[1,2] **О. Л. Андреева**
[1,3] **А. О. Костиков**, д-р техн. наук
[2,3] **В. И. Ткаченко**, д-р физ.-мат. наук

[1] Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
г. Харьков,
e-mail: andreevaoksana@kipt.kharkov.ua,
e-mail: kostikov@ipmach.kharkov.ua
[2] Национальный научный центр
«Харьковский физико-технический институт»
НАН Украины,
[3] Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина
e-mail: tkachenko@kipt.kharkov.ua

Ключові слова: *стаціонарна лінійна задача Релея, циліндрична геометрія, тверді або змішані граничні умови, аналітичний розв'язок, нейтральні криві.*

УДК 632.5

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И НЕЙТРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ РЭЛЕЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНВЕКТИВНЫХ ЯЧЕЕК С ТВЕРДЫМИ И СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Отримано аналітичний розв'язок стаціонарної лінійної задачі Релея для конвективної комірки в циліндричній геометрії з твердими граничними умовами. На його основі побудовано аналітичні вирази для нейтральних кривих у випадку твердих і змішаних граничних умов. Показано, що нейтральні криві з достатнім ступенем точності відповідають чисельним розрахункам, отриманим іншими авторами.

Введение

Тепловая конвекция широко распространена в природе [1, 2]. Эти процессы также используются во многих промышленных технологиях [3]. В частности, конвективный теплообмен – в тепличном производстве сельскохозяйственной продукции [4]. Он также широко применяется в процессах выращивания кристаллов для микроэлектроники [5]. Явление формирования конвективных структур находит применение при лазерной обработке материалов [6].

Для описания процессов конвекции в слоях вязкой несжимаемой подогреваемой снизу жидкости используются уравнения Навье–Стокса в приближении Буссинеска (НСПБ). При этом различают три типа задач конвекции, в зависимости от вида граничных условий: в задачах со «свободными» условиями отсутствуют касательные напряжения на границах слоя жидкости, что соответствует ее свободной поверхности; «твердые» условия описывают поверхность жидкости, контактирующую с твердой стенкой, и предполагают равенство нулю вертикальной компоненты скорости и ее градиента; в задачах со «смешанными» условиями присутствует комбинация свободных и твердых границ [1, 7–9].

Решения стационарных линеаризованных уравнений НСПБ с несвободными граничными условиями для возмущений скорости и температуры, в отличие от свободных граничных условий, не получены в аналитическом виде и поэтому ищутся с помощью численных методов [6, 8].

В связи с вышеизложенным задача поиска аналитических решений стационарных линеаризованных уравнений НСПБ с несвободными граничными условиями является актуальной.

Теория тепломассопереноса в цилиндрической ячейке с твердыми граничными условиями

В [1] представлены результаты исследования в декартовой системе координат тепловой конвекции в горизонтальном, бесконечном в направлениях x и y слое толщиной h вязкой жидкости с твердыми граничными условиями. В этой задаче ось z направлена вверх перпендикулярно к границам слоя $z = 0$ и $z = h$. Распределение температуры внутри слоя $T_0(z)$ задано таким образом, что температура нижней границы была выше температуры верхней: $T_0(0) = T_2$, $T_0(h) = T_1$, $(T_2 > T_1)$. Для простоты расчетов в [1] предполагается, что в состоянии равновесия зависимость температуры слоя от координаты z описывается линейной функцией с градиентом

$$\nabla T_0(z) = -\frac{\Theta}{h}\vec{e}_z, \tag{1}$$

где $\Theta = T_2 - T_1$ – разность температур, поддерживаемых на нижней и верхней границах; $\vec{e}_z$ – единичный вектор, направленный вдоль соответствующей оси.

Ниже рассмотрим задачу о тепловой конвекции в слое вязкой, несжимаемой, подогреваемой снизу жидкости в цилиндрической геометрии. Выбор такой геометрии основан на следующих фактах.

Из экспериментальных данных, полученных в работе [10], можно сформулировать такие выводы:

– конвективные ячейки в момент возникновения имеют цилиндрическую форму;
– внутренняя структура конвективных потоков в ячейках не зависит от азимутального угла φ.

