Т.А.Лукьянова, А.А.Мартынюк

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СВЯЗНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА ВРЕМЕННОЙ ШКАЛЕ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина, e-mail: center@inmech.kiev.ua

Abstract. The conditions of convective stability are established for the dynamical system over the time scale. The obtained conditions are illustrated on a numerical example.

Key words: dynamic equation, time scale, connective stability, asymptotic stability, vector Lyapunov function, comparison function.

Введение.

Понятие связной устойчивости введено при исследовании движения крупномасштабных систем в работе [14]. В дальнейшем изучению такого рода устойчивости для различных типов систем уравнений посвящены многие работы. Например, в работах [9, 15, 16] рассмотрены непрерывные системы, в [2, 6] – дискретные. Одновременное описание динамики как непрерывных, так и дискретных во времени систем позволяет теория динамических систем на временной шкале [5]. В настоящее время такие системы являются предметом многочисленных исследований (см. [1, 3, 12] и приведенную там библиографию).

Данная работа является продолжением исследований, начатых в работе [1]. При этом применяется принцип сравнения с векторной функцией Ляпунова и устанавливаются достаточные условия связной устойчивости движения на временной шкале.

1. Основные обозначения и определения.

Временной шкалой $\mathbb{T}$ называется произвольное непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Основные понятия и теоремы математического анализа на временной шкале, такие как определения производной и интеграла, правила дифференцирования и интегрированния, определения регрессивной и rd-непрерывной функции, регрессивной и rd-непрерывной матрицы, подробно изложенны в работах [1, 5]. Ниже приведем только некоторые самые необходимые понятия и определения.

Функция $f:\mathbb{T}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ называется регрессивной, если при любом $t\in\mathbb{T}^k$ оператор $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, действующий по формуле $Fx = x+\mu(t)f(t,x)$, обратим.

Функция $f:\mathbb{T}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ называется rd-непрерывной, если функция $g(t)=f(t,x(t))$ является покомпонентно rd-непрерывной для любой непрерывной функции $x:\mathbb{T}\to\mathbb{R}^n$.

Пусть $p:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ – регрессивная и rd-непрерывная функция. Через $e_p(t,t_0)$ обозначим экспоненциальную функцию на временной шкале, определение и свойства которой подробно изложены в работах [1, 5].

Функция $g:[\tau,+\infty)_{\mathbb{T}}\times\mathbb{R}_+^m\to\mathbb{R}^m$ называется неубывающей по u, если при всех $t\in[\tau,+\infty)_{\mathbb{T}}$ верно $g(t,u)\le g(t,v)$ как только $u\le v$, $u,v\in\mathbb{R}_+^m$. Здесь и далее предполагается, что все неравенства для векторов и матриц выполняются покомпонентно, $[\tau,+\infty)_{\mathbb{T}}=\{t\in\mathbb{R}:t\ge\tau\}\bigcap\mathbb{T}$ при $\tau\in\mathbb{T}$.

Функция $\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ принадлежит K-классу, если она непрерывна, строго возрастает на $\mathbb{R}_+$ и $\psi(0)=0$. Функция $\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ принадлежит KR-классу, если $\psi\in$K-классу и $\lim_{r\to+\infty}\psi(r)=+\infty$.

Обозначим через $C_{rd}(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ множество всех rd-непрерывных функций $f:\mathbb{T}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Кроме того, обозначим через $\|x\|=(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ – евклидову норму вектора $x\in\mathbb{R}^n$; $B_\delta=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|<\delta\}$; $\bar{B}_\delta=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|\le\delta\}$; $\|A\|=(\lambda_M(A^{\mathrm{T}}A))^{1/2}$ – норму матрицы $A=\{a_{ij}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda_M(A)$ – наибольшее собственное значение матрицы A; $|A|=\{|a_{ij}|\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, I – единичное отображение в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+=\{u\in\mathbb{R}:u\ge0\}$.

