

¹ К. В. Аврамов*, д-р техн. наук
² Т. П. Раимбердиев**, д-р техн. наук
³ Е. М. Шехватова***

¹ Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков, e-mail: kvavr@kharkov.ua

² Международный Казахско-Турецкий университет имени Хаджи Ахмеда Ясави, Республика Казахстан, г. Туркестан

³ Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт»

Ключові слова: рівняння коливань балки з дихаючою тріщиною, метод Гальоркіна, динамічна модель зі скінченним числом ступенів вільності, метод багатьох масштабів, основний резонанс.

Введение

Методы неразрушающего контроля часто основываются на анализе динамического отклика. Более того, некоторые современные методы основаны на анализе нелинейных колебаний конструкции с трещиной [1]. Поэтому не удивительно, что предпринято много усилий для исследования колебаний конструкций с трещинами. В статье [2] исследуются колебания балок с двумя одинаковыми открытыми поперечными трещинами, которые располагаются с двух противоположных сторон балки. Шен и Пьер [3] для описания отклонения напряженно-деформируемого состояния конструкции от модели балки Эйлера–Бернулли ввели функции трещин и функции перемещений. В работах [4, 5] получена система с одной степенью свободы, описывающая колебания балки с поперечной трещиной. В статье [6] представлен подробный вывод уравнений в частных производных, описывающих движение балки с поперечной открытой трещиной.

В данной статье получена модель с произвольным числом степеней свободы, описывающая изгибные колебания балки с дышащей поперечной трещиной. Для вывода этой системы колебания балки раскладываются по формам собственных колебаний. Это разложение содержит параметр контакта. Рассматривается случай малой трещины. Показывается, что нелинейные колебания балки с малой трещиной описываются квазилинейной динамической системой. Эта динамическая система содержит внутренний резонанс. Анализ подвергается динамическая система с двумя и тремя степенями свободы. Вынужденные колебания в области второго основного резонанса исследуются с помощью метода многих масштабов. Показывается, что в области второго основного резонанса колебания являются субгармоническими.

1. Формулировка задачи и основные уравнения колебаний

Рассмотрим стержень, совершающий изгибные колебания. На расстоянии x_c от его левого конца стержня расположена вертикальная трещина глубиной a . Стержень шарнирно оперт и имеет прямоугольное поперечное сечение. Его материал изотропный и описывается законом Гука. Деформации и перемещения точек стержня малы. Поэтому связь между ними является линейной.

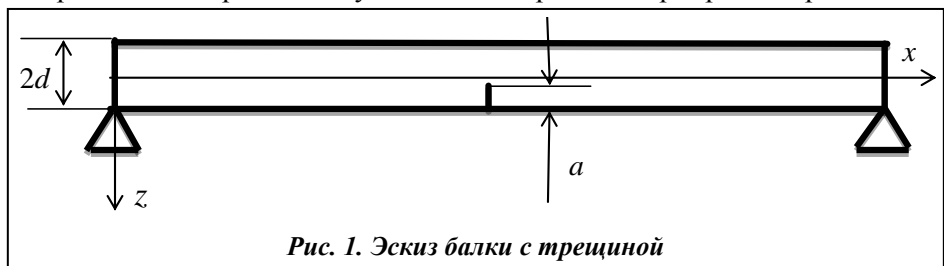


Рис. 1. Эскиз балки с трещиной

УДК 621.565

РЕЗОНАНСНЫЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ С ДЫШАЩЕЙ УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Для опису коливань балки з поперечною тріщиною отримана квазілінійна динамічна система зі скінченним числом ступенів вільності. Для отримання цієї системи розв'язок розкладався за формами лінійних коливань. Метод Гальоркіна використовувався до рівнянь з частинними похідними, які описують коливання балки з тріщиною. Аналізувались нелінійні динамічні системи з двома та трьома ступенями вільності, які мають внутрішні резонанси. В квазілінійній динамічній системі за допомогою методу багатьох масштабів досліджувались субгармонічні коливання в області другого основного резонансу.

