

за распределения контактных давлений при варьировании различных параметров в более широком диапазоне.

Литература

1. Галин, Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 303 с.
2. Попов, Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Г. Я. Попов. – Киев, Одесса: Вища шк., 1982. – 168 с.
3. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие уравнения / Н.Н. Ткачук, И.Я. Мовшович, Н.А. Ткачук и др. – КШП. ОМД. – М.: ООО «Тисо Принт», 2014. – № 3 – С. 3–10.
4. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие уравнения / Н. Н. Ткачук, И. Я. Мовшович, Н. А. Ткачук и др. – КШП. ОМД. – М.: ООО «Тисо Принт», 2014. – № 4 – С. 3–8.
5. Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
6. Ткачук, Н. Н. Анализ контактного взаимодействия сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически сопряженными поверхностями: Дис. ... канд. техн. наук. – Харьков, 2011. – 203 с.
7. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 509 с.

Поступила в редакцию 10.11.14

П. Э. Ахундова,

канд. физ-мат. наук

Институт математики
и механики

НАН Азербайджана,
Азербайджан, г. Баку,

e-mail: sopromat_v@mail.ru

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ СМЕЩЕНИЙ ТОЧЕК ВНЕШНЕГО КОНТУРА ВТУЛКИ КОНТАКТНОЙ ПАРЫ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ШЕРОХОВАТОГО ВНУТРЕННЕГО КОНТУРА

Ключові слова: контактна пара, втулка, вал, шорстка поверхня тертя, температура, мінімізація напруженого стану втулки.

На основі моделі шорсткої поверхні тертя та принципу рівномірності проведено теоретичний аналіз із визначення функції зміщення точок зовнішнього контуру втулки контактної пари з урахуванням перепаду температури в деталях контактної пари, Використовується розрахункова силова схема, що найбільш точно відповідає фізичній суті дійсного навантаження. Проведено мінімізацію напруженого стану втулки контактної пари за допомогою принципу рівномірності. Знайдена функція зміщення точок зовнішнього контуру втулки забезпечує підвищення несучої здатності втулки контактної пари. Як приклад розглянуто розрахунок для контактної пари стосовно свердловинних штангових нафтових насосів.

Введение

Одними из наиболее ответственных узлов машин, определяющих надежность и долговечность эксплуатации машин и оборудования, являются контактные (кинематические) пары, которые входят в состав нефтепромыслового оборудования, многих транспортных машин. Как известно, ресурс работы контактной пары в значительной степени определяется работоспособностью втулки, распределением напряжений в зонах взаимодействия деталей контактной пары. В связи с этим на современном этапе развития техники важное значение имеет оптимальное проектирование деталей контактных пар. Задачи теории оптимального проектирования заключаются в определении характеристик изделия таким образом, чтобы оно при действии заданных нагрузок в определенном смысле являлось наилучшим из всех изделий рассматриваемого типа.

