

<sup>1,2</sup> Ю. М. Мацевитый, академик НАН Украины

<sup>1</sup> Н. А. Сафонов, канд. физ.-мат. наук  
<sup>1</sup> В. В. Ганчин

<sup>1</sup> Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков,  
e-mail: matsevit@ipmach.kharkov.ua

<sup>2</sup> Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

УДК 536.24

## К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

*Для отримання стійкого розв'язку нелінійної оберненої граничної задачі теплопровідності застосовується метод регуляризації А. М. Тихонова з ефективним алгоритмом регуляризованого пошуку параметра. Шуканий тепловий потік на границі по часовій координаті апроксимуємо сплайнами Шьонберга першого ступеня. Для застосування методу функцій впливу до нелінійної задачі теплопровідності приводимо її до послідовності лінійних обернених граничних задач. Проведені численні обчислювальні експерименти з використанням стабілізуючих функціоналів нульового та першого порядку, а також аналіз впливу величини дисперсії випадкової похибки вимірювання на отриманий розв'язок. У результаті обчислювального експерименту з'ясувалося, що для даного класу задач регуляризація першого порядку виявилася більш ефективною, ніж регуляризація нульового порядку.*

**Ключові слова:** обернена гранична задача теплопровідності, метод зважених похибок у формі Гальоркіна, тепловий потік, принцип суперпозиції, метод регуляризації А. М. Тихонова, функціонал, стабілізатор, параметр регуляризації, ідентифікація, апроксимація, сплайн Шьонберга першого ступеня.

### Введение

В данной статье нелинейная обратная граничная задача теплопроводности рассматривается как задача определения устойчивого решения в заданной области и в заданном промежутке времени по данным измерений температур в одной или нескольких его внутренних точках. Разработанные авторами алгоритмы позволяют получать устойчивые решения вне зависимости от внешних параметров, хотя на точность получаемого решения влияют многие факторы. Первым и основным фактором из них является величина дисперсии случайной погрешности измерения температуры, вторым – дискретность по времени измерений температуры и количество этих измерений. К другим факторам относятся: погрешность в определении места расположения температурного датчика и физические размеры самого датчика; погрешность в задании теплофизических свойств материалов; уровень заглупления температурного датчика от поверхности, на которой идентифицируется искомая функция, и т. д.

Условия корректности для некоторого операторного уравнения  $A(u) = F$ , которое устанавливает причинно-следственную связь между характеристиками исследуемой системы и ее состоянием, было введено Ж. Адамаром в работах [1, 2]. В общих чертах корректность математической постановки заключалась в том, что решение операторного уравнения существует, оно единственное, а также непрерывно зависит от правой части операторного уравнения, т. е. решение устойчиво.

В данной работе рассматривается граничная обратная задача теплопроводности (ОЗТ), которая может быть формализована следующим образом:

$$A[Q(t)] = T,$$

где  $Q$  – искомый тепловой поток на границе;  $T$  – переменная состояния процесса, которая имеет вид  $T = T(t, l)$  и в большинстве случаев известна из эксперимента (исходные данные);  $t$  – время;  $A$  – оператор, который связывает искомый тепловой поток  $Q$  с исходными данными  $T$ . Такая задача, как и любая ОЗТ ввиду нарушения причинно-следственной связи, является некорректно поставленной задачей по Адамару. Это влечёт за собой, как правило, неустойчивость получаемого решения, т. е. когда при небольших изменениях исходных данных получают сильно отличающиеся решения, которые могут неоднозначно характеризовать исследуемый физический процесс, как, например, нагревание тела в определенные моменты времени, в то время как на самом деле тело охлаждается.

При решении такой некорректной задачи необходимо либо свести ее к условно-корректной, либо оставить некорректной, но использовать один из методов регуляризации [3–7]. В данной статье применяется метод регуляризации А. Н. Тихонова [7] с поиском регуляризирующего параметра.

**Регуляризирующий алгоритм решения нелинейной обратной задачи теплопроводности**

Рассмотрим следующую обратную граничную задачу для нелинейного уравнения теплопроводности:

$$c(T)\rho(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x < d, \quad t > 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} = Q(t), \quad x = d, \quad t > 0 \tag{3}$$

и начальным условием

$$T(0, x) = T_0(x), \quad 0 < x < d, \tag{4}$$

где  $T(t, x)$  – температура;  $T_0(x)$  – начальная температура;  $t$  – время;  $x$  – пространственная координата;  $\lambda(T)$  – коэффициент теплопроводности;  $c$  – удельная теплоёмкость;  $\rho$  – плотность. Необходимо определить тепловой поток  $Q(t)$ . В обратной задаче теплопроводности (1)–(4) в одной точке термометрирования  $x = l$ , которая может располагаться как внутри области, так и на границе, в определённые моменты времени  $t_i^e = ih_i^e$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $h_i^e = \frac{\tau}{m}$ , где  $\tau$  – конечное время процесса,  $m + 1$  – количество