Когда трещина закрыта, напряженно-деформируемое состояние (НДС) балки удовлетворяет гипотезам Эйлера–Бернулли. Если трещина открыта, около ее вершины наблюдаются значительные возмущения в НДС и изменяется положение нейтральной линии стержня. Возмущения в НДС около вершины трещины описываются функцией $f(x, z)$, а изменение в положении нейтральной оси – функцией перемещений $\varphi(x, z)$. Такой подход к моделированию динамического НДС стержней с трещиной рассматривается в статьях [2, 4]. При колебаниях стержня берега трещины смыкаются и размыкаются. Такие движения описываются нелинейной моделью колебаний балки. Ближайшей целью является получение модели колебаний стержня с трещиной. Для описания дышания трещины вводится параметр контакта γ . Если $\gamma = 1$, трещина открыта, а при $\gamma = 0$ трещина закрыта, что описывается так:

$$\gamma = \begin{cases} 1, & \varepsilon_{xx} > 0 \\ 0, & \varepsilon_{xx} < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где ε_{xx} – продольные деформации точек стержня. Напряжения и деформации в точках балки с трещиной имеют вид

$$\sigma_{xx}(x, z, t) = [-z + \gamma f(x, z)]T(x, t) \quad \varepsilon_{xx}(x, z, t) = [-z + \gamma f(x, z)]S(x, t), \quad (2)$$

где σ_{xx} – нормальные напряжения; $T(x, t)$, $S(x, t)$ – некоторые функции. Так как нейтральная линия балки изменяет свое местоположение вследствие трещины, то продольные перемещения $u(x, z, t)$ опишутся так: $u'(x, z, t) = (-z + \gamma \varphi(x, z))w''(x, t)$ где $u' = \partial u / \partial x$; $w(x, t)$ – поперечные перемещения. Вид функции трещин $f(x, z)$ и функции перемещений $\varphi(x, z)$ предложен в работе [4]. Для получения уравнений изгибных колебаний стержня используется вариационный принцип Васидзу. В результате его применения уравнение изгибных колебаний с дышащей трещиной принимает следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} & [I + \gamma(L_1 - K - K_1)]Q_1 w^{(IV)} + [2(I + \gamma[L_1 - K - K_1])]Q_1^I + \gamma(2L_3 + L_2 - K_2 + 2K^I)Q_1 w^{III} + \\ & [(I + \gamma[L_1 - K - K_1])Q_1^{II} + \gamma(2L_3 + L_2 - K_2 + 2K^I)Q_1^I + \gamma(L_4 + L_5 - K^{II})Q_1^{II}]w^{II} + \frac{\rho A}{E} \ddot{w} = \frac{F(x, t)}{E}, \end{aligned} \quad (3)$$

где E – модуль Юнга; ρ – плотность материала балки; A – площадь поперечного сечения; $F(x, t)$ – поперечная периодическая нагрузка, действующая на балку. Параметры модели (3)

$I, L_1, K, K_1, L_3, L_2, K_2, Q_1, L_4, L_5$ представлены в работах [6, 3]. В дальнейшем рассмотрим вынужденные колебания стержня под действием сосредоточенной силы: $F(x, t) = F_0 \delta(x - l_*) \cos(\Omega t)$, где l_* – значение координаты x приложения сосредоточенной силы; $\delta(\cdot)$ – дельта функция. Систему уравнений (3) представим в другой удобной для анализа форме

$$EI(BQ_1 w^{IV})'' - EI[(\gamma \bar{L}_2 - \gamma \bar{K}_2)Q_1 w^{IV}] + \rho A \ddot{w} = F(x, t), \quad (4)$$

где $Q_1 = \frac{1 + \gamma \bar{L}_1 - \gamma \bar{K}_1}{1 + \gamma \bar{L}}$; $B = 1 + \gamma \bar{L}_1 - \gamma \bar{K}_1$; $\bar{L}_j = L_j / I$; $\bar{K}_j = K_j / I$; $j = 1, 2$; $\bar{L} = L / I$.