На основании этих выводов будем искать решения линеаризованных уравнений Навье–Стокса [7] в цилиндрической геометрии при условии отсутствия в решениях зависимости от азимутального угла. В данном случае в слое с плоскими границами исходные уравнения для возмущений вертикальной скорости v_z и температуры T имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta v_z = \Delta\Delta v_z + R\Delta_\perp T\ , \qquad (2)$$

$$P\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + v_z\ , \qquad (3)$$

где $\Delta = \Delta_\perp + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; $\Delta_\perp = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right)$ – поперечный лапласиан, в котором на основании осевой симметрии конвективной ячейки отсутствует слагаемое, характеризующее зависимость возмущений от азимутального угла, т. е. полагаем везде $\partial\ldots/\partial\varphi = 0$; $R = g\beta h^3\Theta/(\nu\chi)$ – число Рэлея; g – ускорение свободного падения, направленное против оси z; $P = \nu/\chi$ – число Прандтля; ν и χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости соответственно; β – коэффициент объемного температурного расширения жидкости; v_z, T – возмущения вертикальной скорости и температуры соответственно.

При приведении системы уравнений (2)–(3) к безразмерному виду использованы следующие характерные единицы измерения: длины – толщина слоя h; времени – $\tau = h^2\nu^{-1}$; температуры – Θ. Следует отметить, что для выбранной единицы длины безразмерная координата z изменяется в интервале $0 \le z \le 1$.

Система уравнений (2)–(3) применима для определения так называемых «нормальных» [7] возмущений в вязком подогреваемом снизу слое жидкости при условии, что она должна быть дополнена граничными условиями.

В настоящей работе рассмотрим твердые граничные условия, когда на границах при $z = 0$ и $z = 1$, отсутствуют возмущения скорости и температуры, и производная вертикальной компоненты скорости по координате равна нулю [1, 7]

$$v_r = v_z = 0; \qquad T = 0; \qquad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0\,. \qquad (4)$$

Получение аналитического решения

Решения линеаризованной системы НСПБ, которые описывают временную динамику возмущений вертикальной компоненты скорости и температуры цилиндрической ячейки, имеют вид [9]

$$v_z(r, z, t) = v(z)J_0(k_r r)\exp(-\lambda t), \qquad (5)$$

$$T(r, z, t) = \vartheta(z)J_0(k_r r)\exp(-\lambda t), \qquad (6)$$

где λ – собственные числа [1, 7]; $v(z)$ и $\vartheta(z)$ – амплитуды возмущений вертикальной скорости и температуры соответственно; $J_0(x)$ – функции Бесселя первого рода нулевого порядка от аргумента x; k_r – радиальное волновое число.

В устойчивом состоянии ($\lambda = 0$) подстановка решений (5), (6) в линеаризованную систему НСПБ приводит к характеристическому уравнению [7]

$$(q^2 - b)^3 = -a^3, \qquad (7)$$

где $a = (k_r^2 R)^{1/3}$, $b = kr^2$.

Корни характеристического уравнения (7) определяются следующими выражениями:

$$q_{1,2} = \pm\sqrt{b-a}, \qquad q_{3,4} = \sqrt{b+0{,}5a(1+i\sqrt{3})} = \pm(X_+ + iX_-),$$
$$q_{5,6} = \sqrt{b+0{,}5a(1-i\sqrt{3})} = \pm(X_+ - iX_-), \tag{8}$$

где $X_\pm = \left[0{,}5\left(\sqrt{\chi^2+0{,}75a^2} \pm \chi\right)\right]^{1/2}$, $\chi = 0{,}5a + b$, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Амплитуда вертикальной компоненты скорости (5) выражается в терминах характеристических корней (8) и описывает нейтральные возмущения. Будем искать амплитуду в виде

$$v(z) = \sum_{m=1}^{6} C_m \exp(q_m z), \tag{9}$$

где C_m – произвольные константы, определяемые граничными условиями

$$v(0) = v(1) = 0, \quad \partial v(0)/\partial z = \partial v(1)/\partial z = 0, \quad \vartheta(0) = \vartheta(1) = 0. \tag{10}$$

Уравнение (9) определяет значения критических чисел Рэлея и амплитуду нейтральных возмущений. Их значения, как утверждается в [7], можно найти только в результате приближенного численного решения трансцендентных уравнений.