точек термометрирования по временной координате, задана температура  $T_i^e$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  с погрешностью, которая характеризуется случайной величиной, распределённой по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\delta^2$  [8]

$$R[T(t_i^e, l)] = T_i^e, \quad i = 0, 1, \dots, m. \tag{5}$$

Для решения нелинейной обратной задачи (1)–(5) методом функций влияния [4] проведём её линеаризацию следующим образом:

$$c(T_{s-1})\rho(T_{s-1}) \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T_{s-1}) \frac{\partial T_s}{\partial x} \right), \quad 0 < x < d, \quad t > 0, \tag{6}$$

$$\lambda(T_{s-1}) \frac{\partial T_s}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad t > 0, \tag{7}$$

$$-\lambda(T_{s-1}) \frac{\partial T_s}{\partial x} = Q_s(t), \quad x = d, \quad t > 0, \tag{8}$$

$$T_s(0, x) = T_0(x), \quad 0 < x < d, \tag{9}$$

$$R[T_s(t_i^e, l)] = T_i^e, \quad i = 0, 1, \dots, m. \tag{10}$$

Здесь и везде далее в статье индекс  $s$  – номер итерации.

Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова построения аналитического решения линейной обратной задачи (6)–(10) сводится к минимизации функционала [7]

$$J = \int_0^\tau [T_s(t, l) - T^e(t, l)]^2 dt + \alpha_s \Omega[Q_s], \tag{11}$$

где  $\alpha_s$  – параметр регуляризации;  $\Omega[Q_s]$  – стабилизирующий функционал;  $T_s(t, l)$ ,  $T^e(t, l)$  – моделируемая температура и температура из теплофизического эксперимента соответственно в точке термометрирования в интервале времени  $(0, \tau)$ .

Следуя принципу суперпозиции, представим функцию  $T_s(t, l)$  в виде суммы

$$T_s(t, x) = \bar{T}_s(t, x) + \sum_{k=0}^{n_t} q_{s,k} W_{s,k}(t, x), \quad (12)$$

где  $q_{s,k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n_t$  – постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Тогда краевая задача (6)–(9) распадается на несколько краевых: задачу по определению температурного поля  $\bar{T}_s(t, x)$ , возбуждаемого начальным значением  $T_0(x)$  исходной задачи

$$c(T_{s-1})\rho(T_{s-1}) \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T_{s-1}) \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial x} \right), \quad 0 < x < d, \quad t > 0, \quad (13)$$

$$\lambda(T_{s-1}) \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (14)$$

$$-\lambda(T_{s-1}) \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial x} = 0, \quad x = d, \quad t > 0, \quad (15)$$

$$\bar{T}_s(0, x) = T_0(x), \quad 0 < x < d \quad (16)$$

и  $n_t + 1$  краевых задач для тепловых полей или функций влияния  $W_{s,k}(t, x)$  [4]

$$c(T_{s-1})\rho(T_{s-1}) \frac{\partial W_{s,k}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T_{s-1}) \frac{\partial W_{s,k}}{\partial x} \right), \quad 0 < x < d, \quad t > 0, \quad (17)$$

$$\lambda(T_{s-1}) \frac{\partial W_{s,k}}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (18)$$

$$-\lambda(T_{s-1}) \frac{\partial W_{s,k}}{\partial x} = \varphi_k, \quad x = d, \quad t > 0, \quad (19)$$

$$W_{s,k}(0, x) = 0, \quad 0 < x < d, \quad (20)$$

с учётом того, что

$$Q_s = \sum_{k=0}^{n_t} q_{s,k} \varphi_k, \quad (21)$$

где  $\varphi_k$  – сплайны Шёнберга первой степени, определённые на равномерной сетке

$$\omega_t = \left\{ t_i : t_i = ih_t, \quad i = 0, 1, \dots, n_t, \quad h_t = \frac{\tau}{n_t}, \quad n_t \in N \right\}. \quad (22)$$

Подставив в функционал (11) функции (12) и (21), получим

$$J_s = \int_0^\tau \left[ \bar{T}_s(t, l) + \sum_{k=0}^{n_t} q_{s,k} W_{s,k}(t, l) - T^e(t) \right]^2 dt + \alpha_s \int_0^\tau \left[ \sum_{k=0}^{n_t} q_{s,k} \varphi_k(t) \right]^2 dt. \quad (23)$$