Для получения уравнений колебаний балки с дышащей трещиной с конечным числом степеней свободы воспользуемся методом Бубнова–Галеркина. Тогда поперечные колебания стержня представим так:

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^N [\gamma C_j(x) + (1 - \gamma)W_j(x)] u_j(t), \quad (5)$$

где $u(t)$, $u_2(t)$, ... – обобщенные координаты системы; $W_j(x)$ – собственные формы колебаний неповрежденного стержня; $C_j(x)$ – собственные формы колебаний балки с трещиной. Итак, при $\gamma = 1$ колебания раскладываются по собственным формам стержня с трещиной, а при $\gamma = 0$ движение раскладывается по собственным формам балки без трещины.

Для исследования колебаний стержня с дышащей трещиной воспользуемся уравнениями движения (4). Поперечные перемещения стержня представим в виде разложения (5). В результате применения метода Бубнова–Галеркина получим нелинейную динамическую систему с конечным числом степеней свободы. Эту систему в матричной форме представим так:

$$\begin{cases} \mathbf{M}^{(UN)}\ddot{u} + \mathbf{D}\dot{u} + \mathbf{G}_{UN}^{(S)}u = \mathbf{f}^{(UN)} \cos(\Omega t); & G(u) < 0 \\ \mathbf{M}^{(C)}\ddot{u} + \mathbf{D}\dot{u} + \mathbf{G}_C^{(S)}u + \mathbf{G}_C^{(U)}u = \mathbf{f}^{(C)} \cos(\Omega t); & G(u) > 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $G(u) = \sum_{i=1}^N i^2 \sin(0,5i\pi)u_i$; $M_{ij}^{(UN)} = 0,5\rho AL\delta_{ij}$; $G_{UN,ij}^{(S)} = 0,5EI \frac{j^2 i^2 \pi^4}{L^3} \delta_{ji}$; $f_i^{(UN)} = F_0 W_i(l_*)$; $M_{ij}^{(C)} = \delta_{ij}\rho A \int_0^L C_i^2 dx$; $f_i^{(C)} = F_0 C_i(l_*)$; $Q_\gamma = Q_1|_{\gamma=1}$; $B_\gamma = B|_{\gamma=1}$. Слагаемое $\mathbf{D}\dot{u}$ описывает внутреннее трение в материале стержня.

Получена кусочно-линейная динамическая система (6) с N степенями свободы. Подчеркнем, что часть этой системы, которая описывает движение балки с закрытой трещиной, удовлетворяет условию $G(u) < 0$. В этом случае матрицы масс и жесткости системы $\mathbf{M}^{(UN)}$ и $\mathbf{G}_{UN}^{(S)}$ являются диагональными. Движения с открытой трещиной описываются системой (6) при $G(u) > 0$. В этом случае матрица масс системы $\mathbf{M}^{(C)}$ является диагональной, а матрица жесткости состоит из суммы симметричной $\mathbf{G}_C^{(S)}$ и несимметричной $\mathbf{G}_C^{(U)}$ матриц.

Приведем динамическую систему (6) к безразмерным переменным и параметрам с помощью соотношений