Опишем метод получения решений (9) с граничными условиями (10) в простом аналитическом виде [10].

Для этого в (9) зададим следующие соотношения между константами C_m: $C_1 = C_2 = A_1/2$, $C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = -A_1/(4\mathrm{ch}(z_0X_+))$, где A1 – произвольная константа; $z_0 = 0{,}5$ – координата полуширины слоя. В этом случае (9) принимает вид

$$v(z) = A_1\left[ch(q_1(z-z_0)) - \cos(X_-(z-z_0))\mathrm{ch}(X_+(z-z_0))\mathrm{ch}^{-1}(z_0X_+)\right].$$

Полагая $q_1 = i\sqrt{a-b} = in\pi$ и требуя равенства $X_- = \sqrt{a-b} = n\pi$, определим амплитуду вертикальной скорости

$$v(z) = A_1\left[1 - ch((z-z_0)X_+)ch^{-1}(z_0X_+)\right]\sin\left(z\sqrt{a-b}\right). \tag{11}$$

Легко показать, что выражение (11) удовлетворяет граничным условиям (10).

Отметим, что равенство $X_- = \sqrt{a-b}$ справедливо при $a = 8(n\pi)^2$ и $b = 7(n\pi)^2$.

Так как решение (7) описывает стационарное состояние цилиндрической ячейки ($\lambda = 0$), то параметры a и b или их масштабно-сдвиговые аналоги (см. ниже), должны определить точку k_r, лежащую на нейтральной кривой $R_n^{rigid}(k_r)$.

Решение (11), а также полученные на его основе выражения для амплитуды возмущения температуры $\vartheta(z)$ (см. (5)) может быть использовано для сравнения с параметрами тепло- и массообмена в конвективной ячейке со свободными граничными условиями [11].

Построение нейтральных кривых для задачи с твердыми граничными условиями

Используем решение (11) для построения нейтральных кривых $R_n^{rigid}(k_r)$ стационарных состояний цилиндрической ячейки с твердыми граничными условиями. В плоскости (R, k_r) для заданного n нейтральные кривые $R_n^{rigid}(k_r)$ разделяют области устойчивых решений (ниже кривой) и области неустойчивых решений (выше кривой) [7].

Для того чтобы построить нейтральные кривые, используем решение (11), а также свойство инвариантности этого решения относительно масштабно-сдвигового преобразования параметров a и b. Термин «инвариантность относительно масштабно-сдвиговых преобразований» характеризует неизменность решения (11) и граничных условий (10), при добавлении к a и b некоторого постоянного числа (сдвиговая инвариантность) или умножении их на другое постоянное число (масштабная инвариантность).

Рассмотрим подробнее свойства инвариантности решений относительно сдвига или масштабирований параметров a и b.

Сдвиговая инвариантность. Сдвиг параметров a и b на произвольную величину x_0

$$a - x_0 = 8(n\pi)_2, \quad b - x_0 = 7(n\pi)^2, \tag{12}$$

где $-7(n\pi)^2 \le x_0 < \infty$ – произвольное число, не меняет выражение $\sqrt{a-b}$ в решении уравнения (7). Не изменяются значения $X_\pm$ в соответствии с (12), а измененные параметры $a - x_0$ и $b - x_0$ сохраняют свои значения. Таким образом, применение сдвигового преобразования дает аналитическое выражение для числа Рэлея

$$R_n^{rigid} = \frac{a^3}{b} = \frac{\left(n^2\pi^2 + (\beta_n \cdot k_r)^{\mu_n}\right)^3}{(\beta_n \cdot k_r)^{\mu_n}}, \tag{13}$$

где $7(n\pi)^2 - x_0 = (\beta_n \cdot k_r)^{\mu_n}$; β_n и μ_n – положительные натуральные числа, зависящие от номера моды n.

