в свою очередь, представляются рядами по степеням  $x$ :



**Рис. 2** Траектория нормальной формы связанных колебаний в конфигурационном пространстве

$\theta_0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ ;  $\theta_1 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$ .  
 Данная методика решения разработана в [12–14].

Подставляя эти ряды в уравнения (5) и (6) и выделяя вначале слагаемые порядка  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^1$ , а затем группируя слагаемые, стоящие при  $x^0$  и  $x^1$ , получаем уравнения для определения коэффициентов рядов. В нулевом приближении по малому параметру

$$\varepsilon^0 : x^0 : 2hla_2 + \frac{1}{2}m_1g\left(a_0 - \frac{1}{6}a_0^3\right) = 0; \quad (7)$$

$$x : 6hla_3 + \frac{1}{2}\left(m_1ga_1\left(1 - \frac{a_0^2}{2}\right) - k\left(la_1 + 1 - \frac{a_0^2}{2}\right)\right) = 0. \quad (8)$$

и т. д.

Граничные условия, отвечающие нулевому приближению по малому параметру, имеют следующий вид (при амплитудных значениях  $x = x_0$ ):

$$\frac{1}{2}m_1^2g\left(x(a_1 + a_2x)\left(1 - \frac{1}{2}a_0^2\right) - \frac{1}{6}a_0^3 + a_0 - \frac{1}{2}a_0a_1^2x^2\right) + \frac{1}{2}m_1kx\left(\frac{1}{2}a_0^2 + a_0a_1x - 1 - la_1 - 2xla_2\right) = 0. \quad (9)$$

Полная энергия системы также раскладывается по малому параметру  $h = h_0 + \varepsilon h_1$ . Полная энергия решения нулевого приближения по малому параметру (при  $\varepsilon = 0$ ) имеет вид  $h_0 = V_0 = \frac{1}{2}kx_0^2$ .

Вычисления в равенстве (9) проводятся при амплитудных значениях  $x = x_0$ , при этом  $\dot{x} = 0$ . Задавая значения параметров системы  $m_1, l, k$ , а также амплитуду колебаний (или энергию системы) и разрешая систему уравнений (7)–(9), находим коэффициенты ряда  $\theta_0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ . Аналогичным образом определяем решение первого приближения  $\theta_1$  в виде ряда по степеням  $x$ , разрешая уравнения, полученные из равенств (5) и (6) путем группировки членов порядка  $\varepsilon$ .

Траектория нормальной формы связанных колебаний в двух приближениях по малому параметру представлена на рис. 2. Аналитическое решение, полученное при тех же параметрах и начальных условиях, что и ранее, и проверочный числовой расчет почти полностью совпадают. Траектория этой формы колебаний близка к прямой линии, что используется далее при исследовании устойчивости.

### 2.2. Траектория локализованной формы колебаний

Траекторию второй, локализованной формы колебаний, определим в виде функции  $x = x(\theta)$ . В этом случае нужно использовать следующие соотношения:  $\dot{x} = x'\dot{\theta}$ ;  $\ddot{x} = x''\dot{\theta}^2 + x'\ddot{\theta}$ , где штрихом обозначено дифференцирование по  $\theta$ . Тогда кинетическая и потенциальная энергии могут быть записаны в виде

$$K = \frac{1}{2}\varepsilon m_2 l^2 \dot{\theta}^2 + \varepsilon^2 \dot{\theta}^2 \left( \frac{1}{2} m_1 x'^2 + m_2 l x' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) = \dot{\theta}^2 (\varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2) = \dot{\theta}^2 \tilde{K},$$

где  $\tilde{K} = \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2$ ,  $K_1 = \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2$ ,  $K_2 = \dot{\theta}^2 \left( \frac{1}{2} m_1 x'^2 + m_2 l x' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right)$ .

$$V = \frac{1}{2} \varepsilon m_2 g l \theta^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 k x^2 = \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2,$$

где  $V_1 = \frac{1}{2} m_2 g l \theta^2$ ,  $V_2 = \frac{1}{2} k x^2$ .