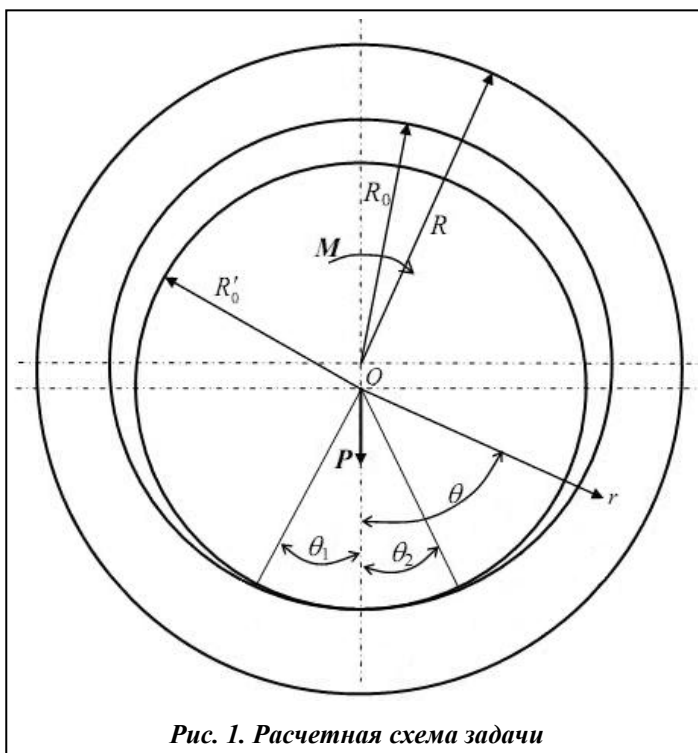


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Постановка задачи

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние втулки контактной пары при действии нормальной и касательной к внутреннему контуру нагрузок. Полагаем, что внутренний контур втулки близок к круговому. Как известно, реальная поверхность втулки никогда не бывает абсолютно гладкой, а всегда имеет микро- или макроскопические неровности технологического характера, образующие шероховатость. Несмотря на исключительно малые размеры неровностей, они оказывают существенное влияние на разнообразные эксплуатационные свойства контактной пары [1]. Считается, что втулка контактной пары на внешнем контуре имеет некоторые смещения. Функция этих смещений заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи оптимизации из дополнительного условия. Режимы работы контактной пары, в которой могут возникать остаточные деформации,

приняты недопустимыми. К внутренней шероховатой поверхности втулки на некотором неизвестном заранее участке прижимается вал.

Принято, что выполняются условия плоской деформации. Обозначим через E , μ и E_0 , μ_0 модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала втулки и вала соответственно. Отнесем втулку контактной пары к полярной системе координат $r\theta$, выбрав начало координат в центре концентрических окружностей L_0 и L с радиусами R_0 и R соответственно (рис. 1).

Рассмотрим некоторую реализацию шероховатой внутренней поверхности втулки. Представим границу внутреннего контура L_0' в следующем виде:

$$\rho = R_0 + \delta(\theta), \quad \delta(\theta) = \varepsilon H(\theta),$$

где $\varepsilon = R_{\max}/R_0$ – малый параметр, R_{\max} – наибольшая высота неровности внутренней поверхности втулки контактной пары.

С помощью обработки данных по профилограммам обработанной поверхности втулки находятся коэффициенты ряда Фурье для функции $H(\theta)$

$$H(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^0 \cos k\theta + b_k^0 \sin k\theta),$$

описывающие каждый внутренний профиль обработанной поверхности втулки.

Внешний контур вала близок к круговому и может быть представлен в виде $\rho_1(\theta) = R_0' + \varepsilon H_1(\theta)$, $H_1(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^1 \cos k\theta + b_k^1 \sin k\theta)$. Считается, что износ втулки и вала имеет абразивный характер.

Условие, связывающие перемещения втулки и вала, имеет [2, 3] вид

$$v_1 + v_2 = \delta(\theta), \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad (1)$$

где $\delta(\theta)$ – осадка точек поверхности втулки и вала, определяемая формой внутренней поверхности втулки и вала, а также величиной прижимающей силы P ; $(\theta_2 - \theta_1)$ – величина угла (площадки) контакта.

В зоне контакта, кроме нормальных давлений, действует касательное напряжение $\tau_{r\theta}$, связанное с контактным давлением $p(\theta, t)$ по закону Амонтона–Кулона

$$\tau_{r\theta}(\theta, t) = fp(\theta, t),$$

где f – коэффициент трения пары «втулка–вал».

В процессе работы контактной пары на внутренней поверхности втулки на площадке контакта с валом действует поверхностный источник тепла, вызванный внешним трением. В результате такого взаимодействия происходит повышение температуры втулки и вала.

Общее количество тепла в единицу времени пропорционально мощности сил трения, а количество тепла, выделяемое в точке зоны контакта с координатой θ , будет

$$Q(\theta, t) = Vfp(\theta, t),$$

где V – средняя за период скорость перемещения вала относительно втулки.

Общее количество тепла $Q(\theta, t)$ будет расходоваться следующим образом: поток тепла во втулку $Q_b(\theta, t)$ и аналогичный поток $Q_1(\theta, t)$ тепла на повышение температуры вала, т. е. $Q = Q_b + Q_1$.