$$\begin{aligned} u_i &= \xi_i d; i=1, \dots, N; & \omega_1 t &= \tau; & \omega &= \frac{\Omega}{\omega_1}; & \mathbf{M}^{(UN)} &= 0,5\rho AL\bar{\mathbf{M}}^{(UN)}; & \mathbf{D} &= 0,5\rho AL\omega_1 \bar{\mathbf{D}}; \\ \mathbf{G}_{UN}^{(S)} &= 0,5\rho AL\omega_1^2 \bar{\mathbf{G}}_{UN}^{(S)}; & \mathbf{f}^{(UN)} &= 0,5\rho ALd\omega_1^2 \bar{\mathbf{f}}^{(UN)}; & \mathbf{M}^{(C)} &= 0,5\rho AL\bar{\mathbf{M}}^{(C)}; & & & & \\ \mathbf{G}_C^{(S)} &= 0,5\rho AL\omega_1^2 \bar{\mathbf{G}}_C^{(S)}; & \mathbf{G}_C^{(U)} &= 0,5\rho AL\omega_1^2 \bar{\mathbf{G}}_C^{(U)}; & \mathbf{f}^{(C)} &= 0,5\rho ALd\omega_1^2 \bar{\mathbf{f}}^{(C)}, & & & & \end{aligned} \quad (7)$$

где ω_1 – собственная частота изгибных колебаний неповрежденного стержня.

Теперь покажем, что при малых поперечных трещинах система (6) является квазилинейной. Условие малости трещины представим так: $a/d = \varepsilon\chi$, где $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Можно показать, что выполняется следующее матричное соотношение:

$$\bar{\mathbf{G}}_C^{(S)} = \bar{\mathbf{G}}_{UN}^{(S)} + \varepsilon\Delta\mathbf{G}_{UN}^{(S)} + O(\varepsilon^2). \quad (8)$$

Подчеркнем, что матрица $\Delta\mathbf{G}_{UN}^{(S)}$ является симметричной. Отметим, что выполняются следующие матричные соотношения:

$$\bar{\mathbf{G}}_C^{(U)} = \varepsilon\tilde{\mathbf{G}}_C^{(U)} + O(\varepsilon^2), \quad \bar{\mathbf{M}}^{(C)} = \bar{\mathbf{M}}^{(UN)} + \varepsilon\Delta\mathbf{M} + O(\varepsilon), \quad (9)$$

где $\Delta\mathbf{M}$ – диагональная матрица. Балка имеет малое демпфирование, что описывается матричным соотношением $\mathbf{D} = \varepsilon\tilde{\mathbf{D}}$. Рассмотрим случай малой сосредоточенной поперечной силы $\bar{\mathbf{f}}^{(UN)} = \varepsilon\tilde{\mathbf{f}}^{(UN)}$, $\bar{\mathbf{f}}^{(C)} = \varepsilon\tilde{\mathbf{f}}^{(C)}$. Тогда динамическую систему (6) представим так:

$$\bar{\mathbf{M}}^{(UN)}\xi'' + \bar{\mathbf{G}}_{UN}^{(S)}\xi = -\varepsilon\tilde{\mathbf{D}}\xi' + \varepsilon\tilde{\mathbf{f}}^{(UN)} \cos(\omega\tau) + \varepsilon H[\bar{G}(\xi)] \{-\Delta\mathbf{M}\xi'' - \Delta\mathbf{G}_{UN}^{(S)}\xi - \tilde{\mathbf{G}}_C^{(U)}\xi + (\tilde{\mathbf{f}}^{(C)} - \tilde{\mathbf{f}}^{(UN)})\cos(\omega\tau)\}, \quad (10)$$

где $H(x)$ – функция Хевесайда. Подчеркнем, что порождающая часть системы (10) является линейной. Она представлена в главных координатах.

2. Асимптотический анализ резонансных колебаний

Для исследования нелинейных колебаний оставим два слагаемых в разложении (5). Тогда нелинейная динамическая система (10) имеет две степени свободы. Функция $\bar{G}(\xi)$ этой системы принимает следующий вид: $\bar{G}(\xi) = \xi_1$. Отметим, что безразмерные собственные частоты порождающей линейной системы (10) $\bar{\omega}_j = j^2$ удовлетворяют условию внутреннего резонанса $4\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$. В дальнейшем рассмотрим вынужденные колебания конструкции в условиях второго основного резонанса