Как и в случае первой формы колебаний, из интеграла энергии получаем выражение для  $\dot{\theta}^2$ , после чего из второго уравнения системы (1) получаем выражение для  $\ddot{\theta}$ . Теперь уравнение для определения траектории второй нелинейной нормальной формы колебаний  $x = x(\theta)$  в конфигурационном пространстве имеет вид

$$\begin{aligned} & (h - V)(m_1 + \varepsilon m_2) \left( x'' \left( x' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + l \right) + x' x'' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) + \\ & + (h - V) \varepsilon m_2 l \left( x'' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right)^2 - \left( x' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + l \right) \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) \right) + \\ & + \tilde{K} \left( kx \left( x' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + l \right) + \right. \\ & \left. + g \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) \left( x' (m_1 + \varepsilon m_2) + \varepsilon m_2 l \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

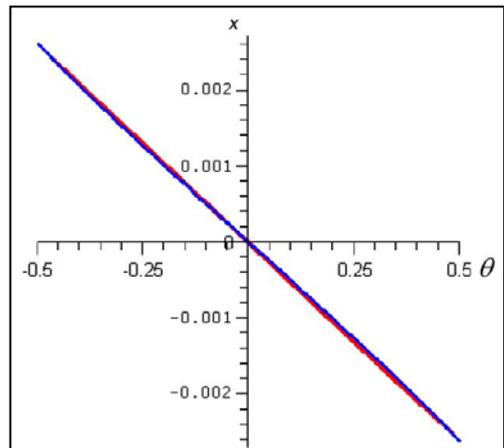


Рис. 3. Траектория локализованной нормальной формы колебаний в конфигурационном пространстве

Граничные условия, гарантирующие аналитическое продолжение траектории на максимальную изоэнергетическую поверхность, записываются таким образом:

$$\tilde{K} \left( kx \left( x' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + l \right) + g \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) \left( x' (m_1 + \varepsilon m_2) + \varepsilon m_2 l \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) \right) = 0.$$

Условия выполняются при амплитудных значениях  $\theta = \theta_0$ , при этом  $\dot{\theta} = 0$ .

Решение уравнения (10) разыскивается в виде ряда по степеням малого параметра  $x = x(\theta) = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$ , где  $x_1$  и  $x_2$ , в свою очередь, раскладываются в ряды по степеням  $\theta$

$$x_1 = a_0 + a_1 \theta + a_2 \theta^2 + a_3 \theta^3 + \dots; \quad (11)$$

$$x_2 = b_0 + b_1 \theta + b_2 \theta^2 + b_3 \theta^3 + \dots. \quad (12)$$

Аналогично методике для построения первой формы колебаний, описанной выше, определяем коэффициенты рядов (11) и (12). На рис. 3 представлена близкая к прямолинейной траектория второй, локализованной нормальной формы колебаний, в конфигурационном пространстве системы.

### 3. Анализ устойчивости форм колебаний

#### 3.1. Устойчивость связанной формы колебаний

Анализ устойчивости форм колебаний вначале проводится в упрощенной форме, с использованием приведения уравнения в вариациях к виду уравнения Матье.

Поскольку траектория первой, нормальной формы связанных колебаний, близка к прямой, то, повернув систему координат, устойчивость этой формы будем определять вариациями в ортогональном к данной траектории направлении. Поворот координатных осей представлен на рис. 4.

Используя поворот системы координат  $0x\theta$  на угол  $\alpha$ , получаем вместо уравнений (1) систему уравнений в новых координатах  $\tilde{x}, \tilde{\theta}$