Пусть $\mathbb{T}$ – произвольная временная шкала такая, что $\sup\mathbb{T}=+\infty$. Рассмотрим систему динамических уравнений вида

$$x^\Delta(t)=f(t,x(t)),\ t\in\mathbb{T}_\tau, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0)=x_0,\ t_0\in\mathbb{T}_\tau,\ x_0\in\mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}_\tau=[\tau,+\infty)_{\mathbb{T}}$, $\tau\in\mathbb{T}$, функция $f:\mathbb{T}_\tau\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ такова, что при всех $(t_0,x_0)\in\mathbb{T}_\tau\times\mathbb{R}^n$ существует единственное решение начальной задачи (1), (2) на $[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}$. Кроме того, предположим, что $f(t,0)=0$ для всех $t\in\mathbb{T}_\tau$ и состояние $x=0$ – единственное состояние равновесия системы (1).

Определение 1. Состояние равновесия $x=0$ системы (1) называется:

1) равномерно устойчивым, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $x_0\in B_\delta$, $t_0\in\mathbb{T}_\tau$ и $t\in[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ имеет место неравенство $\|x(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon$;

2) равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и существует $\Delta>0$ такое, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\sigma=\sigma(\varepsilon)>0$ такое, что при всех $x_0\in B_\Delta$, $t_0\in\mathbb{T}_\tau$ и $t\in[t_0+\sigma,+\infty)_{\mathbb{T}}$ имеет место неравенство $\|x(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon$;

3) равномерно асимптотически устойчивым в целом, если оно равномерно устойчиво и для любых $\Delta>0$, $\varepsilon>0$ найдется $\sigma=\sigma(\varepsilon,\Delta)>0$ такое, что при всех $x_0\in B_\Delta$, $t_0\in\mathbb{T}_\tau$ и $t\in[t_0+\sigma,+\infty)_{\mathbb{T}}$ имеет место неравенство $\|x(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon$.

Вместе с системой (1) будем рассматривать систему сравнения

$$u^\Delta(t)=g(t,u(t)), \tag{3}$$

где $u\in\mathbb{R}^m$ и $g:\mathbb{T}_\tau\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$. Далее потребуется следующее определение.

Определение 2. Решение $u^+ : [t_0, \omega) \bigcap \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ системы (3) с начальным условием $(t_0, u_0) \in \mathbb{T}_\tau \times \mathbb{R}^m$ называется максимальным решением, если всякое другое решение $u : [t_0, \widetilde{\omega}) \bigcap \mathbb{T} \to \mathbb{R}^m$, проходящее через (t_0, u_0) такое, что $u^+(t) \ge u(t)$ для всех $t \in [t_0, \omega) \bigcap [t_0, \widetilde{\omega}) \bigcap \mathbb{T}$.

2. Постановка задачи.

Декомпозируем систему (1) на m взаимосвязанных подсистем

$$x_i^\Delta(t) = f_i(t, x_i) + h_i(t, x), \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{4}$$

где $x = (x_1^\mathrm{T}, x_2^\mathrm{T}, ..., x_m^\mathrm{T})^\mathrm{T}$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times ... \times \mathbb{R}^{n_m}$, $f_i : \mathbb{T}_\tau \times \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{n_i}$, $h_i : \mathbb{T}_\tau \times$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_i}$, а уравнения

$$S_i : \qquad x_i^\Delta(t) = f_i(t, x_i), \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{5}$$

описывают динамику независимых подсистем системы (4) и получаются из уравнений (4), когда связи h_i тождественно равны нулю. Предположим, что $f_i(t, 0) = 0$ для всех $t \in \mathbb{T}_\tau$ и состояние $x_i = 0$ – единственное состояние равновесия системы (5).