Так как частота движения вала достаточно велика, рассматриваем задачу как стационарную. В этом случае температура втулки $T(r, \theta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению теории теплопроводности

$$\Delta T = 0$$

и граничным условиям

$$\text{при } r = \rho(\theta) \quad A_{T_1} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} - A_{T_2} \alpha_1 (T - T_c) = -Q_b(\theta); \quad (2)$$

$$\text{при } r = R_2 \quad \lambda \frac{\partial T_0}{\partial n} + \alpha_2 (T_0 - T_c) = 0. \quad (3)$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности втулки; Δ – оператор Лапласа; α_1 – коэффициент теплоотдачи с внутренней поверхности втулки; α_2 – коэффициент теплоотдачи с наружной цилиндрической поверхности втулки с внешней средой с температурой T_c ; n – нормаль к контуру втулки; A_{T_1} – теплопоглощающая поверхность; A_{T_2} – охлаждающая поверхность.

Для перемещений точек поверхности трения втулки имеем $v_1 = v_{1e} + v_{1r} + v_{1w}$, где v_{1e} – термоупругие перемещения точек контактной поверхности втулки; v_{1r} , v_{1w} – перемещения, вызванные смятием микровыступов и износом поверхности втулки соответственно. Аналогично, для перемещений контактной поверхности вала будем иметь $v_2 = v_{2e} + v_{2r} + v_{2w}$.

Скорость изменения перемещений поверхности при износе втулки и вала будет [4]

$$\frac{dv_{kw}}{dt} = K_{bk} p(\theta, t) \quad (k = 1, 2), \quad (4)$$

где K_{b1} , K_{b2} – коэффициенты изнашивания материала втулки и вала соответственно.

Граничные условия задачи термоупругости для втулки в процессе работы контактной пары будут иметь следующий вид

$$\sigma_n^b = -p(\theta); \quad \tau_{nt}^b = -fp(\theta) \quad \text{на площадке контакта}; \quad (5)$$

$$\sigma_n^b = 0; \quad \tau_{nt}^b = 0 \quad \text{вне площадки контакта};$$

$$v_r^b - iv_\theta^b = g(\theta) \quad \text{при } r = R. \quad (6)$$

Здесь v_r , v_θ – соответственно радиальная и касательная составляющие вектора перемещений точек контура L ; σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ – компоненты тензора напряжений; $g(\theta)$ – искомая функция перемещений точек наружного контура втулки.

Аналогично ставится задача термоупругости для определения перемещений поверхности плунжера

$$\Delta T_1 = 0;$$

$$\text{при } r = \rho_1(\theta) \quad \lambda_2 \frac{\partial T_1}{\partial n} = -Q_1(\theta) \quad \text{на контактной площадке};$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_1}{\partial n} + \alpha(T_1 - T_c) = 0 \quad \text{вне площадки контакта};$$

при $r = \rho_1(\theta)$ $\sigma_n = -p(\theta)$; $\tau_{nt} = -fp(\theta)$ на контактной площадке;

$$\sigma_n = 0; \quad \tau_{nt} = 0 \quad \text{вне площадки контакта.}$$

Здесь для интенсивности поверхностного источника тепла в зоне трения имеем $Q_1(\theta) = \alpha_{т.п.2}fp(\theta)$, $\alpha_{т.п.}$ – коэффициент разделения теплового потока для вала.

Величины θ_1 и θ_2 , являющиеся концами участка соприкосновения вала с втулкой, неизвестны заранее. Для их нахождения используем условие [5], выражающее, что давление $p(\theta)$ непрерывно переходит в нуль, когда точка θ выходит за участок соприкасания

$$p(\theta_1) = 0; \quad p(\theta_2) = 0. \quad (7)$$

Метод решения

Температуру, напряжения и перемещения во втулке и вале ищем в виде разложений по малому параметру, в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими ε степени выше первой. Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений плоской термоупругости. Значения температуры, компонент тензора напряжений и вектора перемещений при $r = \rho(\theta)$ (аналогично и при $r = \rho_1(\theta)$) получим, разлагая в ряд выражения для температуры, напряжений и перемещений в окрестности $r = R_0$. Используя метод возмущений и граничные условия (2), (3), (5), (6) приходим к последовательности краевых задач плоской теории термоупругости для втулки для нулевого приближения

$$A_{T_1} \lambda \frac{\partial t^{(0)}}{\partial r} - A_{t_2} \alpha_1 t^{(0)} = -Q_b^{(0)}(\theta) \quad \text{при } r = R_0;$$

$$\lambda_0 \frac{\partial t_0^{(0)}}{\partial r} + \alpha_2 t_0^{(0)} = 0 \quad \text{при } r = R;$$

$$\sigma_r^{b(0)} = -p^{(0)}(\theta), \quad \tau_{r\theta}^{b(0)} = -fp^{(0)}(\theta) \quad \text{на площадке контакта}$$

$$\text{при } r = R_0 \quad (8)$$

$$\sigma_r^{b(0)} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{b(0)} = 0 \quad \text{вне площадки контакта}$$

$$v_r^{b(0)} - iv_\theta^{b(0)} = g^{(0)}(\theta) \quad \text{при } r = R; \quad (9)$$