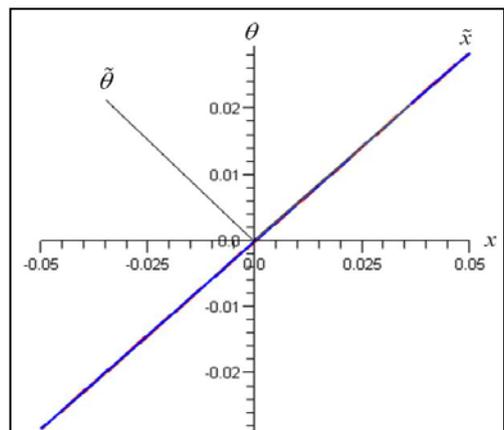


Рис. 4. Преобразование системы координат

$$\left\{ \begin{aligned} & (m_1 + \varepsilon m_2) \left( \ddot{\tilde{x}} \cos \alpha - \ddot{\tilde{\theta}} \sin \alpha \right) + k \left( \tilde{x} \cos \alpha - \tilde{\theta} \sin \alpha \right) - \\ & - \varepsilon m_2 l \left( \dot{\tilde{x}} \sin \alpha + \dot{\tilde{\theta}} \cos \alpha \right)^2 \left( \left( \tilde{x} \sin \alpha + \tilde{\theta} \cos \alpha \right) - \frac{1}{6} \left( \tilde{x} \sin \alpha + \tilde{\theta} \cos \alpha \right)^3 \right) + \\ & + \varepsilon m_2 l \left( \ddot{\tilde{x}} \sin \alpha + \ddot{\tilde{\theta}} \cos \alpha \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \tilde{x} \sin \alpha + \tilde{\theta} \cos \alpha \right)^2 \right) = 0; \\ & \left( \ddot{\tilde{x}} \cos \alpha - \ddot{\tilde{\theta}} \sin \alpha \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \tilde{x} \sin \alpha + \tilde{\theta} \cos \alpha \right)^2 \right) + l \left( \ddot{\tilde{x}} \sin \alpha + \ddot{\tilde{\theta}} \cos \alpha \right) + \\ & + g \left( \tilde{x} \sin \alpha + \tilde{\theta} \cos \alpha \right) - \frac{1}{6} \left( \tilde{x} \sin \alpha + \tilde{\theta} \cos \alpha \right)^3 = 0. \end{aligned} \right.$$

Линеаризованное уравнение в вариациях, определяющее устойчивость первой формы колебаний, имеет следующий вид:

$$\left( 1 - \frac{1}{2} x^2 \sin^2 \alpha \right) (-\ddot{v} \sin \alpha + v g \cos \alpha) + \cos \alpha (\dot{v} l - v x \ddot{x} \sin \alpha \cos \alpha) = 0, \quad (13)$$

где  $x$  и  $v$  – вариации переменных  $\tilde{x}$  и  $\tilde{\theta}$  соответственно.

С учетом равенства  $k_1 = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $k_1$  – угловой коэффициент прямолинейной аппроксимации формы колебаний, и гармонической аппроксимации решения вида  $x = A \cos \omega t$ , уравнение (13), после некоторых алгебраических преобразований, примет вид известного уравнения Матье

$$\ddot{v} + v(a - 2b \cos 2\omega t) = 0,$$

$$\text{где: } a = \frac{A^2 k_1 \left( \omega^2 + \frac{1}{2} k_1 g \right) \left( 3A^2 k_1^3 - 8(l - k_1)(1 + k_1^2) \right) + 4g(1 + k_1^2) \left( 4(l - k_1)(1 + k_1^2) - A^2 k_1^3 \right)}{16(l - k_1)^2 (1 + k_1^2)^2};$$

$$b = \frac{4gA^2 k_1^3 (1 + k_1^2) - A^2 k_1 \left( \omega^2 + \frac{1}{2} k_1 g \right) \left( 3A^2 k_1^3 - 4(l - k_1)(1 + k_1^2) \right)}{16(1 + k_1^2)^2 (l - k_1)^2}.$$

Границы областей устойчивости и неустойчивости уравнения Матье хорошо известны.

Другой, более точный, метод исследования устойчивости первой формы колебаний предполагает использование уравнения Хилла. Для этого запишем уравнение в вариациях в виде

$$\ddot{v} \left( l - k_1 + \frac{1}{4} A^2 \frac{k_1^3}{1 + k_1^2} (1 + \cos 2\omega t) \right) + v \left( g + \frac{1}{2} A^2 \frac{k_1}{1 + k_1^2} \left( \omega^2 - \frac{1}{2} g k_1 \right) (1 + \cos 2\omega t) \right) = 0.$$

Решения, соответствующие границам устойчивости, имеют период  $T$  и  $2T$ , где  $T$  – период коэффициентов уравнения в вариациях. Эти решения разыскиваются в виде

$$v = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + a_4 \cos 4\omega t + a_5 \cos 5\omega t + \dots; \quad (14)$$

$$v = a_1 \cos \frac{\omega}{2} t + a_2 \cos \omega t + a_3 \cos \frac{3\omega}{2} t + a_4 \cos 2\omega t + a_5 \cos \frac{5\omega}{2} t + \dots \quad (15)$$

Подставляя разложения (14) и (15) поочередно в уравнение в вариациях и группируя члены при различных гармониках, получаем системы однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений. Приравнивая определители этих систем нулю, получим уравнения для определения тех значений параметров системы, которые определяют границы областей устойчивости и неустойчивости связанной формы колебаний. На рис. 5 представлены границы областей устойчивости и неустойчивости, полученные с использованием уравнений Матье и Хилла. Можно заметить, что уравнение в вариациях в форме уравнение Матье пригодно только для довольно малых амплитуд колебаний.

