Е. М. Дончик,
В. М. Колодяжный,
д-р физ.-мат. наук

Национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков,
e-mail: Zhenyad80_0@mail.ru,
kolodyazhny@mail.ru

Ключові слова: *рівняння струни, задача керованості, дограничні регулярні простори функцій обмеженої q-інтегральної p-варіації.*

УДК 517.958+517.977.5

ЗАДАЧА УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКОЙ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ УПРАВЛЕНИИ

Розглядається задача імпульсного керування для хвильового рівняння із зовнішнім навантаженням на прямокутнику $[0, \pi]\times[0, T]$. Вводяться спеціальні дограничні регулярні простори функцій обмеженої q-інтегральної p-варіації $V^{r}_{p,q}$. Поставлені задачі визначення необхідних та достатніх умов наближеної (апроксимативної) керованості та 0-керованості.

Введение

Широко встречаемые в машиностроении волновые процессы часто приводят к неустойчивой работе и даже выходу из строя агрегатов турбин, гидроприводов и др. Необходимость управления волновыми процессами с целью повышения надёжности и обеспечения качественной работы соответствующих агрегатов является актуальной задачей, решению которой уделяют внимание многие исследователи [1–8]. В частности, В. А. Ильин [1, 2] рассмотрел граничное управление процессом колебаний на двух концах и на одном конце при закреплённом втором конце в терминах обобщённого решения волнового уравнения с конечной энергией. Так, Е. И. Моисеев совместно с В. А. Ильиным [3, 4] рассмотрели оптимизацию граничного управления смещением или упругими граничными силами на двух концах и на одном конце при закреплённом втором конце за произвольный достаточно большой промежуток времени. А. А. Холомеева [5] исследовала оптимальное граничное управление колебаниями струны с нелокальными граничными условиями типа Бицадзе–Самарского. Л. В. Фардиголой и Г. М. Скляром [7] рассмотрена задача управляемости для волнового уравнения в пространстве Соболева H_l^s, где в качестве функции управления было выбрано граничное условие

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}=0, x>0, t\in(0,T)$$

с управлением $w(0, t) = –u(t)$, $t \in (0, T)$.

При исследовании математических задач, связанных с процессами управления, возникают трудности при внесении управлений в граничные и начальные условия. В статье строятся импульсные управления, внесённые в функцию внешней нагрузки, которые решают задачу приближённой управляемости и 0-управляемости.

Задачи управляемости

Исследование задачи управляемости выполним для краевой задачи, формируемой уравнением струны

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+g(x,t), \qquad g(x,t)=\sum_{j=1}^{n}\delta(x-x_j)\sum_k \Gamma_{2Tk} g_j^n(t), \qquad x\in(0,\pi), \quad t\in(0,T),\quad T>\pi, \tag{1}$$

$$g(x,t)=\sum_{j=1}^{n}\delta(x-x_j)\sum_k \Gamma_{2Tk} g_j^n(t), \tag{2}$$

где $\delta(x)$ − функция Дирака; Γ_h – оператор сдвига: $(\Gamma_h\varphi)(t) = \varphi(x, t + h)$; при $x_j=\dfrac{\pi j}{n}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \in N$, $t \in (0, T)$ а $g^n{}_j(t)$ – функция управления, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \in N$; с начальные условиями

$$w(x, 0) = \partial w(x, 0)/\partial t = 0, \quad x \in (0, \pi) \tag{3}$$

и граничными условиями

$$w(0, t) = w(\pi, 0) = 0, \quad t \in (0, T). \tag{4}$$

Пусть имеется биекция $f: D \mapsto f(D)$, где $D = [a_1, b_1]\times[a_2, b_2]$ − прямоугольник, $x_1 \in [a_1, b_1]$, $x_2 \in [a_2, b_2]$ с произвольным разбиением прямоугольника D прямыми $x_1 = x_{1_i}$, $x_2 = x_{2_j}$, такими, что $x_{1_i} < x_{1_{i+1}}$, $x_{2_j} < x_{2_{j+1}}$. И пусть $\Delta f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$, $\Delta^r f(x_k) = \Delta^{r-1}\Delta f(x_k)$.