Здесь стабилизирующий функционал представляет собой квадрат сплайн-аппроксимации теплового потока на границе. Продифференцировав (23) по  $q_{s,j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n_t$  и приравняв производные к нулю, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_s}{\partial q_{s,j}} \equiv & \int_0^\tau \left[ \bar{T}_s(t, l) + \sum_{i=0}^{n_t} q_{s,i} W_{s,i}(t, l) - T^e(t) \right] W_{s,j}(t, l) dt + \\ & + \alpha_s \int_0^\tau \sum_{i=0}^{n_t} q_{s,i} \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n_t, \quad s = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Окончательно система линейных алгебраических уравнений (24) примет следующий вид:

$$\sum_{i=0}^{n_t} q_{s,i} \left\{ \int_0^{\tau} W_{s,i}(t,l) W_{s,j}(t,l) dt + \alpha_s \int_0^{\tau} \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt \right\} = \int_0^{\tau} [T^e(t) - \bar{T}_s(t,l)] W_{s,j}(t,l) dt, \quad j = 0, 1, \dots, n_t, \quad (25)$$

Введя обозначения

$$a_{ij}^s = \int_0^{\tau} W_{s,i}(t,l) W_{s,j}(t,l) dt, \quad b_{ij} = \int_0^{\tau} \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt, \quad c_j^s = \int_0^{\tau} [T^e(t) - \bar{T}_s(t,l)] W_{s,j}(t,l) dt, \quad (26)$$

получим систему (25) в виде  $\sum_{i=0}^{n_t} q_{s,i} (a_{ij}^s + \alpha_s b_{ij}) = c_j^s, \quad j = 0, 1, \dots, n_t, \quad s = 1, 2, 3, \dots$  или в матричной записи  $(A_s + \alpha_s B) Q_s = C_s$ , где элементы матриц  $A_s, B$  и вектора  $C_s$  определены в (26). Поскольку в результате теплофизического эксперимента температура  $T_i^e, \quad i = 0, 1, \dots, m$  задана в отдельные моменты времени, интегралы  $c_j^s, \quad j = 0, 1, \dots, n_t$  (26) могут быть вычислены приближённо. Для этого можно использовать различные формулы численного интегрирования (методы прямоугольников, трапеций, Симпсона и др.). В случае использования формулы прямоугольников эти интегралы примут следующий вид:

$$c_j^s = \sum_{k=1}^m [T_k^e - \bar{T}_s(t_k^e)] W_{s,j}(t_k^e), \quad j = 0, 1, \dots, n_t. \quad (27)$$

На элементы матрицы  $A_s$  ограничение в виде количества точек измерения не распространяется, ибо получить численное решение краевых задач теплопроводности (17)–(20) и (13)–(16) можно в любом количестве точек (моментов времени  $t_k, \quad k = 1, 2, \dots, M$ )

$$a_{ij}^s = \sum_{k=1}^M W_{s,i}(t_k, l) W_{s,j}(t_k, l), \quad i, j = 0, 1, \dots, n_t. \quad (28)$$

Для решения краевых задач (17)–(20) запишем производную по времени в виде разностного отношения  $\frac{\partial W_{s,i}^{l+1}}{\partial t} \approx \frac{W_{s,i}^{l+1} - W_{s,i}^l}{\Delta t}$  на сетке  $t_{l+1} = t_l + \Delta t, \quad l = 0, 1, \dots, m_t - 1, \quad \Delta t = \frac{\tau}{m_t}, \quad m_t \in N$ . Тогда получим последовательность стационарных краевых задач вида

$$\begin{aligned} -\sigma \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T_{s-1}) \frac{\partial W_{s,i}^{l+1}}{\partial x} \right) + \frac{c(T_{s-1}) \rho(T_{s-1})}{\Delta t} W_{s,i}^{l+1} = \\ = (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T_{s-1}) \frac{\partial W_{s,i}^l}{\partial x} \right) + \frac{c(T_{s-1}) \rho(T_{s-1})}{\Delta t} W_{s,i}^l, \quad 0 < x < d, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\lambda(T_{s-1}) \frac{\partial W_{s,i}^{l+1}}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad (30)$$

$$-\lambda(T_{s-1}) \frac{\partial W_{s,i}^{l+1}}{\partial x} = \varphi_k, \quad x = d, \quad (31)$$

где  $k = 0, 1, \dots, n_t, \quad \sigma$  – параметр метода,  $0 < \sigma < 1$ .

Представим функцию  $W_{s,i}^{l+1}$  в виде линейной комбинации

$$W_{s,i}^{l+1} = \sum_{p=0}^n C_{s,i,p}^{l+1} \Psi_p. \quad (32)$$

Здесь  $\psi_p, p = 0, 1, \dots, n$  – сплайны Шёнберга первой степени, определённые на пространственной регулярной сетке  $\omega_x = \left\{ x_i : x_i = ih_x, i = 0, 1, \dots, n, h_x = \frac{d}{n}, n \in N \right\}$ ,  $C_{s,i,p}^l, p = 0, 1, \dots, n, i = 0, 1, \dots, n_t, l = 1, 2, \dots, m$  – постоянные коэффициенты, подлежащие вычислению.