Во внутренней области наблюдаются неустойчивые движения. Потеря устойчивости первой формы влечет за собой переход к другим формам колебаний. При ветвлении появляется пара новых форм колебаний, которые также являются нелокальными. Траектории их изображены на рис. 6. Расчет проводился при следующих параметрах системы:  $l = 1, m_1 = 1, m_2 = 0,1, k = 5, \varepsilon = 0,1, x(0) = 0,5$ .

**3.2. Устойчивость локализованной формы колебаний**

Устойчивость второй формы колебаний исследовалась с использованием уравнения Хилла. Для этого использовалось следующее уравнение в вариациях:

$$\ddot{u} \left( m_1 + \varepsilon m_2 \left( 1 - l k_1 \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \frac{1}{1 + k_1^2} \right) \right) \right) + i \varepsilon m_2 l \theta \dot{\theta} \frac{k_1}{1 + k_1^2} \left( 2 - \frac{\theta^2}{3} \frac{1}{1 + k_1^2} \right) + u \left( k + \varepsilon m_2 l \frac{k_1}{1 + k_1^2} \left( \theta \ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \frac{1}{1 + k_1^2} \right) \right) \right) = 0,$$

где  $u$  и  $\theta$  – вариации переменных  $\tilde{x}$  и  $\tilde{\theta}$  соответственно.

Решения, соответствующие границам устойчивости, разыскиваются в виде

$$v = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + a_4 \cos 4\omega t + a_5 \cos 5\omega t + \dots ;$$

$$v = a_1 \cos \frac{\omega}{2} t + a_2 \cos \omega t + a_3 \cos \frac{3\omega}{2} t + a_4 \cos 2\omega t + a_5 \cos \frac{5\omega}{2} t + \dots$$

Подставляя эти разложения поочередно в уравнение в вариациях и группируя члены при различных гармониках, получаем системы однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений. Приравнявая определители этих систем нулю, получим уравнения относительно параметров системы, которые формируют границы областей устойчивости и неустойчивости связанной формы колебаний. Границы областей устойчивости и неустойчивости второй формы колебаний представлены на рис. 7. Заметим, что область неустойчивости этой формы колебаний, благоприятной для виброгашения основной линейной подсистемы, чрезвычайно узкая, что свидетельствует об эффективности маятникового гасителя колебаний.

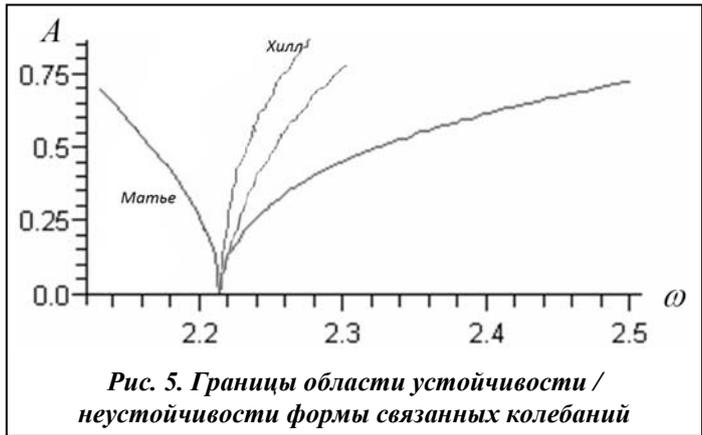


Рис. 5. Границы области устойчивости / неустойчивости формы связанных колебаний

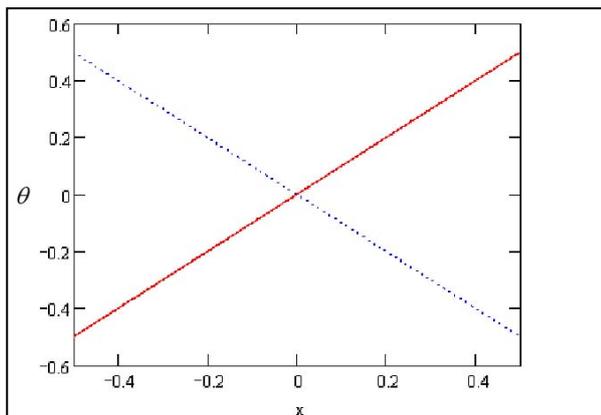


Рис. 6. Траектории ответвляющихся движений в области неустойчивости формы связанных колебаний