$$\omega = \bar{\omega}_2 + \varepsilon\sigma, \quad (11)$$

где σ – параметр расстройки. Для исследования нелинейной динамической системы (10) воспользуемся методом многих масштабов [7]. Введем временные масштабы $\tau_0 = \tau$, $\tau_1 = \varepsilon\tau$, Движение динамической системы (10) представим так: $\xi = \xi_0(\tau_0, \tau_1, \dots) + \varepsilon \bar{\xi}(\tau_0, \tau_1, \dots) + \dots$, где $\xi_0 = (\xi_{0,1}, \dots, \xi_{0,N})$, $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_N)$. В результате получим следующие системы уравнений в частных производных, которые в матричном виде таковы:

$$\mathbf{E} \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \tau_0^2} + \bar{\mathbf{G}}_{\text{UN}}^{(S)} \xi_0 = 0; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \tau_0^2} + \bar{\mathbf{G}}_{\text{UN}}^{(S)} \bar{\xi} = & -2\mathbf{E} \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \tau_0 \partial \tau_1} - \tilde{\mathbf{D}} \frac{\partial \xi_0}{\partial \tau_0} + \tilde{\mathbf{f}}^{(UN)} \cos(\omega_0 \tau_0) + \\ & + H(\xi_{0,1}) \left\{ -\Delta \mathbf{M} \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \tau_0^2} - \Delta \mathbf{G}_{\text{UN}}^{(S)} \xi_0 - \tilde{\mathbf{G}}_C^{(U)} \xi_0 + (\tilde{\mathbf{f}}^{(C)} - \tilde{\mathbf{f}}^{(UN)}) \cos(\omega_0 \tau_0) \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица; $\tilde{\mathbf{D}} = \text{diag}(d_1, d_2)$. Решение уравнений (12) представим так: $\xi_{0,j} = A_j(\tau_1) \exp(i \bar{\omega}_j \tau_0) + \bar{A}_j(\tau_1) \exp(-i \bar{\omega}_j \tau_0)$, где функция $\bar{A}_j(\tau_1)$ является комплексно-сопряженной к $A_j(\tau_1)$; i – мнимая единица. Введем следующую замену переменных: $A_j(\tau_1) = 0,5 a_j(\tau_1) \exp[i \beta_j(\tau_1)]$. В дальнейшем анализе воспользуемся разложением

$$\begin{aligned} H(\xi_{0,1}) = & \frac{1}{2} \sum_{\mu=1,2,\dots} r_{2\mu-1} [\exp(i(2\mu-1)(\beta_1 + \bar{\omega}_1 \tau_0)) + \exp(-i(2\mu-1)(\beta_1 + \bar{\omega}_1 \tau_0))] \\ & r_{2\mu-1} = \frac{4}{\pi(2\mu-1)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Решения (14) введем в систему уравнений (13) и приравняем нулю секулярные слагаемые, получим систему модуляционных уравнений относительно действительных переменных ($a_1, a_2, \beta_1, \beta_2$) в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_1' = & -\frac{d_1}{2} a_1 + \frac{(r_3 - r_5) G_{12}}{4 \bar{\omega}_1} a_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{r_5 - r_3}{4 \bar{\omega}_1} (\tilde{f}_1^{(C)} - \tilde{f}_1^{(UN)}) \sin \varphi_1 = F_1(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2); \\ a_2' = & -\frac{d_2}{2} a_2 - \frac{(r_5 + r_3) G_{21}}{4 \bar{\omega}_2} a_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{\tilde{f}_2^{(UN)}}{2 \bar{\omega}_2} \sin \varphi_2 = F_2(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2); \\ \varphi_1' = & -\sigma + \frac{(r_5 + r_3) G_{12} a_2}{\bar{\omega}_1 a_1} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{(r_5 + r_3) (\tilde{f}_1^{(C)} - \tilde{f}_1^{(UN)})}{\bar{\omega}_1 a_1} \cos \varphi_1 = F_3(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2); \\ \varphi_2' = & \sigma - \frac{(r_5 + r_3) G_{21} a_1}{4 \bar{\omega}_2 a_2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{\tilde{f}_2^{(UN)}}{2 \bar{\omega}_2 a_2} \cos \varphi_2 = F_4(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2), \\ & \varphi_1 = 4\beta_1 - \sigma\tau_1; \quad \varphi_2 = \sigma\tau_1 - \beta_2. \end{aligned} \quad (15)$$