Используя метод взвешенных невязок в форме Галёркина [9] и интегрирование по частям, представим краевую задачу (29)–(31) в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} & \sigma \int_0^d \lambda(T_{s-1}) \frac{\partial W_{s,i}^{l+1}}{\partial x} \psi_q dx + \sigma \varphi_k^{l+1} \psi_q \Big|_{x=d} + \frac{c(T_{s-1})\rho(T_{s-1})}{\Delta t} \int_0^d W_{s,i}^{l+1} \psi_q dx = \\ & = -(1-\sigma) \int_0^d \lambda(T_{s-1}) \frac{\partial W_{s,i}^l}{\partial x} \psi_q dx - (1-\sigma) \varphi_k^l \psi_q \Big|_{x=d} + \frac{c(T_{s-1})\rho(T_{s-1})}{\Delta t} \int_0^d W_{s,i}^l \psi_q dx, \quad q = \overline{0, n}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$k = 0, 1, \dots, n_t, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

После подстановки (32) в (33) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^n C_{s,i,p}^{l+1} \left\{ \sigma \int_0^d \lambda(T_{s-1}) \psi_p' \psi_q' dx + \frac{c(T_{s-1})\rho(T_{s-1})}{\Delta t} \int_0^d T_{s,i}^{l+1} \psi_q' dx + \sigma \varphi_k^{l+1} \psi_q \Big|_{x=d} \right\} = -(1-\sigma) \int_0^d \lambda(T_{s-1}) \frac{\partial W_{s,i}^l}{\partial x} \psi_q' dx + \\ & + \frac{c(T_{s-1})\rho(T_{s-1})}{\Delta t} \int_0^d W_{s,i}^l \psi_q' dx - (1-\sigma) \varphi_k^l \psi_q \Big|_{x=d}, \quad q = 0, 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, n_t, \quad s = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Результаты решения этой системы с использованием выражений (27) и (28) позволяют вычислить элементы вектора  $C_s$  и матрицы  $A_s$ . Что касается элементов матрицы  $B$ , то их можно определить следующим образом.

На сетке (22) имеем

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \int_0^{\tau} \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \frac{h_t}{6}, \quad i \neq j, & b_{ii} &= \int_0^{\tau} \varphi_i(t) \varphi_i(t) dt = \frac{2h_t}{3}, & i &= j \neq 0 \neq n_t, \\ & & & & & ; \\ b_{00} &= \int_0^{\tau} \varphi_0^2(t) dt = \frac{h_t}{3}, & b_{n_t n_t} &= \int_0^{\tau} \varphi_{n_t}^2(t) dt = \frac{h_t}{3}. \end{aligned}$$

Выше при построении стабилизатора  $\Omega[Q_s]$  использовалась аппроксимирующая функция потока (21). Приведём форму стабилизатора  $\Omega[Q_s]$  с использованием ещё и производной по времени от этой функции [3]

$$\Omega[Q_s] = \int_0^{\tau} \left[ \sum_{i=0}^{n_t} q_{s,i} \frac{d\varphi_i(t)}{dt} \right]^2 dt.$$

Тогда элементы матрицы  $B$  будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \int_0^{\tau} \frac{d\varphi_i}{dt} \frac{d\varphi_j}{dt} dt = -\frac{1}{h_t}, \quad i \neq j, & b_{ii} &= \int_0^{\tau} \left[ \frac{d\varphi_i}{dt} \right]^2 dt = \frac{2}{h_t}, & i &= j \neq 0 \neq n_t, \\ & & & & & ; \\ b_{00} &= \int_0^{\tau} \left[ \frac{d\varphi_0}{dt} \right]^2 dt = \frac{1}{h_t}, & b_{n_t n_t} &= \int_0^{\tau} \left[ \frac{d\varphi_{n_t}}{dt} \right]^2 dt = \frac{1}{h_t}. \end{aligned}$$

### Вычислительный эксперимент

Рассмотрим модельную одномерную нестационарную линейную обратную задачу теплопроводности для пластины, теплопроводность и теплоёмкость материала которой не зависят от температуры ( $\lambda = 30$  Вт/(м·К),  $c\rho = 3,6 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·К)). Толщина пластины  $d = 1$  м. Начальная температура пластины  $T_0 = 370$  К (4). Для вычисления теплового потока на границе  $x = d$  необходимо иметь зна-