для первого приближения

$$A_{T_1} \lambda \frac{\partial t^{(1)}}{\partial r} - A_{t_2} \alpha_1 t^{(1)} = -Q_0^{(1)}(\theta) \quad \text{при } r = R_0$$

$$\lambda_0 \frac{\partial t_0^{(1)}}{\partial r} + \alpha_2 t_0^{(1)} = 0 \quad \text{при } r = R$$

$$\sigma_r^{b(1)} = N - p^{(1)}(\theta), \quad \tau_{r\theta}^{b(1)} = T - fp^{(1)}(\theta) \quad \text{на площадке контакта}$$

$$\text{при } r = R_0$$

$$\sigma_r^{b(1)} = N, \quad \tau_{r\theta}^{b(1)} = T \quad \text{вне площадки контакта};$$

$$v_r^{b(1)} - iv_\theta^{b(1)} = g^{(1)}(\theta).$$

Здесь

$$Q_0^{(1)}(\theta) = -Q_b^{(1)}(\theta) + \left[A_{T_1} \lambda \frac{\partial^2 t^{(0)}}{\partial r^2} - A_{t_2} \alpha_1 \frac{\partial t^{(0)}}{\partial r} \right] H(\theta);$$

$$N = -H(\theta) \frac{\partial \sigma_r^{b(0)}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta}^{b(0)} \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta};$$

$$T = \left(\sigma_{\theta}^{b(0)} - \sigma_r^{b(0)} \right) \frac{1}{R_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta} - H(\theta) \frac{\partial \tau_{r\theta}^{b(0)}}{\partial r};$$

$t_c = T - T_c$ – избыточная температура для втулки.

Аналогично находим граничные условия задачи термоупругости для вала в каждом приближении.

Решение краевых задач теории теплопроводности в каждом приближении ищутся методом разделения переменных. Окончательно, распределение избыточной температуры для втулки в каждом приближении находим в следующем виде:

$$t^{(0)} = C_{10} + C_{20} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{10}^{(k)} r^k + C_{20}^{(k)} r^{-k} \right) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{10}^{(k)} r^k + A_{20}^{(k)} r^{-k} \right) \sin k\theta;$$

$$t^{(1)} = C_{11} + C_{21} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{11}^{(k)} r^k + C_{21}^{(k)} r^{-k} \right) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{11}^{(k)} r^k + A_{21}^{(k)} r^{-k} \right) \sin k\theta.$$

Постоянные C_{10} , C_{20} , $C_{10}^{(k)}$, $C_{20}^{(k)}$, $A_{10}^{(k)}$, $A_{20}^{(k)}$ определяются из граничных условий задачи теории теплопроводности в нулевом приближении. Соответственно коэффициенты C_{11} , C_{21} , $C_{11}^{(k)}$, $C_{21}^{(k)}$, $A_{11}^{(k)}$, $A_{21}^{(k)}$ находятся из краевых условий задачи теории теплопроводности в первом приближении.

Из-за громоздкости формулы для этих величин не приводятся.

Для решения задачи термоупругости в каждом приближении используем термоупругий потенциал перемещений [6].

В рассматриваемой задаче термоупругий потенциал перемещений в нулевом и первом приближениях определяется решением следующих дифференциальных уравнений:

$$\Delta F^{(0)} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha t^{(0)}; \quad \Delta F^{(1)} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha t^{(1)}. \quad (10)$$

Ищем решение уравнения (10) в нулевом приближении в виде

$$F^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[f_n^{(0)}(r) \cos n\theta + f_n^{(0)*}(r) \sin n\theta \right].$$

Для функций $f_n^{(0)}(r)$, $f_n^{(0)*}(r)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения, решение которых находим методом вариации постоянных. После определения термоупругого потенциала перемещений в нулевом приближении для втулки с помощью формул [6] вычисляем соответствующие термоупругому потенциалу напряжения $\bar{\sigma}_r^{b(0)}$, $\bar{\sigma}_{\theta}^{b(0)}$, $\bar{\tau}_{r\theta}^{b(0)}$ и перемещения $\bar{v}_r^{b(0)}$, $\bar{v}_{\theta}^{b(0)}$ во втулке.