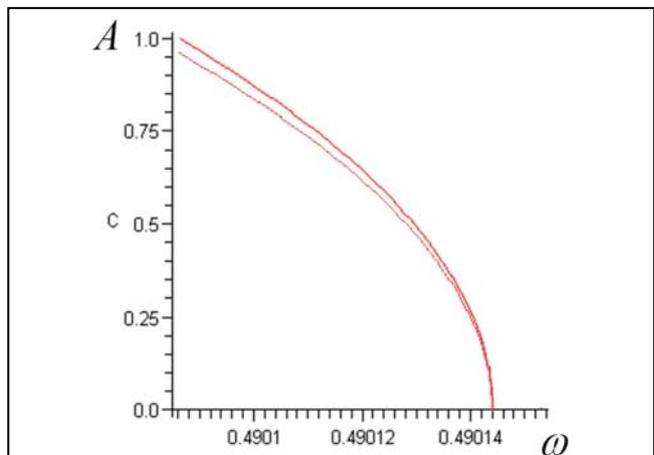


Рис. 7. Границы областей устойчивости / неустойчивости локализованной формы колебаний

**Выводы**

В работе проведено аналитическое исследование нелинейных нормальных форм колебаний системы, содержащей маятниковый виброгаситель, с использованием асимптотических методов, теории нелинейных нормальных форм колебаний и численных процедур. Построены границы областей устойчивости нормальных форм колебаний в плоскости параметров системы. Показано, что локализованная форма колебаний, наиболее благоприятная для виброгашения, устойчива в широкой области параметров системы и амплитуд колебаний.

**Литература**

1. Малкин, И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И. Г. Малкин. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 492 с.
2. Блэкьер, О. Анализ нелинейных систем / О. Блэкьер. – М.: Мир, 1969. – 400 с.
3. Nayfeh, A. H. Nonlinear oscillations / A. H. Nayfeh., D. T. Mook. – New York: Wiley, 1979. – 704 с.
4. *Вибрации* в технике. Справ. в 6 т. / Под ред. К. В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1995. – Т. 6. – 456 с.
5. Civalci, O. Pendulum as vibration absorber for flexible structures: experiments and theory / O. Civalci, A. Ertas // *Vibrations and Acoustics*. – 1996. – Vol. 118. – P. 558–566.
6. Lee, C. T. Nonlinear dynamic response of paired centrifugal pendulum vibration absorbers / C. T. Lee, S. W. Shaw // *Sound and Vibration*. – 1997. – Vol. 203. – P. 731–743.
7. Витт, А. А. Колебания упругого маятника как пример двух параметрически связанных линейных систем / А. А. Витт, Г. С. Горелик // *Журн. техн. физики*. – 1933. – Vol. 3. – С. 294–307.
8. Скотт, Э. Волны в активных и нелинейных средах / Э. Скотт. – М.: Сов. радио, 1977. – 368 с.
9. Старжинский, В. М. Прикладные методы нелинейных колебаний / В. М. Старжинский. – М.: Наука, 1977. – 255 с.
10. Wang, F. Nonlinear normal modes and their bifurcations for an inertially coupled nonlinear conservative system / F. Wang, A. Bajaj, K. Kamiya // *Nonlinear Dynamics*. – 2005. – Vol. 42 (3). – P. 233–265.
11. Warminski, J. Regular and chaotic motions of an autoparametric real pendulum system with the use of MR damper / J. Warminski, K. Kecik, J. Awrejcewicz // *Modeling Simulation and Control Nonlinear Eng. Dynamical Systems*. – 2009. – P. 267–276.
12. Маневич, Л. И. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем / Л. И. Маневич, Ю. В. Михлин, В. Н. Пилипчук. – М.: Наука, 1989. – 216 с.
13. Mikhlin, Yu. V. Normal vibrations of a general class of conservative oscillators / Yu. V. Mikhlin // *Nonlinear Dynamics*. – 1996. – Vol. 11. – P. 1–16.
14. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems* / A. Vakakis, L. Manevitch, Yu. Mikhlin, V. Pilipchuk, A. Zevin. – New-York: Wiley, 1996. – 552 p.

Поступила в редакцию 01.09.14