где элементы матрицы \mathbf{G} находятся так: $\mathbf{G} = \{G_{ij}\}$; $\mathbf{G} = \Delta \mathbf{G}_{\text{UN}}^{(S)} + \tilde{\mathbf{G}}_C^{(U)}$.

Обобщенные координаты динамической системы (10) и переменные системы модуляционных уравнений (15) связаны между собой

$$\xi_1 = a_1 \cos\left(\frac{\omega}{4} \tau + \frac{\varphi_1}{4}\right) + O(\varepsilon); \quad \xi_2 = a_2 \cos(\omega\tau - \varphi_2) + O(\varepsilon). \quad (16)$$

Периодические колебания в динамической системе (10) описываются неподвижными точками автономной системы модуляционных уравнений (15) ($\bar{a}_1, \bar{\varphi}_1, \bar{a}_2, \bar{\varphi}_2$), которые удовлетворяют соотношениям $a_1' = a_2' = \varphi_1' = \varphi_2' = 0$. Эти неподвижные точки находятся из системы четырех нелинейных алгебраических уравнений, которая решается численно.

Теперь исследуем устойчивость периодических движений в механической системе (10). Анализ устойчивости периодических движений сводится к исследованию устойчивости неподвижных точек модуляционных уравнений (15). Для анализа устойчивости неподвижных точек $(\bar{a}_1, \bar{\varphi}_1, \bar{a}_2, \bar{\varphi}_2)$ определим их характеристические показатели λ . Для этого введем малые возмущения около неподвижных точек $(\bar{a}_1 + \Delta a_1, \bar{\varphi}_1 + \Delta \varphi_1, \bar{a}_2 + \Delta a_2, \bar{\varphi}_2 + \Delta \varphi_2)$. Эволюция этих малых возмущений с течением времени описывается системой уравнений в вариациях, которая является системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$[\Delta a'_1 \ \Delta a'_2 \ \Delta \varphi'_1 \ \Delta \varphi'_2]^T = \frac{\partial(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4)}{\partial(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \varphi_1, \varphi_2)} [\Delta a_1 \ \Delta a_2 \ \Delta \varphi_1 \ \Delta \varphi_2]^T, \quad (17)$$

где $\frac{\partial(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4)}{\partial(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \varphi_1, \varphi_2)}$ – матрица Якоби векторного поля (15), вычисленная при $(\bar{a}_1, \bar{\varphi}_1, \bar{a}_2, \bar{\varphi}_2)$; верхний индекс T обозначает транспонирование вектора.

Прогиб балки $w(x, \tau)$ при колебаниях представим так:

$$w(x, \tau)d^{-1} = [\gamma C_1(x) + (1 - \gamma)W_1(x)]a_1 \cos\left(\frac{\omega}{4}\tau + \frac{\varphi_1}{4}\right) + [\gamma C_2(x) + (1 - \gamma)W_2(x)]a_2 \cos(\omega\tau - \varphi_2) + O(\varepsilon). \quad (18)$$

Итак, период колебаний балки в четыре раза больше периода внешней силы. В колебаниях балки присутствуют две гармоники с частотами $0,25\omega$ и ω . Подчеркнем, что в рассматриваемом резонансе колебания балки субгармонические, что объясняется наличием трещины.