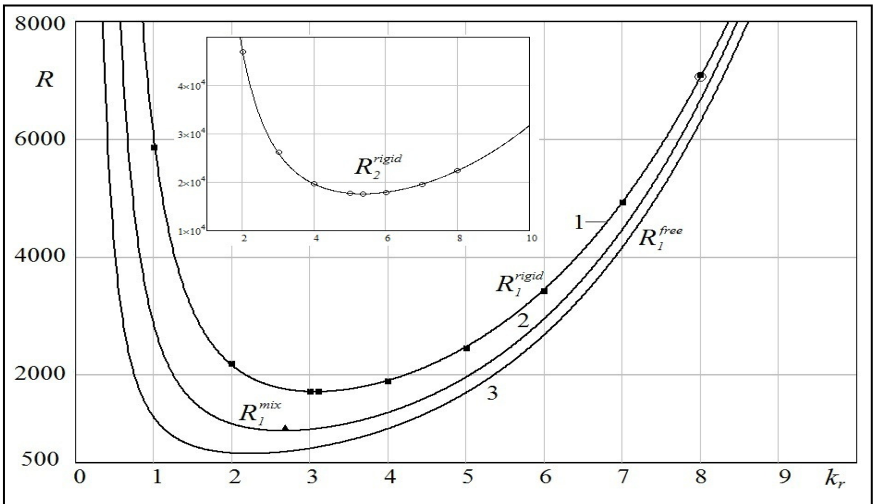
Масштабная инвариантность. Решение (11) характеризуется масштабной инвариантностью по отношению к a и b. Чтобы убедиться в этом, выполним в (11) следующие замены: $(z, z_0) \to \alpha n^{-1}\cdot(z, z_0)$. Такая замена может быть истолкована как изменение толщины слоя $h \to \alpha n\cdot h$, где $\alpha n \ne 0$ – произвольное, зависящее от номера моды, положительное число, $n \ge 1, 2, 3, \ldots$. Тогда для обеспечения масштабной инвариантности выражения (11) должны соблюдаться следующие условия изменения параметров: $a \to \alpha n^2\cdot a$ и $b \to \alpha n^2\cdot b$.

В результате описанных выше масштабно-сдвиговых преобразований выражение (13) может быть записано в виде

$$R_n^{rigid} = \frac{\left(a\alpha_n^2\right)^3}{b\alpha_n^5} = \alpha_n \frac{\left(n^2\pi^2 + (\beta_n \cdot k_r)^{\mu_n}\right)^3}{(\beta_n \cdot k_r)^{\mu_n}}. \tag{14}$$

Сравнение нейтральных кривых (14) (кривая 1, рисунок) с численными данными, полученными другими авторами [7] (точки на кривой 1), показывает их хорошее количественное соответствие. Это позволяет с достаточной степенью точности определить величину констант в выражении (14) для $n = 1$: $\alpha_1 = 2{,}597$, $\alpha_2 = 1{,}674$, $\beta_1 = 0{,}7$, $\mu_1 = 2{,}085$. При этом максимальное относительное отклонение числа Рэлея (14) от численных результатов [7] составляет величину порядка процента (находится в интервале от –1,35 до 0,67%).

Маркер в виде квадрата в кружке на кривой R_1^{rigid} (см. рисунок) соответствует точке $k_r = \pi\sqrt{7}/1{,}038 = 8$, $R_1^{rigid} = \alpha_1^{-3}\left(8\pi^2 - 5{,}087\right)^3/\left(7\pi^2 - 5{,}087\right) = 7062{,}177$, отвечающей параметрам $a = 8\pi^2$ и $b = 7\pi^2$, которые получаются после масштабно-сдвиговых преобразований для параметров $\alpha^1 = 0{,}963$, $x_0 = 5{,}087$. Этот факт с достаточной точностью указывает на расположение этой точки на нейтральной кривой 1.