Известно [15], что функции связи между независимыми подсистемами системы (4) можно представить в виде

$$h_i(t, x) = h_i(t, \overline{e}_{i1} x_1, \overline{e}_{i2} x_2, ..., \overline{e}_{im} x_m), \quad i = 1, 2, ..., m,$$

где $\overline{E} = \{\overline{e}_{ij}\}_{i,j=1}^m$ – фундаментальная матрица связей системы (4) с элементами

$$\overline{e}_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если подсистема } S_j \text{ взаимодействует с подсистемой } S_i; \\ 0, \text{ если подсистема } S_j \text{ не взаимодействует с подсистемой } S_i. \end{cases}$$

Рассмотрим связи вида

$$\hat{h}_i(t, x) = h_i(t, e_{i1}(t) x_1, e_{i2}(t) x_2, ..., e_{im}(t) x_m), \quad i = 1, 2, ..., m,$$

где непрерывные функции $e_{ij} : \mathbb{T}_\tau \to [0,1]$ при всех $t \in \mathbb{T}_\tau$ удовлетворяют неравенствам

$$e_{ij}(t) \le \overline{e}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, ..., m.$$

Матрица $\overline{E}$ определяет первоначальные связи между независимыми подсистемами S_i, а матричная функция $E(t) = \{e_{ij}(t)\}_{i,j=1}^m$ описывает структурные возмущения системы (4).

Определение 3. *Нулевое состояние равновесия системы (4) называется связно равномерно асимптотически устойчивым, если при любой матрице связей $E(t) \le \overline{E}$ состояние равновесия $x = 0$ системы*

$$x_i^\Delta(t) = f_i(t, x_i(t)) + h_i(t, e_{i1}(t) x_1(t), e_{i2}(t) x_2(t), ..., e_{im}(t) x_m(t)), \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{6}$$

равномерно асимптотически устойчиво.

Аналогичным образом определяются и другие типы связной устойчивости, например, связная равномерная асимптотическая устойчивость в целом.

Целью данной работы является получение достаточных условий связной устойчивости для системы общего вида (1), а также для нейронной системы типа Хопфилда.

3. Предварительные результаты.

Далее в работе потребуется следующий вариант принципа сравнения.

Теорема 1. *Предположим, что существуют функции* $V:\mathbb{T}_\tau\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+^m$ *и* $g\in C_{rd}(\mathbb{T}_\tau\times\mathbb{R}_+^m,\mathbb{R}^m)$ *такие, что :*

1) *функция* $u+\mu(t)g(t,u)$ *является неубывающей по* u *;*

2) *функция* $V(t,x)$ *непрерывна по* x, $V(t,0)=0$ *при всех* $t\in\mathbb{T}_\tau$, *функция* $m(t)=V(t,x(t))$ *является* Δ*-дифференцируемой на* $\mathbb{T}_\tau$ *при любой* Δ*-дифференцируемой функции* $x:\mathbb{T}_\tau\to\mathbb{R}^n$ *и при всех* $t\in\mathbb{T}_\tau$ *выполняется неравенство* $V^\Delta(t,x(t))|_{(1)}\le g(t,V(t,x\ (t)))$;

3) $g(t,0)=0$ *при всех* $t\in\mathbb{T}_\tau$ *и для любых начальных данных* $(t_0,u_0)\in\mathbb{T}_\tau\times\mathbb{R}_+^m$ *существует максимальное решение* $p_i>0$ *системы*

$$v_i^\Delta(x_i)=2p_ix_i^\Delta+\mu(t)p_i(x_i^\Delta)^2 \tag{7}$$

при всех $t\in[t_0,+\infty)_\mathbb{T}$.

Тогда вдоль решений системы (1) *при всех* $t\in[t_0,+\infty)_\mathbb{T}$ *верна оценка*

$$V(t,x(t))\le r(t) \tag{8}$$

как только $V(t_0,x_0)\le u_0$.

Доказательство. При фиксированном $t\in[t_0,+\infty)_\mathbb{T}$ рассмотрим утверждение $S(t):\quad m(t)\le r(t)$ и применим принцип индукции (см. [5, Theorem 1.7]) на временной шкале к семейству утверждений $\{S(t):\quad t\in[t_0,+\infty)_\mathbb{T}\}$.