Найденные напряжения и перемещения для втулки не будут удовлетворять крайевым условиям (8)–(9). Таким образом, необходимо для втулки найти второе напряженно-деформированное состояние $\bar{\sigma}_r^{b(0)}$, $\bar{\sigma}_{\theta}^{b(0)}$, $\bar{\tau}_{r\theta}^{b(0)}$, $\bar{v}_r^{b(0)}$, $\bar{v}_{\theta}^{b(0)}$, такое, чтобы выполнялись крайевые условия (8)–(9).

Следовательно, для определения второго напряженно-деформированного состояния имеем граничные условия:

при $r = R_0$

$$\bar{\bar{\sigma}}_r^{b(0)} = -p^{(0)}(\theta) - \bar{\sigma}_r^{b(0)}, \quad \bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{b(0)} = -fp^{(0)}(\theta) - \bar{\tau}_{r\theta}^{b(0)} \quad \text{на площадке контакта}; \quad (11)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_r^{b(0)} = -\bar{\sigma}_r^{b(0)}, \quad \bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{b(0)} = -\bar{\tau}_{r\theta}^{b(0)} \quad \text{вне площадки контакта};$$

$$\text{при } r = R \quad \bar{\bar{v}}_r^{b(0)} - i\bar{\bar{v}}_{\theta}^{b(0)} + \left(\bar{v}_r^{b(0)} - i\bar{v}_{\theta}^{b(0)} \right) = g^{(0)}(\theta). \quad (12)$$

Крайевые условия задачи (11)–(12) с помощью формул Колосова–Мусхелишвили [5] можно записать в виде граничной задачи для отыскания двух комплексных потенциалов $\Phi_b^{(0)}(z)$ и $\Psi_b^{(0)}(z)$ для втулки.

Комплексные потенциалы ищем в виде разложений [5]

$$\Phi_b^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k; \quad \Psi_b^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k. \quad (13)$$

Требую, чтобы комплексные потенциалы (13) удовлетворяли граничным условиям задачи (11) – (12), получаем бесконечные системы уравнений относительно коэффициентов a_k, b_k . Решение этих систем не представляет особых трудностей (см. в [5] § 59).

Полученные системы линейных уравнений относительно a_k, b_k позволяют при заданной функции смещений в точках внешнего контура

$$g^{(0)'}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{HO} e^{ik\theta}$$

найти напряженно-деформированное состояние втулки контактной пары в нулевом приближении. С помощью комплексных потенциалов (13), формул Колосова–Мусхелишвили и интегрирования кинетического уравнения изнашивания (4) материала втулки в нулевом приближении находится перемещение $v_1^{(0)}$ контактной поверхности втулки. Аналогично рассматривается задача термоупругости для вала. Используя решение задачи термоупругости для вала и кинетическое уравнение изнашивания материала вала в нулевом приближении, находим перемещение $v_2^{(0)}$ контактной поверхности вала. Найденные величины $v_1^{(0)}$ и $v_2^{(0)}$ подставляются в основное контактное уравнение (1) в нулевом приближении. Для алгебраизации основного контактного уравнения в нулевом приближении искомые функции контактного давления ищутся в виде разложений

$$p^{(0)}(\theta, t) = p_0^0(\theta) + tp_1^0(\theta) + \dots; \quad (14)$$

$$p_0^0(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^0 \cos k\theta + \beta_k^0 \sin k\theta);$$

$$p_1^0(\theta) = \alpha_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^1 \cos k\theta + \beta_k^1 \sin k\theta);$$

.....