Нейтральные кривые для модового числа n = 1:
1 – обе границы твердые; 2 – твердая и свободная границы
3 – обе границы свободные

Таким образом, выражение (14) для $n = 1$ определяет функциональную зависимость нейтральной кривой от волнового числа k_r.

Для модовых чисел $n > 1$, используя минимальные критические числа Рэлея горизонтального слоя с твердыми границами [7], можно показать, что нейтральные кривые определяются выражением (14), в котором константы α_n и β_n должны быть заданы в виде

$$\alpha_n = \alpha_2 \left(\frac{2}{n}\right)^{0.37} (n \ge 2), \qquad \beta_n = \frac{\beta_1 n^{\frac{2}{\mu_n}} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{\mu_n} - \frac{2}{\mu_1}}}{1 + \beta_1 (n-1) \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{\mu_1 - 2}{\mu_1}}}.$$

Определим показатель степени μ_n в выражении для β_n.

Известно, что при больших значениях моды n различие в критических числах ячейки с твердыми границами и свободной ячейки уменьшается [7], т. е. показатель степени μ_n с возрастанием номера моды n должен стремиться к показателю степени для свободной ячейки ($\mu_n = 2$). На основании этого показатель степени μ_n можно аппроксимировать выражением

$$\mu_n = \frac{49{,}06n}{24{,}53n - 1}. \tag{15}$$

При $n = 1$; 2 выражение (15) дает $\mu_1 = 2{,}085$ и $\mu_2 = 2{,}04$, что с достаточной степенью точности соответствует результатам численных расчетов [7].

При $n \to \infty$, как отмечено выше, степень μn стремится сверху к двум. На рисунке видно хорошее соответствие результатов численных расчетов точек нейтральной кривой для $n = 2$ и ее теоретической оценки (14)

$$R_2^{rigid} = \alpha_2 \frac{\left(2^2 \pi^2 + (\beta_2 \cdot k_r)^{\mu_2}\right)^3}{(\beta_2 \cdot k_r)^{\mu_2}}, \qquad \beta_2 = 0{,}814.$$

Таким образом, на основании точного решения стационарной задачи Рэлея с твердыми граничными условиями для модовых чисел $n \ge 1$ построено семейство нейтральных кривых, которые с достаточно высокой степенью точности соответствуют результатам численных расчетов.

Построение нейтральных кривых для задачи со смешанными граничными условиями

На основе аналитической зависимости (14) найдем вид нейтральной кривой для случая смешанных граничных условий, когда верхняя граница свободна, а нижняя является твердой. Можно показать, что вид этой кривой (кривая 2 на рисунке) задается выражением $R_1^{mix} = \alpha_2 \frac{\left(2^2 \pi^2 + (\beta_2 \cdot k_r)^{\mu_2}\right)^3}{2^4 (\beta_2 \cdot k_r)^{\mu_2}}$. Кривая 2 в минимуме $\left(R_1^{mix}\right)_{\min} = 1045{,}60$ достаточно точно (до 5%) соответствует критической точке, полученной численным методом $R_m = 1100{,}657$ [7].

Для сравнения рассмотрим аналитические зависимости нейтральных кривых с твердыми граничными условиями и нейтральной кривой со свободными граничными условиями из классической задачи Релея (на рисунке – кривая 3, [7]). Из вида кривых следует, что аналитические зависимости (14), (16) (кривые 1 и 2 соответственно) для больших аргументов k_r не пересекаются и асимптотически стремятся к нейтральной кривой ячейки со свободными граничными условиями (кривая 3).

В заключение отметим, что полученные результаты применимы при решении стационарной задачи Рэлея с твердыми границами в декартовой системе координат. Для этого необходимо в (1) заменить k_r на $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, а функцию $J_0(k_r r)$ – на $\exp(ik_x x + ik_y y)$.

Выводы

Таким образом, в настоящей работе получены аналитические решения стационарной линейной задачи Рэлея с твердыми и смешанными граничными условиями. На основании полученных решений с учетом их сдвиговой и масштабной инвариантности построено семейство нейтральных кривых для слоя вязкой, несжимаемой, подогреваемой снизу жидкости с твердыми и смешанными граничными условиями.