Введём допредельное регулярное пространство $V^r_{p,q}$ функций ограниченной q-интегральной p-вариации [9]

$$V^r_{p,q}(D) = \left\{ \begin{array}{l} \phi(x_1, x_2) \,|\, x_1 \in [a_1, b_1],\ x_2 \in [a_2, b_2],\ \exists C > 0,\ \forall n, K \in \mathrm{N},\ \nu_1, \nu_2 \in \mathrm{N} \\ 1 \le p_1 < \infty,\ 1 \le p_2 < \infty,\ 1 \le q_1 < \infty,\ 1 \le q_2 < \infty: \\ \sup \sum\limits_{j_2=1}^{K-1} \sum\limits_{j_1=1}^{n-1} \left(\sup \sum\limits_{l=j_2}^{j_2+\nu_2} \left| \Delta^{r_2}_{x_2} \left(\sum\limits_{k=j_1}^{j_1+\nu_1} \left| \Delta^r_x f(x1k, x2l) \right|^q \right)^p \right|^q \right)^p < C \end{array} \right\}$$

где ϕ: $(x_1, x_2) \to \phi(x_1, x_2)$ − биекция.

С учётом возможности и удобства технической реализации будем выбирать функцию управления в (1) из пространства $V^r_{p,q}$, т. е.

$$g_j^{n,K}(t) \in V^r_{p,q}(0, T). \tag{5}$$

Рассматривается задача получения критериев приближённой управляемости и 0-управляемости для системы (1)–(4) с ограничениями на управление (5). Отметим, что управления, для которых решается задача управляемости, находятся в явном виде.

Определение критериев управляемости

Пусть $T \ge \pi$. Обозначим через $P_T(w)$ множество таких состояний $w \in V^r_{p,q}$, для которых существуют такие управления $g_j^n = \sum\limits_{i=1}^{K} g_{j,i}^{n,K}(t) \in V^r_{p,q}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \in N$, $i = 1, 2, \ldots, K$, $K \in N$, что задача (1)−(4) имеет единственное решение в $V^r_{p,q}$.

Определение 1. Система (1)–(4) называется приближённо управляемой за время $T \ge \pi$, если 0 принадлежит замыканию $P_T(w)$ и 0-управляемой, если 0 принадлежит $P_T(w)$ в $V^r_{p,q}$.

Обозначим через EE оператор нечётного продолжения по x, то есть $(EEf)(x) = f(x) - f(-x)$, а OE − оператор чётного продолжения, $(OEf)(x) = f(x) + f(-x)$.

Введём нечётные 2π − периодические продолжения по переменной x функции $w(x, t) \in V^r_{p,q}$

$$\mathrm{w}(\cdot, t) = \sum_{k \in Z} \Gamma_{2\pi k} EE \begin{pmatrix} w(\cdot, t) \\ \partial w(\cdot, t)/\partial t \end{pmatrix} \in V^r_{p,q},$$

при этом выполняется свойство $(\Gamma_h f, \varphi) = (f, \Gamma_{-h} f)$.

Легко видеть, что задача управления (1)−(5) эквивалентна следующей задаче, представленной в матричном виде

$$\frac{dw}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{d^2}{dx^2} & 0 \end{pmatrix} w - \sum_{k \in Z} \Gamma_{2Tk} \Gamma_{2\pi k} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \delta(x - x_j) \sum_{i=1}^{K} g_{j,i}^{n,K}(t), \qquad n \in N, \quad t \in (0, T), \quad w(x, 0) = 0. \tag{6}$$