I. Утверждение $S(t_0)$ верно, так как в силу условий теоремы 1 $m(t_0)=V(t_0,x_0)\le$ $\le u_0=r(t_0)$.

II. Пусть $t\in[t_0,+\infty)_\mathbb{T}$ рассеяно справа и утверждение $S(t)$ – верно. Согласно условиям 1) и 2) теоремы 1 имеем

$$m(\sigma(t))=m(t)+\mu(t)m^\Delta(t)=m(t)+\mu(t)V^\Delta(t,x(t))\le$$

$$\le m(t)+\mu(t)g(t,m(t))\le r(t)+\mu(t)g(t,r(t))=$$

$$=r(t)+\mu(t)r^\Delta(t)=r(\sigma(t))\,,$$

где $0<\mu(t)<+\infty$. Отсюда следует, что утверждение $S(\sigma(t))$ – верно.

III. Пусть точка $t\in[t_0,+\infty)_\mathbb{T}$ – плотная справа и утверждение $S(t)$ верно. Так как m и r – непрерывные функции и $m(t)\le r(t)$, то существует $\varepsilon>0$ такое, что $m(s)\le r(s)$ при всех $s\in(t,t+\varepsilon)\bigcap\mathbb{T}$, т.е. утверждение $S(s)$ верно при всех $s\in U\bigcap(t,+\infty)$, $U=(t,t+\varepsilon)\bigcap\mathbb{T}$.

IV. Пусть точка $t\in[t_0,+\infty)_\mathbb{T}$ плотная слева и утверждение $S(s)$ верно при всех $s\in[t_0,t)\bigcap\mathbb{T}$. Тогда имеем $m(s)<r(s)$ при всех $s\in[t_0,t)\bigcap\mathbb{T}$. По непрерывности при $s\to t-0$ получим $m(t)\le r(t)$. Отсюда следует, что утверждение $S(t)$ верно. Теорема 1 доказана.

Пусть Ω – односвязная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, содержащая начало координат.

Теорема 2. *Если существуют функция* $V:\mathbb{T}_\tau\times\Omega\to\mathbb{R}_+$ *и функции* $\varphi,\phi,\psi\in K$ *такие, что* $V(t,x)$ *непрерывна по* x, $V(t,0)=0$ *при всех* $t\in\mathbb{T}_\tau$, *функция* $V(t,x(t))$ *является* Δ*-дифференцируемой на* $\mathbb{T}_\tau$ *при любой* Δ*-дифференцируемой функции* $x:\mathbb{T}_\tau\to\mathbb{R}^n$ *и при всех* $(t,x)\in\mathbb{T}_\tau\times\Omega$ *выполнены неравенства:*

1) $\phi(\|x\|)\le V(t,x)\le\varphi(\|x\|)$; 2) $V^{\Delta}(t,x(t))\,|_{(1)}\le-\psi(\|x\|)$,

то состояние равновесия $x=0$ *системы* (1) равномерно *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Поскольку функция $\phi\in$ K-классу, то для любого $\varepsilon>0$ существует постоянная $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такая, что для всех $x_0\in B_\delta$ имеет место неравенство $\varphi(\|x_0\|)<\phi(\varepsilon)$. Для решения $x(t)=x(t;t_0,x_0)$ при $t\in[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ и $x_0\in B_\delta$ получаем неравенство

$$\phi(\|x(t)\|)\le V(t,x(t))\le V(t_0,x_0)\le\varphi(\|x_0\|)<\phi(\varepsilon),$$

откуда имеем, что $\|x(t)\|\le\varepsilon$. Равномерная устойчивость доказана.

Докажем равномерное притяжение. Выберем постоянную $\alpha>0$ так, чтобы $\bar{B}_\alpha\subset\Omega$, и для любого $t_0\in\mathbb{T}_\tau$ положим $V^{-1}_{t_0,\alpha}=\{y\in\Omega:\quad V(t_0,y)\le\phi(\alpha)\}$.

Ясно, что $V^{-1}_{t_0,\alpha}\subseteq\bar{B}_\alpha\subset\Omega$. Выберем $x_0\in V^{-1}_{t_0,\alpha}$.