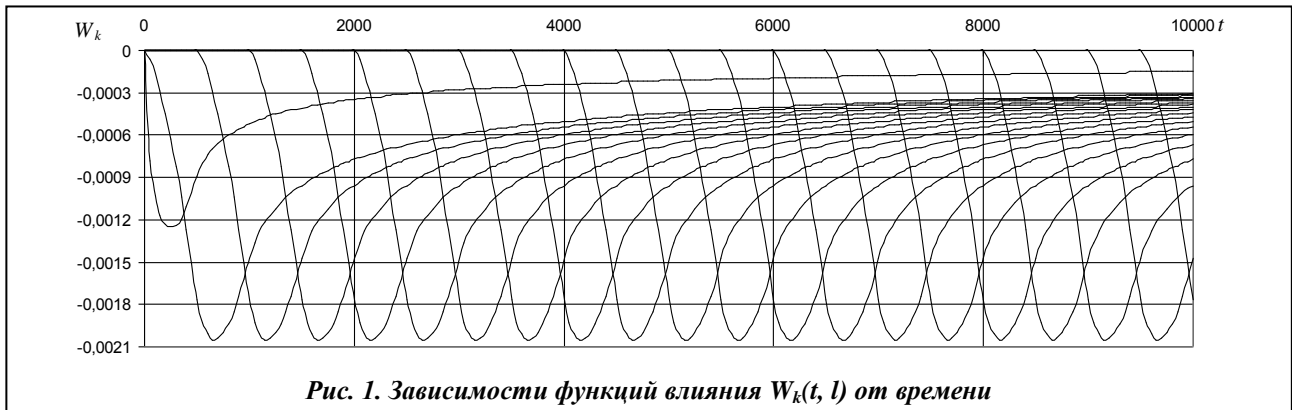


Рис. 1. Зависимости функций влияния  $W_k(t, l)$  от времени

чения температуры в одной или нескольких точках внутри пластины. При решении модельных (тестовых) задач эти данные можно получить из аналитических решений прямой задачи либо с использованием методов конечных разностей или конечных элементов в сочетании с методом функций влияния при известных граничных условиях [10]. Полученные данные из решения ПЗТ используются для решения обратной задачи.

Для решения ПЗТ на границе тела  $x = d$  представим тепловой поток  $Q(t)$  в виде  $\alpha_k(T - T_{cp})$ , где коэффициент теплоотдачи  $\alpha_k = 60 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  и температура среды  $T_{cp} = 270 \text{ К}$  при тепловой изоляции  $\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} = 0$  на второй границе.

На рис. 1 приведены графики функций влияния  $W_k(t, l)$  для  $k = 0, \dots, 20$  как решения соответствующих краевых задач (17)–(20) (индекс  $s$  опускаем в силу линейности задачи). Каждая кривая соответствует значению индекса  $k$  от 0 до 20 слева направо соответственно. Приведенные кривые представляют собой множество функций на временном интервале  $[0, \infty)$ , линейная комбинация которых (12) аппроксимирует функцию температуры во времени в точке термометрирования  $x = l$ . Анализируя приведенные на рис. 1 кривые, можно заметить, что графики функций влияния  $W_k(t, l)$  для  $k = 1, 2, \dots, n_t - 1$  повторяются и смещаются относительно друг друга

$$W_{k+1}(d, t) = W_1(d, t - kh_t), \quad k = 0, 1, \dots, n_t - 2. \tag{34}$$

Этот же факт наблюдается и при анализе численных решений краевых задач теплопроводности (17)–(20) при различных потоках  $\varphi_i(t)$ ,  $k = 1, \dots, 19$ . Поэтому для вычисления функций влияния  $W_k(t, l)$  достаточно решить только три краевые задачи (17)–(20) для  $k = 0, 1, n_t$ , а остальные функции получить при помощи операции сдвига (34).

Относительно функций влияния  $W_k(t, l)$  сформулируем следующую теорему.

**Теорема 1.** Функции влияния  $W_k(t, l)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n_t$ , представляющие собой решения краевых задач теплопроводности (17)–(20), линейно независимы на временном интервале  $(0, \infty)$  при фиксированной пространственной переменной  $x$ .

**Доказательство.** Умножив дифференциальное уравнение теплопроводности (17), граничные условия (18), (19) и начальное значение (20) для каждого  $k$  на постоянный множитель  $q_k$  и затем сложив полученные результаты, получим

$$c(T_{s-1})\rho(T_{s-1}) \frac{\partial \sum_{k=0}^{n_t} q_k W_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T_{s-1}) \frac{\partial \sum_{k=0}^{n_t} q_k W_k}{\partial x} \right), \quad 0 < x < d, \quad t > 0, \tag{35}$$

$$\lambda(T_{s-1}) \frac{\partial \sum_{k=0}^{n_t} q_k W_k}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad t > 0, \tag{36}$$

$$-\lambda(T_{s-1}) \frac{\partial \sum_{k=0}^{n_t} q_k W_k}{\partial x} = \sum_{k=0}^{n_t} q_k \Phi_k, \quad x = d, \quad t > 0, \quad (37)$$