Применяя преобразование Фурье [8] $(Fw)(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{-i\sigma x}w(x)dx$ по переменной x для системы (6), при котором $v(\sigma, t) = Fw(x, t) \in V^r_{p,q}$, $\sigma \in R$, получаем следующую задачу Коши в пространстве $V^r_{p,q}$:

$$\frac{dv(\sigma,t)}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\sigma^2 & 0\end{bmatrix}v(\sigma,t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in Z}e^{2\pi k\sigma i}\sum_{j=1}^{n}\left(e^{-\frac{\pi}{n}j\sigma i}-e^{\frac{\pi}{n}j\sigma i}\right)\Gamma_{2Tk}\sum_{i=1}^{K}g_{j,i}^{n,K}(t),\qquad t\in(0,T), \tag{7}$$

$$v(\sigma, 0) = 0. \tag{8}$$

Очевидно, функция

$$v(\sigma,t)=\frac{T}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in Z}e^{2\pi k\sigma i}\int_0^t\Omega(\sigma,t-\tau)\begin{bmatrix}0\\ \sum_{j=1}^{n}\left(e^{-\frac{\pi}{n}j\sigma i}-e^{\frac{\pi}{n}j\sigma i}\right)\Gamma_{2Tk}\sum_{i=1}^{K}g_{j,i}^{n,K}(\tau)\end{bmatrix}d\tau,$$

где

$$\Omega(\sigma,t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{i\sigma t}+e^{-i\sigma t} & (1/i\sigma)(e^{i\sigma t}-e^{-i\sigma t})\\ i\sigma(e^{i\sigma t}-e^{-i\sigma t}) & e^{i\sigma t}+e^{-i\sigma t}\end{bmatrix}$$

является решением (7), (8).

Если применить обратное преобразование Фурье, то получим, что

$$w(\cdot,t)=\sum_{k\in Z}\Gamma_{2\pi k}\int_0^t S(t-\tau)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\sum_{j=1}^{n}\delta\left(x-\frac{j\pi}{n}\right)\Gamma_{2Tk}\sum_{i=1}^{K}g_{j,i}^{n,K}(\tau)d\tau$$

является единственным решением задачи (6) в $V^r_{p,q}$, где

$$S(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F^{-1}\Omega(\sigma,t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\Gamma_t+\Gamma_{-t} & (d/dx)^{-1}(\Gamma_t-\Gamma_{-t})\\ (d/dx)(\Gamma_t-\Gamma_{-t}) & \Gamma_t+\Gamma_{-t}\end{bmatrix}$$

$(d/dx)^{-1}$ – оператор, обратный оператору дифференцирования.

Очевидно, что

$$w(\cdot,t)=S(t)\left[\sum_{k\in Z}\Gamma_{2\pi k}\int_0^t S(-\tau)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\sum_{j=1}^{n}\delta(x-x_j)\Gamma_{2Tk}\sum_{i=1}^{K}g_{j,i}^{n,K}(\tau)d\tau\right].$$

Для построения финитных управлений обозначим

$$g_{j,i}^{n,K}(t)=g_j^n(t)\left(H\left(t-\frac{T(i-1)}{K}\right)-H\left(t-\frac{Ti}{K}\right)\right),\qquad i=1,2,\ldots,K,\quad K\in N,$$

где H − функция Хевисайда: $H(t) = 1$ если $t > 0$ и $H(t) = 0$, если $t \le 0$.

Тогда

$$\operatorname{supp}\, g_{j,i}^{n,K}(t)\in\left[\frac{T(i-1)}{K},\frac{Ti}{K}\right],\qquad i=1,2,\ldots,K,\quad K\in N,$$

где K – натуральное число.