Для любого $\varepsilon>0$ существует постоянная $\eta=\eta(\varepsilon)>0$ такая, что $\varphi(\eta)<\phi(\varepsilon)$. Выберем $\sigma=\sigma(\varepsilon)>\phi(\alpha)/\psi(\eta)$. Предположим, что при всех $t\in[t_0,t_0+\sigma]\bigcap\mathbb{T}$ имеет место неравенство $\|x(t)\|\ge\eta$. Тогда получим

$$V(t_0+\sigma,x(t_0+\sigma))\le V(t_0,x_0)-\int_{t_0}^{t_0+\sigma}\psi(\|x(s)\|)\Delta s\le\phi(\alpha)-\psi(\eta)\sigma<0,$$

чего быть не может. Значит, существует $t_1\in[t_0,t_0+\sigma]\bigcap\mathbb{T}$ такое, что $\|x(t_1)\|<\eta$. При всех $t\in[t_0+\sigma,+\infty)_{\mathbb{T}}$ для решения $x(t)=x(t;t_0,x_0)$ имеем неравенство

$$\phi(\|x(t)\|)\le V(t,x(t))\le V(t_1,x(t_1))\le\varphi(\|x(t_1)\|)\le\varphi(\eta)<\phi(\varepsilon),$$

откуда следует, что $\|x(t)\|<\varepsilon$ для всех $t\in[t_0+\sigma,+\infty)_{\mathbb{T}}$.

Итак получено, что для любого $x_0\in V^{-1}_{t_0,\alpha}$ и для любого $\varepsilon>0$ существует постоянная $\sigma=\sigma(\varepsilon)>0$ такая, что имеет место неравенство $\|x(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon$ при всех $t_0\in\mathbb{T}_\tau$ и $t\in[t_0+\sigma,+\infty)_{\mathbb{T}}$.

Выбирая постоянную $\Delta>0$ так, чтобы $\varphi(\Delta)\le\phi(\alpha)$, получаем $B_\Delta\subset V^{-1}_{t_0,\alpha}$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Если условия теоремы* 2 *выполняются для* $\Omega=\mathbb{R}^n$ *и* $\phi\in KR$, *то состояние равновесия* $x=0$ *системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво zв це-лом.*

Доказательство. Поскольку $\phi(r)\to+\infty$ при $r\to+\infty$, то для любого $\Delta>0$ всегда найдется $\alpha>0$ такое, что выполняется неравенство $\varphi(\Delta)\le\phi(\alpha)$. Далее доказательство проводится как и в предыдущей теореме.

В дальнейшем потребуются также следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть задана матрица* $B = \{b_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. *Линейная по* u *функция* $G(u) = Bu$ *является неубывающей по* u *тогда и только тогда, когда* $b_{ij} \geq 0$ *при всех* $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

Лемма 2. *Пусть постоянная* $p > 0$ *такая, что* $\mu(t) < 2/p$ *и* $\mu(t) \neq 1/p$ *при всех* $t \in T_\tau$. *Тогда имеем:*

3) $e_{-p}(t, t_0) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *равномерно по* $t_0 \in \mathbb{T}_\tau$*;*

4) $|e_{-p}(t, t_0)| \leq 1$ *при всех* $t, t_0 \in \mathbb{T}_\tau$.

Доказательство. В силу условий леммы 2 функция $e_{-p}(t, t_0)$ будет решением следующей начальной задачи (см. [5, Theorem 2.33; с. 89]):

$$y^\Delta(t) = -p\, y(t), \qquad t \in \mathbb{T}_\tau; \tag{9}$$

$$y(t_0) = 1; \qquad t_0 \in \mathbb{T}_\tau \quad (\, y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}\,). \tag{10}$$

Исследуем состояние равновесия $y = 0$ системы (9) на устойчивость при помощи функции $v(y) = y^2$. Вычислим Δ-производную этой функции вдоль решений системы (9)

$$v^\Delta(y(t))\,|_{(9)} = 2\mathrm{y}(\mathrm{t})\,\mathrm{y}^\Delta(t) + \mu(t)(y^\Delta(t))^2 = p\,(p\,\mu(t) - 2)y^2(t). \tag{11}$$

Поскольку $p\,\mu(t) - 2 < 0$ при всех $t \in \mathbb{T}_\tau$, то выполняются условия следствия 1 и состояние равновесия $y = 0$ системы (9) равномерно асимптотически устойчиво в целом. Из определения 1 следует, что любое решение начальной задачи (9, 10), а значит и функция $e_{-p}(t, t_0)$, стремится к 0 при $t \to +\infty$ равномерно по $t_0 \in \mathbb{T}_\tau$.