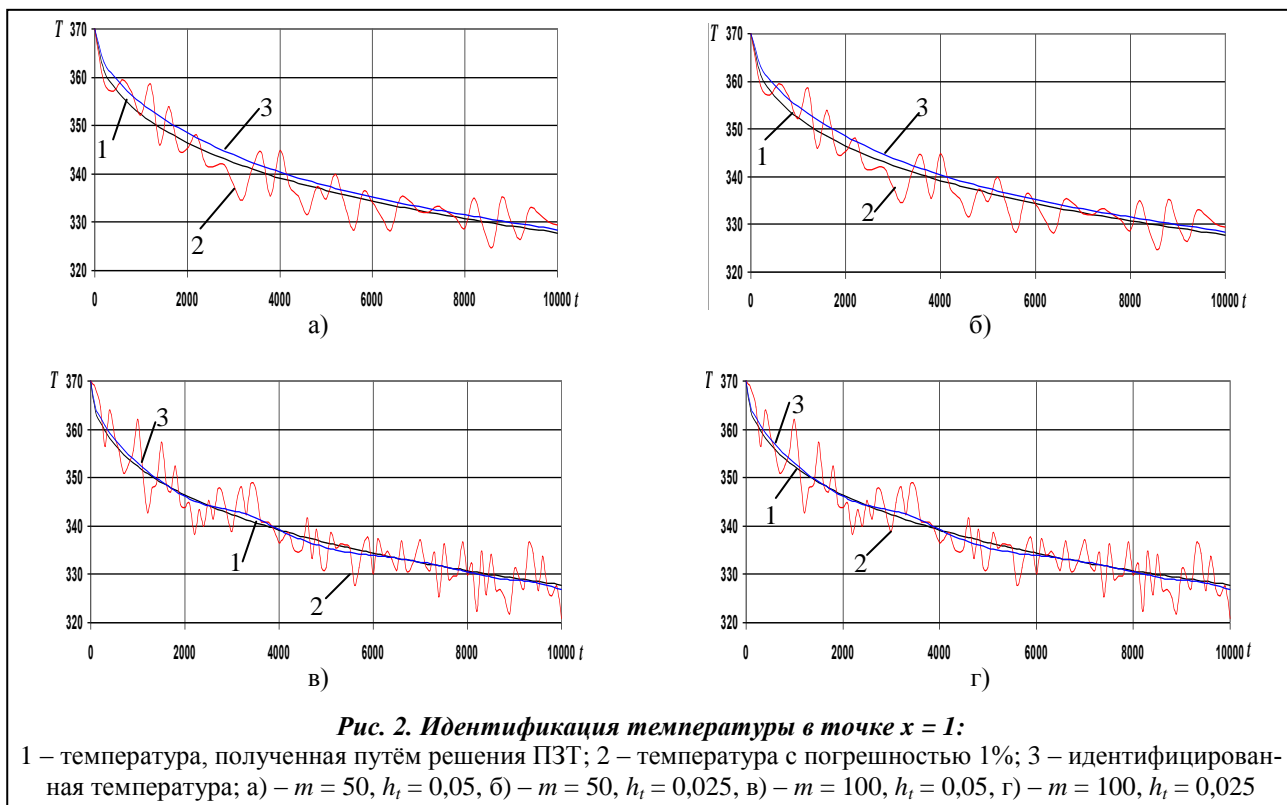
$$\sum_{k=0}^{n_t} q_k W_k(0, x) = 0, \quad 0 < x < d. \quad (38)$$

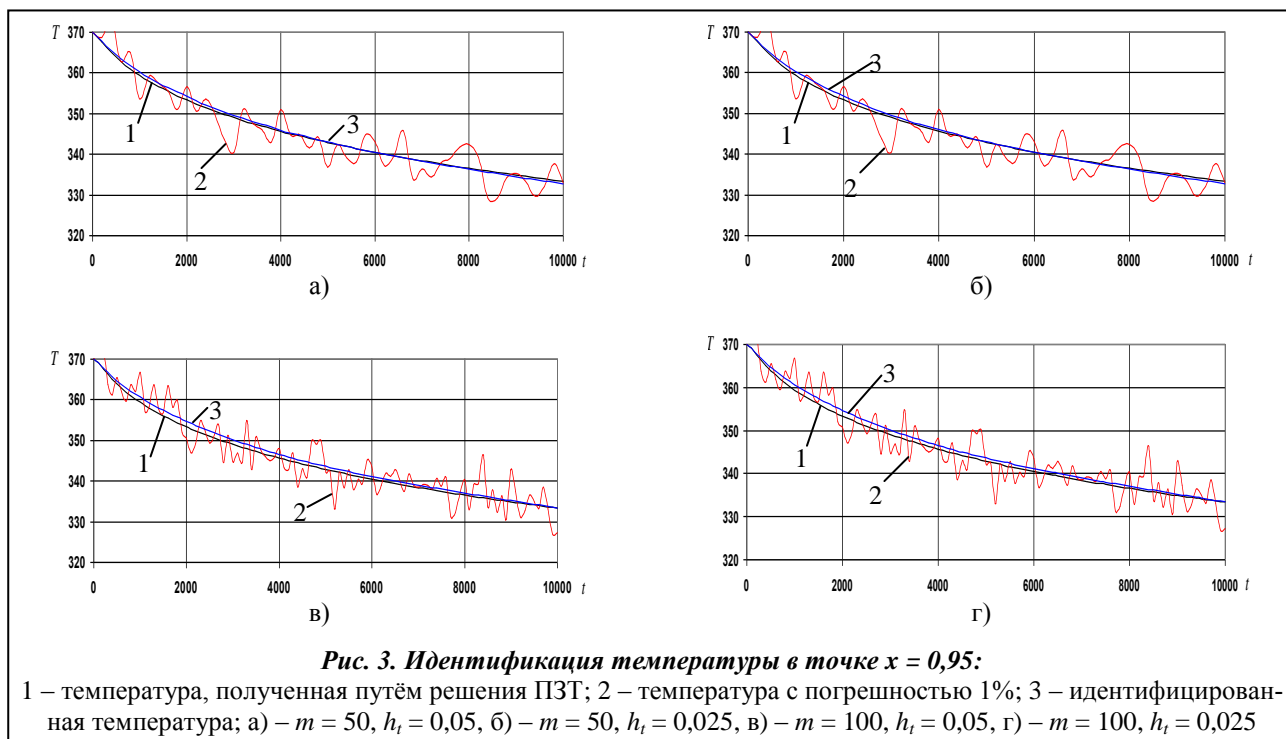
Сумма  $\sum_{k=0}^{n_t} q_{s,k} W_k$  в силу принципа суперпозиции является решением краевой задачи теплопроводности (35)–(38), и это решение равно нулю только в том случае, когда суммарный поток  $\sum_{k=0}^{n_t} q_k \Phi_k$  равен нулю. В силу того что сплайн-базис  $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{n_t}$  – линейно-независимый, данный поток равен нулю только при равенстве нулю всех коэффициентов  $q_k, k = 0, 1, \dots, n_t$ . Следовательно, система функций влияния  $W_k, k = 0, 1, \dots, n_t$  линейно независима.