Литература

1. *Chandrasekhar, S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability / S. Chandrasekhar. – Oxford University Press, 1970. – 657 p.
2. *Неклюдов, И. М.* Описание ленгмюровских циркуляций упорядоченным набором конвективных кубических ячеек / И. М. Неклюдов, Б. В. Борц, В. И. Ткаченко // Прикл. гидромеханика. – Т. 14(86), № 2, 2012. – С. 29–40.
3. *Щука, А. А.* Наноэлектроника / А. А. Щука. – М.: Физматкнига, 2007. – 464 с.
4. *Сажин, Б. С.* Сушка и промывка текстильных материалов: теория, расчет процессов / Б. С. Сажин, В. А. Реутский. – М.: Легпромбытиздат, 1990. – 224 с.
5. *Мюллер, Г.* Выращивание кристаллов из расплава. Конвекция и неоднородности / Г. Мюллер; [пер. с англ. В. Бунэ]. – М.: Мир, 1991. – 143 с.
6. *Рыкалин, Н. Н.* Лазерная обработка материалов / Н. Н. Рыкалин, А. А. Углов, А. Н. Кокора. – М.: Машиностроение, 1975. – 296 с.
7. Гершуни, Г. З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. – М: Наука, 1972. – 393 с.
8. *Strutt, J. W. (Lord Ray1eigh)* / On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side // J. W. Strutt (Lord Ray1eigh). – Phil. Mag. – 1916. –Vol. 32. – P. 529–546.
9. *Experimental* study of liquid movement in free elementary convective sells / L. Bozbiei, B. Borts, Y. Kazarinov, A. Kostikov, V. Tkachenko // Energetika. – 2015. – Vol. 61, № 2. – P. 45–56.
10. *Patochkina, O. L.* Elementary convection cell in the horizontal layer of viscous incompressible liquid with rigid and mixed boundary conditions / O. L. Patochkina, B. V. Borts, V. I. Tkachenko // East-European J. Phys. – 2015. – Vol. 2, № 1. – P. 23–31.
11. *Bozbey, L. S.* Elementary convective cell in the layer of incompressible, viscous liquid and its physical properties / L. S. Bozbey, A. O. Kostikov, V. I. Tkachenko // Mode conversion, coherent structures and turbulence: Intern. conf. MSS-14. – Space Research Institute, Moscow, 2014. – P. 322–328.

Поступила в редакцию 09.02.17

О. С. Цаканян,
канд. техн. наук
В. Н. Голощапов,
канд. техн. наук
С. В. Кошель,
канд. техн. наук
Н. Г. Ганжа

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков,
e-mail: tsakoleg@rambler.ru

УДК 53.084;536.628.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОТЕРЬ УЧАСТКОВ МАГИСТРАЛЬНЫХ ТЕПЛОПРОВОДОВ МЕТОДОМ ЭТАЛОНА

Розроблено методику вимірювань і конструкцію вимірювального приладу для визначення рівня теплових втрат на будь-якій ділянці трубопроводів незалежно від типу теплової ізоляції. Прилад являє собою встановлений на трубу корпус з екранами на внутрішніх поверхнях і отворами знизу та зверху для датчиків вимірювання температури й потоку повітря, якими визначаються теплові втрати в навколишнє середовище. Попередньо прилад градуюється в лабораторних умовах із застосуванням еталона теплової потужності, в якому вона рівномірно розподілена поверхнею ділянки, що імітує трубопровід. Еталон являє собою модель ділянки трубопроводу, що містить нагрівач та інтегральний датчик температури. Змінюючи діаметр отвору в торцевих кришках приладу, його можна застосовувати для вимірювання теплових втрат трубопроводів різного діаметра.

Ключові слова: *теплові втрати, вимірювання, еталон, трубопровод.*

Введение

На сегодняшний день десятки тысяч километров теплопроводов эксплуатируются с изношенной или пришедшей в негодность теплоизоляцией. До 20% тепловой энергии теряется в окружающую среду. Качественная теплоизоляция позволяет минимизировать тепловые потери, которые рас-