Подставляя соотношения (14) в основное контактное уравнение в нулевом приближении, находим функциональные уравнения для последовательного определения $p_0^0(\theta)$, $p_1^0(\theta)$ и т. д. Для построения алгебраической системы относительно α_k, β_k приравниваем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в левой и правой частях функционального уравнения контактной задачи. В результате получим бесконечную алгебраическую систему относительно α_k^0 ($k = 0, 1, 2, \dots$) и β_k^0 ($k = 1, 2, \dots$) и α_k^1, β_k^1 и т.д.

Из-за неизвестных величин θ_1 и θ_2 система уравнений оказывается нелинейной. Для определения величин θ_1 и θ_2 ($\theta_1 = \theta_1^0 + \varepsilon\theta_2^1 + \dots$; $\theta_2 = \theta_2^0 + \varepsilon\theta_2^1 + \dots$) имеем условие (7) Это уравнение можно представить в виде $p^{(0)}(\theta_1^0) = 0$, $p^{(0)}(\theta_2^0) = 0$ для нулевого приближения и $p^{(1)}(\theta_1^1) = 0$, $p^{(1)}(\theta_2^1) = 0$ для первого приближения. Зная решение задачи для нулевого приближения, перейдем к решению задачи в первом приближении. Используя комплексные потенциалы $\Phi_b^{(0)}(z)$, $\Psi_b^{(0)}(z)$ и формулы Колосова–Мусхелишвили [5], найдем компоненты напряжений $\bar{\sigma}_r^{b(0)}$, $\bar{\sigma}_\theta^{b(0)}$, $\bar{\tau}_{r\theta}^{b(0)}$ при $r = R_0$. Зная напряжения $\sigma_r^{b(0)} = \bar{\sigma}_r^{b(0)} + \overline{\bar{\sigma}_r^{b(0)}}$, $\sigma_\theta^{b(0)} = \bar{\sigma}_\theta^{b(0)} + \overline{\bar{\sigma}_\theta^{b(0)}}$, $\tau_{r\theta}^{b(0)} = \bar{\tau}_{r\theta}^{b(0)} + \overline{\bar{\tau}_{r\theta}^{b(0)}}$, находим при $r = R_0$ функции N и T .

Дальнейший ход решения задачи аналогичен нулевому приближению. В результате получим системы линейных уравнений относительно коэффициентов $a_k^{(1)}$, $b_k^{(1)}$. При этом используется следующее разложение:

$$g^{(1)'}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{H(1)} e^{ik\theta}.$$

Как и в нулевом приближении, полученные системы уравнений позволяют выразить коэффициенты $a_k^{(1)}$, $b_k^{(1)}$ через коэффициенты $A_k^{H(1)}$ функции смещений в точках внешнего контура втулки в первом приближении.

Зная функцию смещений, можно найти напряженно-деформированное состояние во втулке контактной пары. Общее напряженное состояние во втулке находится по формулам

$$\sigma_r = \sigma_r^{b(0)} + \varepsilon \sigma_r^{b(1)} + \dots; \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^{b(0)} + \varepsilon \sigma_\theta^{b(1)} + \dots; \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^{b(0)} + \varepsilon \tau_{r\theta}^{b(1)} + \dots.$$

Аналогично решается задача термоупругости для вала в первом приближении. Алгебраизация основного контактного уравнения контактной задачи в первом приближении проводится таким же образом, как и в нулевом приближении. Для этого неизвестные функции контактного давления ищутся в виде

$$p^{(1)}(\theta, t) = p_0^1(\theta) + t p_1^1(\theta) + \dots;$$

$$p_0^1(\theta) = \alpha_{0,0}^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k,0}^1 \cos k\theta + \beta_{k,1}^1 \sin k\theta);$$

$$p_1^1(\theta) = \alpha_{0,1}^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k,0}^1 \cos k\theta + \beta_{k,1}^1 \sin k\theta).$$

В результате получаем бесконечные линейные алгебраические системы относительно $\alpha_{0,0}^1$, $\alpha_{k,0}^1$, $\beta_{k,1}^1$ ($k = 1, 2, \dots$) и $\alpha_{k,1}^1$, $\beta_{k,1}^1$ ($k = 1, 2, \dots$).

Рассмотрим задачу оптимального проектирования. Требуется определить функцию смещений в точках внешнего контура втулки.