Для того чтобы доказать следующую теорему, представим краевую задачу теплопроводности (6)–(9) с однородным начальным условием ( $T_0 = 0$ ) в операторном виде  $P : Q \rightarrow T$ , где линейный оператор  $P$  ставит в соответствие функции  $Q(t)$  (тепловой поток на границе  $x = d$ ) функцию  $T(t, x)$  как решение прямой задачи теплопроводности.

**Теорема 2.** Линейной комбинацией функций влияния  $\sum_{k=0}^{n_t} q_k W_k$  можно аппроксимировать решение краевой задачи (6)–(9) с любой точностью.

Доказательство. Пусть  $PQ = T$ . Тогда, исходя из (17)–(20), имеем последовательность прямых краевых задач в виде  $P\varphi_k = W_k, k = 0, 1, \dots, n_t$  (итерационный индекс  $s$  опущен). После умножения последнего равенства на  $q_k$  и суммирования по  $k$ , учитывая, что оператор  $P$  краевой задачи линеен,





имеем  $P \sum_{k=0}^{n_t} q_k \Phi_k = \sum_{k=0}^{n_t} q_k W_k$ . Далее после вычитания  $P \sum_{k=0}^{n_t} q_k \Phi_k - PQ = \sum_{k=0}^{n_t} q_k W_k - T$  получаем

$$P \left[ \sum_{k=0}^{n_t} q_k \Phi_k - Q \right] = \sum_{k=0}^{n_t} q_k W_k - T.$$

Если  $\left\| Q - \sum_{k=0}^{n_t} q_k \Phi_k \right\| < \varepsilon$ , где  $\| \cdot \|$  – обозначение нормы в энергетическом пространстве [11],

то  $\left\| \sum_{k=0}^{n_t} q_k W_k - T \right\| = \|P\| \left\| \sum_{k=0}^{n_t} q_k \Phi_k - Q \right\| < \varepsilon \|P\|$ , так как оператор краевой задачи (17)–(20) обладает конечной нормой.

На рис. 2, 3 представлены результаты идентификации температуры в точках  $x = 1$  и  $x = 0,95$  соответственно в зависимости от времени. Из них следует, что на точность идентификации более существенное влияние оказывает количество точек измерения температуры  $m$  по сравнению с шагом сетки  $h_t$  при сплайн-аппроксимации потока.