3. Численный анализ

Численные расчеты проводились для следующих значений параметров конструкции:

$$2d = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad b = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad \rho = 7800 \text{ кг/м}^3; \quad L = 0,2 \text{ м};$$

$$l_*/L = 0,2; \quad x_c = L/2; \quad a = 0,03 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad \varepsilon = 1 \cdot 10^{-2}; \quad d_1 = d_2 = 0,4; \quad \frac{F_0}{0,5\rho ALd\omega_1^2} = 0,004.$$

где b – ширина поперечного сечения балки.

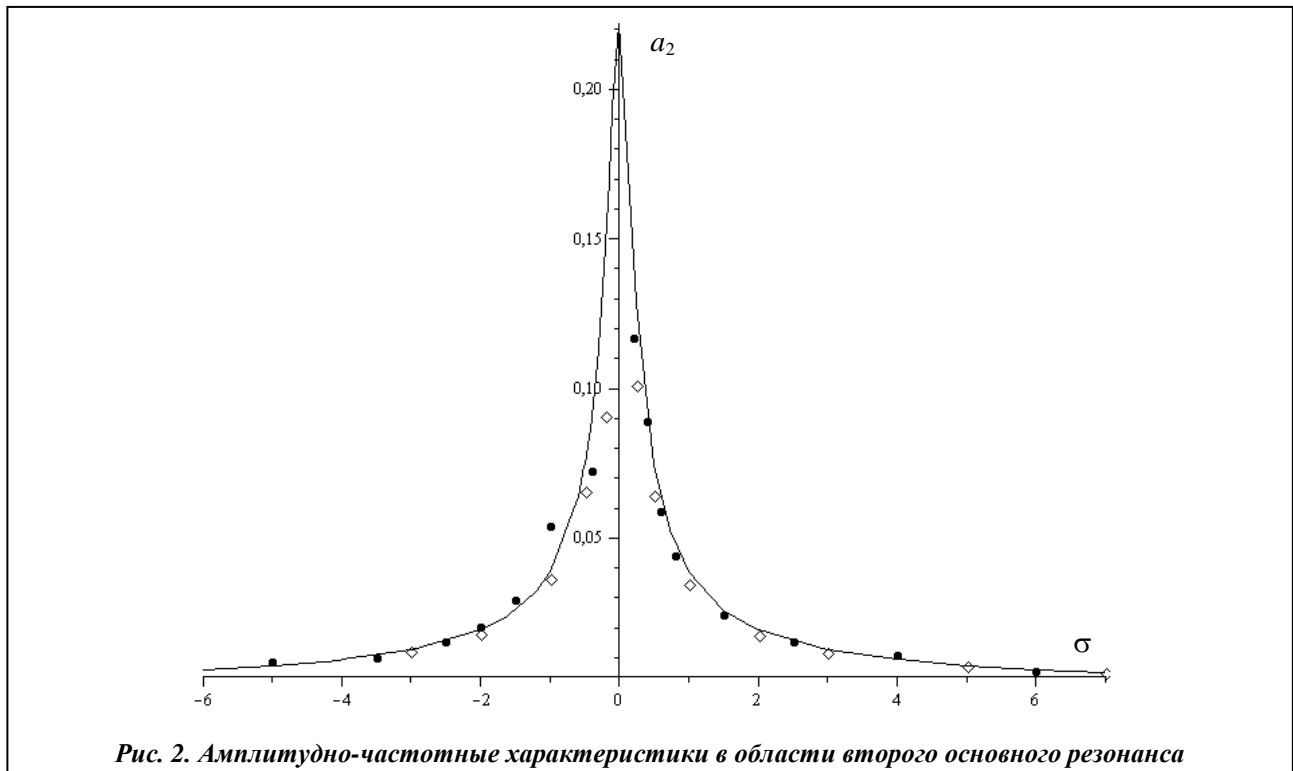


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики в области второго основного резонанса