Система, определяемая состоянием w, задаётся множеством $P_T(w)$ пространства $V^r_{p,q}$

$$P_T(w)=\cup_{n,K\in N}P_n^K(w),$$

где

$$P_n^K(w) = \left\{ R(w) \mid T \ge \pi \wedge g_{j,i}^{n,K} \in V_{p,q}^r \right\},$$

$$R(w) = \sum_{k \in Z} \Gamma_{2\pi k} \int_0^t S(-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) \Gamma_{2Tk} g_j^n(\tau) d\tau - S^{-1}(t) w(x,t), \qquad t \in (0,T).$$

Следовательно, одновременно с определением 1 можно рассматривать определение 2.

Определение 2. Состояние $w = EEw$ системы (1)–(4) называется приближённо управляемым за время $T \ge \pi$, если 0 принадлежит замыканию $R(w)$ и 0-управляемым, если 0 принадлежит $R(w)$ в $V^r_{p,q}$.

Выражение $S^{-1}(t)w(x, t)$, характеризующее систему (1)–(4), представляется в виде

$$S^{-1}(t) w(x,t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\Gamma_{-t} + \Gamma_t) w(x,t) + (d/dx)^{-1} (\Gamma_{-t} - \Gamma_t)(d/dt) w(x,t) \\ (d/dx)(\Gamma_{-t} - \Gamma_t) w(x,t) + (\Gamma_{-t} + \Gamma_t)(d/dt) w(x,t) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

где $S^{-1}(t)$ – оператор, обратный оператору $S^1(t)$.

Рассмотрим первый элемент вектора (9) как функцию

$$M(x,t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} (\Gamma_{-t} + \Gamma_t) w(x,t) + (\Gamma_{-t} - \Gamma_t) \frac{\partial}{\partial t} w(x,t) \right).$$

Для всех $g_{j,i}^{n,K}(t) \in V_{p,q}^r$ имеем

$$\int_0^t S(-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sum_{j=1}^n \delta\left(x - x_j\right) \sum_{i=1}^K g_{j,i}^{n,K}(\tau) d\tau = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \left(\Gamma_{\frac{\pi j}{n}} - \Gamma_{-\frac{\pi j}{n}} \right) \partial^{-1} EE \left(\sum_{i=1}^K g_{j,i}^{n,K} \right)(x) \\ \sum_{j=1}^n \left(\Gamma_{\frac{\pi j}{n}} - \Gamma_{-\frac{\pi j}{n}} \right) OE \left(\sum_{i=1}^K g_{j,i}^{n,K} \right)(x) \end{bmatrix},$$

где $\partial^{-1} f(x)$ – первообразная функции $f(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, K$.

Построение управления осуществим с помощью следующей процедуры: разобьём промежуток $[0, \pi]$ на n равных интервалов, а промежуток $[0, \pi]$ – на K равных интервалов. Тогда функцию $M(x, t)$ естественно записать в виде суммы nK финитных функций $m_{j,i}^{n,K}(x,t)$ двух переменных, т. е.

$$M(x,t) = \sum_{j,i=1}^{n,\ K} m_{j,i}^{n,K}(x,t), \qquad n \in N, \quad K \in N.$$

В качестве финитных функций можно рассматривать атомарные функции одной переменной [10]. При этом выполняется условие

$$\begin{cases} m_{1,i}^{n,K}(x,t) = m_{j,i}^{n,K}\left(\dfrac{\pi j}{n} - x, t \right); \\ m_{j,1}^{n,K}\left(x,t\right) = m_{j,i}^{n,K}\left(x, \dfrac{Ti}{K} - t \right); \end{cases} \qquad j = 1,2,\ldots,n, \quad n \in N, \quad i = 1,2,\ldots,K, \quad K \in N,$$