В поставленной задаче коэффициенты A_k^{HO} , $A_k^{H(1)}$ соответственно в каждом приближении подлежат определению в процессе решения задачи оптимизации. Используя полученное решение задачи термоупругости, найдем нормальное тангенциальное напряжение σ_θ в поверхностном слое контура $r = \rho(\theta)$ втулки с точностью до величин первого порядка относительно малого параметра ε

$$\sigma_\theta \Big|_{r=\rho} = \sigma_\theta^{(0)} \Big|_{r=R_0} + \varepsilon \left[\frac{\partial \sigma_\theta^{(0)}}{\partial r} H(\theta) + \sigma_\theta^{(1)} \right] \Big|_{r=R_0}.$$

Функция σ_θ при $r = \rho(\theta)$ представляет собой функцию полярного угла. Компоненты напряжений $\sigma_\theta^{(0)}$ и $\sigma_\theta^{(1)}$ на контуре $|\tau| = R_0$ находятся по соотношениям

$$\sigma_\theta^{(0)} = \overline{\sigma}_\theta^{b(0)} + \overline{\overline{\sigma}}_\theta^{b(0)}; \quad \sigma_\theta^{(1)} = \overline{\sigma}_\theta^{b(1)} + \overline{\overline{\sigma}}_\theta^{b(1)}.$$

Здесь $\overline{\sigma}_\theta^{b(0)}$, $\overline{\overline{\sigma}}_\theta^{b(1)}$ определяются с помощью термоупругого потенциала соответственно в нулевом и первом приближениях: $\overline{\overline{\sigma}}_\theta^{b(0)}$, $\overline{\overline{\sigma}}_\theta^{b(1)}$ находятся с помощью формул Колосова–Мусхелишвили [5] соответственно в нулевом и первом приближениях.

Напряжения $\overline{\overline{\sigma}}_\theta^{b(0)}$, $\overline{\overline{\sigma}}_\theta^{b(1)}$ зависят соответственно от коэффициентов a_k , $a_k^{(1)}$. Коэффициенты a_k зависят от величин A_k^{HO} ряда Фурье искомой функции $g^{(0)'}(\tau)$ смещений в нулевом приближении. Соответственно коэффициенты $a_k^{(1)}$ зависят от величин $A_k^{H(1)}$ ряда Фурье искомой функции $g^{(1)'}(\tau)$ смещений в первом приближении.

Для построения недостающих уравнений, позволяющих определить искомые коэффициенты A_k^{HO} , $A_k^{H(1)}$, требуем, чтобы обеспечивалась минимизация напряжений во внутреннем контуре втулки

ки. Снижение концентрации напряжений во внутреннем контуре втулки контактной пары осуществляем путем минимизации критерия

$$\sum_{i=1}^M [\sigma_{\theta}(\theta_i) - \sigma]^2 \rightarrow \min. \quad (15)$$

Здесь σ – оптимальное значение нормального тангенциального напряжения во внутреннем поверхностном слое втулки, подлежащее определению в процессе решения задачи оптимизации.

Учитывая, что σ зависит от малого параметра, критерий минимизации (15) представим в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^M [\sigma_{\theta}^{(0)}(\theta_i) - \sigma^{(0)}]^2 \rightarrow \min;$$

$$\sum_{i=1}^M [\sigma_{\theta}^*(\theta_i) - \sigma^{(1)}]^2 \rightarrow \min,$$

где $\sigma_{\theta}^*(\theta) = \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} H(\theta) + \sigma_{\theta}^{(1)}$ при $r = R_0$.

Обозначим

$$U^{(0)} = \sum_{i=1}^M [\sigma_{\theta}^{(0)}(\theta_i) - \sigma^{(0)}]^2, \quad U^{(1)} = \sum_{i=1}^M [\sigma_{\theta}^*(\theta_i) - \sigma^{(1)}]^2.$$

Функции $U^{(0)}$ и $U^{(1)}$ представляют собой функции, зависящие от управляющих переменных $\sigma^{(0)}$, A_k^{HO} и $\sigma^{(1)}$, $A_k^{H(1)}$ соответственно.