Для исследования колебаний в области второго основного резонанса численно определялись неподвижные точки системы модуляционных уравнений (15). Для этого решалась система нелинейных алгебраических уравнений при различных значениях параметра расстройки σ . Результаты расчета представлены на амплитудно-частотной характеристике (рис. 2). Здесь по оси ординат показывается a_2 , а по оси абсцисс – параметр расстройки σ . Исследовалась устойчивость неподвижных точек модуляционных уравнений. Для этого рассчитывались характеристические показатели из проблемы собственных значений для матрицы Якоби (17). Подчеркнем, что все решения, представленные на рис. 2, являются устойчивыми. На амплитудно-частотной характеристике наблюдается один пик колебаний при $\sigma = 0$. Подчеркнем, что вид амплитудно-частотной характеристики в области второго основного резонанса близок к линейному. Однако эта характеристика описывает субгармонические колебания балки (18), которые являются нелинейными.

Для проверки асимптотических результатов, полученных методом многих масштабов, проводилось прямое численное интегрирование динамической системы (10). Начальные условия для численного интегрирования определялись из асимптотических решений. Движение на временном интервале $t \in [0; 100000\pi\omega]$ рассматривалось как переходной процесс и поэтому не анализировалось. Численно исследовались вынужденные колебания в диапазоне $\sigma \in [-5; 5]$. Во всей этой области наблюдались моногармонические периодические колебания. Амплитуды периодических колебаний представлены на рис. 2 маленькими ромбами. Результаты прямого численного интегрирования динамической системы (10) и асимптотические данные близки, что свидетельствует о правильности асимптотических решений.

Итак, появление субгармонических колебаний в области одного из основных резонансов может быть диагностическим признаком наличия трещины в конструкции.

Выводы

Используя уравнение в частных производных, описывающее колебания стержня с поперечной трещиной, получена нелинейная модель с конечным числом степеней свободы, описывающая колебания конструкции. Для вывода этой модели используется метод Галеркина. Поперечный прогиб раскладывается по собственным формам. Подчеркнем, что полученная динамическая модель имеет произвольное число степеней свободы. В статье рассматривались динамические системы с двумя степенями свободы. Показано, что колебания стержня с малыми трещинами описываются квазилинейной динамической системой.

Метод многих масштабов применялся для исследования резонансных колебаний в области второго основного резонанса, где наблюдаются субгармонические колебания стержня. Амплитудно-частотная характеристика системы имеет один экстремум. Все колебания, представленные на ней, являются устойчивыми.

Литература

1. Luzzato, E. Approximate computation of non-linear effects in a vibrating cracked beam / E. Luzzato // J. Sound and Vibration. – 2003. – Vol. 265. – P. 745–763.
2. Christides, S. One-dimensional theory of cracked Bernoulli–Euler beams / S. Christides, A. D. S. Barr // Int. J. Mech. Sci. – 1984. – Vol. 26. – P. 639–648.
3. Shen, M.-H. H. Free vibrations of beams with a single-edge crack / M.-H. H. Shen, C. Pierre // J. Sound and Vibration. – 1994. – Vol. 170. – P. 237–259.
4. Shen, M.-H. H. Vibrations of beams with a fatigue crack / M.-H. H. Shen, Y. C. Chu // Comp. and Struc. – 1992. – Vol. 45. – P. 79–93.
5. Chu, Y. C. Analysis of forced bilinear oscillators and the application to cracked beam dynamics / Y. C. Chu, M.-H. H. Shen // AIAA J. – 1992. – Vol. 30. – P. 2512–2519.
6. Chondros, T. G. A continuous cracked beam vibration theory / T. G. Chondros, A. D. Dimarogonas, J. Yao // J. Sound and Vibration. – 1998. – Vol. 215. – P. 17–34.
7. Nayfeh, A. H. Nonlinear oscillations / A. H. Nayfeh, D. T. Mook. – New York: Wiley, 1988. – 865 p.

Поступила в редакцию 01.02.16