Для каждого участка $\left[\dfrac{\pi(j-1)}{n}, \dfrac{\pi j}{n} \right] \times \left[\dfrac{T(i-1)}{K}, \dfrac{Ti}{K} \right]$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, $i = 1, 2, \ldots, K$ составим разностные уравнения. Для совокупности рассматриваемых участков, для разных j и i можем построить соответствующие системы разностных уравнений

$$\begin{cases} g_{1,1}^{n,K}\left(x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{K}\right)+g_{2,1}^{n,K}\left(-x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{K}\right)+g_{1,2}^{n,K}\left(-x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{K}\right)+g_{2,2}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{K}\right)=m_{1,1}^{n,K}\left(x,t+\frac{T}{K}\right),\\ -g_{1,p}^{n,K}\left(-x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{K}\right)-g_{2,p}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{K}\right)+g_{1,p+2}^{n,K}\left(-x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{K}\right)+g_{2,p+2}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{K}\right)=m_{1,p+1}^{n,K}\left(x,t+\frac{T}{K}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} -g_{l,1}^{n,K}\left(-x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{K}\right)+g_{l+2,1}^{n,K}\left(-x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{K}\right)-g_{l,2}^{n,K}\left(x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{K}\right)+g_{l+2,2}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{K}\right)=m_{l+1,1}^{n,K}\left(x,t+\frac{T}{K}\right),\\ g_{l,p}^{n,K}\left(x-\frac{\pi}{n}-\frac{T}{K}\right)-g_{l+2,p}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}-\frac{T}{K}\right)-g_{l,p+2}^{n,K}\left(x-\frac{\pi}{n}+\frac{T}{K}\right)+g_{l+2,p+2}^{n,K}\left(x+\frac{\pi}{n}+\frac{T}{K}\right)=m_{l+1,p+1}^{n,K}\left(x,t+\frac{T}{K}\right), \end{cases}$$

$l=1,2,\ldots,j-1,\quad j=1,2,\ldots,n-1,\quad p=1,2,\ldots,i-1,\quad i=2,\ldots,K-1,$

Решением этих систем приводит к построению управлений на каждом из участков

$$g_{2j,2i}^{n,K}(t)=-g_{2j,1}^{n,K}\left[-t-(2i-2)\frac{T}{K}\right]+\sum_{l=1}^{i}g_{1,\,2i-2l+1}^{n,K}\left[-t-(2j-2)\frac{\pi}{n}-(2l-1)\frac{T}{K}\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{i}\sum_{i=1}^{j}m_{2j-2i+1,\,2i-2l+1}^{n,K}\left[x-(2i-1)\frac{\pi}{n},t-(2l-1)\frac{T}{K}\right],\qquad j=\overline{1,\left[\frac{n}{2}\right]},\quad i=\overline{1,\left[\frac{K}{2}\right]},$$

$$g_{2j+1,2i}^{n,K}(t)=-g_{2j+1,1}^{n,K}\left[-t-(2i-2)\frac{T}{K}\right]-\sum_{l=1}^{i}g_{1,\,2i-2l+1}^{n,K}\left[t-(2j-1)\frac{\pi}{n}-(2l-1)\frac{T}{K}\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{i}\sum_{i=1}^{j}m_{2j-2i+2,\,2i-2l+1}^{n,K}\left[x-(2i-1)\frac{\pi}{n},t-(2l-1)\frac{T}{K}\right],\qquad j=\overline{1,\left[\frac{n-1}{2}\right]},\quad i=\overline{1,\left[\frac{K}{2}\right]},$$

$$g_{2j,2i+1}^{n,K}(t)=g_{2j,1}^{n,K}\left[t-(2i-1)\frac{T}{K}\right]+\sum_{l=1}^{i}g_{1,\,2i-2l+2}^{n,K}\left[-t-(2j-2)\frac{\pi}{n}-(2l-1)\frac{T}{K}\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{i}\sum_{i=1}^{j}m_{2j-2i+1,\,2i-2l+2}^{n,K}\left[x-(2i-1)\frac{\pi}{n},t-(2l-1)\frac{T}{K}\right],\qquad j=\overline{1,\left[\frac{n}{2}\right]},\quad i=\overline{1,\left[\frac{K-1}{2}\right]},$$