Согласно методу наименьших квадратов, наилучшими коэффициентами $\sigma^{(0)}$, A_k^{HO} и $\sigma^{(1)}$, $A_k^{H(1)}$ считаются те, для которых функции $U^{(0)}$ и $U^{(1)}$ соответственно будут принимать минимальные значения. Используя необходимое условие экстремума функции нескольких переменных, получаем бесконечные линейные системы уравнений для определения величин $\sigma^{(0)}$, A_k^{HO} ($k = 0, 1, 2, \dots$) и $\sigma^{(1)}$, $A_k^{H(1)}$

$$\frac{\partial U^{(0)}}{\partial \sigma^{(0)}} = 0, \quad \frac{\partial U^{(0)}}{\partial A_k^{HO}} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad (16)$$

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \sigma^{(1)}} = 0, \quad \frac{\partial U^{(1)}}{\partial A_k^{H(1)}} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Системы уравнений упрощаются, так как функции $\sigma_{\theta}^{(0)}(A_k^{HO})$ и $\sigma_{\theta}^*(A_k^{H(1)})$ линейны относительно параметров A_k^{HO} , $A_k^{H(1)}$ соответственно. Система уравнений (16), (17) совместно с полученными алгебраическими системами задачи теории упругости в нулевом и первом приближениях позволяет определить оптимальные смещения точек внешнего контура втулки, напряженно-деформированное состояние, а также оптимальное значение нормального тангенциального напряжения во внутреннем контуре втулки.

Напомним, что контактное давление $p(\theta) = p^{(0)}(\theta) + \varepsilon p^{(1)}(\theta) + \dots$, также зависит от искомой функции перемещений точек внешнего контура и заданной шероховатости внутренней поверхности. Поэтому при расчетах оптимальной функции перемещений к упомянутым алгебраическим системам добавляются основные разрешающие уравнения контактной задачи.

Анализ результатов моделирования

Для численной реализации изложенного метода проведены расчеты методами редукции, последовательных приближений [7] и Гаусса выбором главного элемента в каждом приближении.

В рассматриваемой задаче имеется много свободных параметров. Это различные теплофизические и механические характеристики материалов, параметры качества поверхности внутреннего контура втулки, геометрические размеры втулки. В связи с этим для примера расчета был принят скважинный штанговый нефтяной насос исполнения НН2С-57-30-12. Каждая из бесконечных систем урезалась до пяти уравнений. Величина M принималась равной 72. Результаты расчетов коэффициентов разложения функции перемещений $g(\theta)$ приведены в таблице для гладкого контура (первая строка) и шероховатого внутреннего контура, описываемого стационарной случайной функцией с нулевым средним значением и известной дисперсией.

Следует отметить, что можно было значение σ заранее выбирать из условия обеспечения несущей способности узла трения. Как показывают расчеты, в этом случае суммы квадратов отклонений оказываются более значительными. С помощью определения неизвестного оптимального значения σ уменьшается сумма квадратов отклонений, т. е. результаты поиска оказываются более уточненными.

Значения коэффициентов Фурье функции перемещений точек наружного контура втулки

A_0^H	A_1^H	A_2^H	A_{-1}^H	A_{-2}^H
$0,0129 \cdot 10^{-3}$	$0,097 \cdot 10^{-3}$	$-0,069 \cdot 10^{-3}$	$0,057 \cdot 10^{-3}$	$0,028 \cdot 10^{-3}$
$0,0157 \cdot 10^{-3}$	$0,118 \cdot 10^{-3}$	$-0,086 \cdot 10^{-3}$	$0,068 \cdot 10^{-3}$	$0,034 \cdot 10^{-3}$

Предлагаемый метод минимизации напряженного состояния втулки контактной пары может быть распространен на другие конструкции узла трения.

Выводы

Показано, что с помощью выбора функции перемещений точек наружного контура втулки контактной пары можно управлять (минимизировать) распределением напряженного состояния во втулке. Это повысит работоспособность пары «втулка–вал».

Литература

1. Хусу, А. П. Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход) / А. П. Хусу, Ю. Р. Виттенберг, В. А. Пальмов. – М.: Наука, 1975. – 344 с.
2. Галин, Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязоупругости / Л. А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
3. Горячева, И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
4. Горячева, И. Г. Контактные задачи в трибологии / И. Г. Горячева, М. Н. Добычин. – М.: Машиностроение, 1988. – 256 с.
5. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1966, – 707 с.
6. Паркус, Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – М.: Физматлит, 1963. – 252 с.
7. Мирсалимов, В. М. Неодномерные упругопластичные задачи / В. М. Мирсалимов. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

Поступила в редакцию 11.10.14