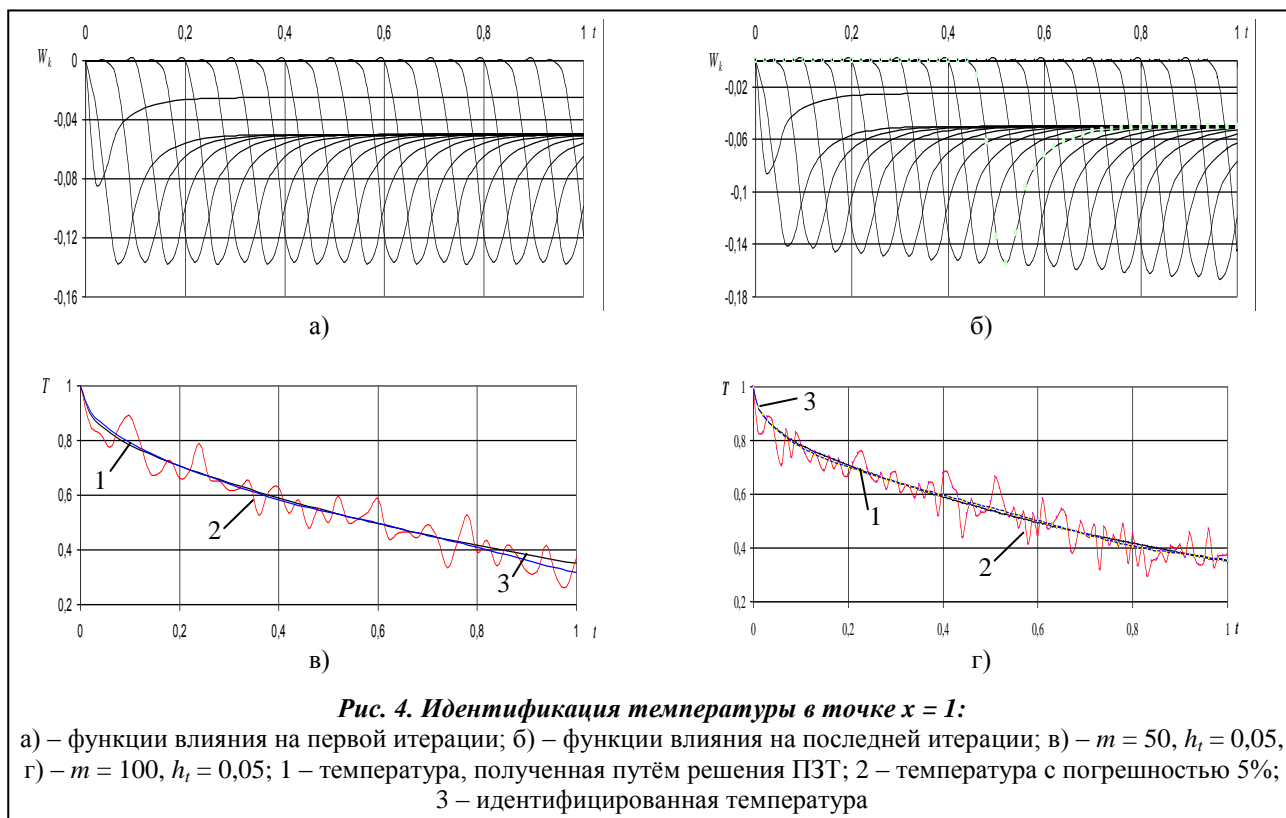
На рис. 4 представлены результаты решения модельной обратной задачи (1)–(5) с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры  $\lambda(T) = 1 + T$ , при следующих исходных данных:  $c_p = 1, Q(t) = T$ . Графики функций влияния  $W_k, k = 0, 1, \dots, 20$  для данного случая показаны на рис. 4 а, б. На рис. 4, а приведены зависимости функций влияния  $W_k(t), k = 0, 1, \dots, 20$ , полученные в результате решения прямых задач (17)–(20) на первой итерации ( $s = 1$ ), а на рис. 4, б – на последней.

На рис. 4, в, г показаны результаты идентификации температуры в точке  $x = 1$ . Из них следует, что при увеличении количества точек  $m$ , в которых задана экспериментальная температура, точность идентификации возрастает.

### Выводы

К достоинствам предлагаемого подхода к решению нелинейных ОЗТ можно отнести: простоту его реализации; возможность использования экспериментальной информации как от одного, так и от нескольких датчиков; применимость для неоднородных сред; возможность одновременного





восстановления теплового потока на разных частях поверхности конструктивного элемента; слабую чувствительность к погрешностям измерений.

### Литература

1. Hadamard, J. Sur les problems aux derivees partielles et leur significations physiques / J. Hadamard // Bull. Univ. Pricenton. – 1902. – № 13. – P. 82–88.
2. Hadamard, J. Le problem de Cauchy et les èquation aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris: Hermann, 1932. – 542 s.
3. Бек, Дж. Некорректные обратные задачи теплопроводности / Дж. Бек, Б. Блакуэлл, Ч. Сент-Клэр (мл.) – М.: Мир, 1989. – 312 с.
4. Мацевитый, Ю. М. Обратные задачи теплопроводности: В 2-х т. / Ю. М. Мацевитый. – Киев: Наук. думка, 2002–2003. Т. 1: Методология. – 408 с.; Т. 2: Приложения. – 392 с.
5. Коздоба, Л. А. Методы решения обратных задач теплопереноса / Л. А. Коздоба., П. Г. Круковский. – Киев: Наук. думка, 1982. – 360 с.
6. Алифанов, О. М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
7. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
8. Форсайт, Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
9. Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галёркина / К. Флетчер. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
10. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
11. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин – М.: Наука, 1970. – 512 с.

Поступила в редакцию 12.01.16