$$g_{2j+1,2i+1}^{n,K}(t)=g_{2j+1,1}^{n,K}\left[t-(2i-1)\frac{T}{K}\right]-\sum_{l=1}^{i}g_{1,\,2i-2l+2}^{n,K}\left[t-(2j-1)\frac{\pi}{n}-(2l-1)\frac{T}{K}\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{i}\sum_{i=1}^{j}m_{2j-2i+2,\,2i-2l+2}^{n,K}\left[x-(2i-1)\frac{\pi}{n},t-(2l-1)\frac{T}{K}\right],\qquad j=\overline{1,\left[\frac{n-1}{2}\right]},\quad i=\overline{1,\left[\frac{K-1}{2}\right]},$$

где $m_{j,i}^{n,K}(x,t)=M(x,t)\left[H\left(x-\frac{\pi(j-1)}{n}\right)-H\left(x-\frac{\pi j}{n}\right)\right]\left[H\left(t-\frac{T(i-1)}{K}\right)-H\left(t-\frac{Ti}{K}\right)\right].$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, $i = 1, 2, \ldots, K-1$.

Управления $g_j^n(t)=\sum_{i=1}^{K}g_{j,i}^{n,K}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ в краевой задаче (1)–(4) позволяют решать задачу приближённой управляемости за время $T \geq \pi$.

Выводы

Рассмотренная в статье задача может в дальнейшем послужить основой для решения задач управления волновыми уравнениями более высоких размерностей, описывающих волновые процессы, происходящие в машиностроительных конструкциях. Отметим, что управления, решающие рассматриваемую в статье задачу, получены в явном виде. Поставлены задачи определения необходимых и достаточных условий приближённой (аппроксимативной) управляемости и 0-управляемости.

Литература

1. *Ильин, В. А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщённого решения волнового уравнения с конечной энергией / В. А. Ильин // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1513–1528.
2. *Ильин, В. А.* Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закреплённом втором конце в терминах обобщённого решения волнового уравнения с конечной энергией / В. А. Ильин // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 12. – С. 1670–1685.
3. *Моисеев, Е. И.* Оптимизация граничного управления смещением или упругой силой на одном конце струны за произвольно достаточно большое время / Е. И. Моисеев, В. А. Ильин // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 3. – С. 6–17.
4. *Моисеев, Е. И.* Оптимизация управления на двух концах струны упругими граничными силами за любой достаточно большой промежуток времени / Е. И. Моисеев, В. А. Ильин // Дифференц. уравнения – 2008. – Т. 44, № 1. – С. 89–100.
5. *Холомеева, А. А.* Оптимальное граничное управление колебаниями струны с модельным нелокальным граничным условием одного из двух типов / А. А. Холомеева // Докл. РАН. – 2011. – Т. 437, № 2. – С. 164–167.
6. *Zuazua, E.* Controllability of Partial Differential Equations / E. Zuazua. – Madrid: Universidad Autonoma, 2002. − 311 p.
7. *Sklyar, G. M.* The Markov power moment problem in problems of controllability and frequency extinguishing for the wave equation on a half-axis / G. M. Sklyar, L. V. Fardigola // J. Math. Anal. Appl. – 2002. − Vol. 276, № 1. − P. 109–134.
8. *Фардигола, Л. В.* Проблеми керованості для рівняння струни / Л. В. Фардигола, К. С. Халіна // Укр. мат. журн. − 2007. − Т. 59, № 7. − С. 939−952.
9. *Терёхин, А. П.* Функции ограниченной q-интегральной p-вариации и теоремы вложения / А. П. Терёхин // Мат. сб. – 1972. – Т. 88, № 2. – С. 277–286.
10. *Колодяжный, В. М.* Атомарные функции: Обобщения на случай многих переменных и перспективные направления практических приложений / В. М. Колодяжный, В. А. Рвачёв // Кибернетика и систем. анализ. – 2007. – № 6. – С. 155–177.

Поступила в редакцию 01.11.15