Из равенства (11) следует, что функция $v(y(t))$ является невозрастающей на $\mathbb{T}_\tau$ вдоль любого решения системы (9). Значит, для решения $e_{-p}(t, t_0)$ верно неравенство $e_{-p}^2(t, t_0) \leq e_{-p}^2(t_0, t_0) = 1$, откуда следует, что $|e_{-p}(t, t_0)| \leq 1$ при всех $t, t_0 \in \mathbb{T}_\tau$. Лемма 2 доказана.

4. Связная устойчивость на временной шкале.

Как и в теории связной устойчивости непрерывных систем [15], для динамических уравнений (4) эффективным является применение метода векторных функций Ляпунова. Покажем, что имеет место следующее общее утверждение.

Теорема 3. *Предположим, что для системы* (4) *существуют функции* $V : \mathbb{T}_\tau \times \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^m$ *и* $g \in C_{rd}(\mathbb{T}_\tau \times \mathbb{R}_+^m, \mathbb{R}^m)$ *такие, что :*

1) *для функции* $d^{\mathrm{T}} V : \mathbb{T}_\tau \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *при всех* $(t, x) \in \mathbb{T}_\tau \times \mathbb{R}^n$ *выполняется оценка* $\varphi(\|x\|) \leq d^{\mathrm{T}} V(t, x) \leq \psi(\|x\|)$, *где функции* $\varphi, \psi \in$ *K-классу Хана,* $d \in \mathbb{R}_+^m$, $d > 0$*;*

2) *функция* $u + \mu(t) g(t, u)$ *является неубывающей по* u *при всех* $t \in \mathbb{T}_\tau$;

3) *функция* $V(t, x)$ *непрерывна по* x, $V(t, 0) = 0$ *при всех* $t \in \mathbb{T}_\tau$, *функция* $V(t, x(t))$ *является* Δ*-дифференцируемой на* $\mathbb{T}_\tau$ *при любой* Δ*-дифференцируемой функции* $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *и при всех* $t \in \mathbb{T}_\tau$ *и* $E \leq \bar{E}$ *выполняется неравенство* $V^\Delta(t, x(t))\,|_{(6)} \leq g(t, V(t, x(t)))$;

4) $g(t,0)=0$ *при всех* $t \in \mathbb{T}_\tau$ *и для любых начальных данных* $(t_0,u_0) \in \mathbb{T}_\tau \times \mathbb{R}_+^m$ *существует максимальное решение* $r(t)=r(t,t_0,u_0)$ *системы сравнения*

$$u^\Delta(t)=g(t,u(t)), \quad u(t_0)=u_0 \ge 0 \tag{12}$$

при всех $t \in [t_0,+\infty)_\mathbb{T}$.

Тогда из равномерной асимптотической устойчивости состояния равновесия $u=0$ *системы* (12) *следует связная равномерная асимптотическая устойчивость состояния равновесия* $x=0$ *системы* (4).

Доказательство. Поскольку состояние $u=0$ системы (12) равномерно устойчиво, то для любого $\varepsilon>0$ существует $\gamma_1=\gamma_1(\varepsilon)>0$ такое, что при всех $u_0 \in B_{\gamma_1}$, $t_0 \in \mathbb{T}_\tau$ и $t \in [t_0,+\infty)_\mathbb{T}$ верна оценка $d^\mathrm{T}u(t;t_0,u_0)<\varepsilon$. При $u_0 \ge 0$ имеем

$$\min\{d_1^2,d_2^2,...,d_m^2\}\|u_0\|^2=\min\{d_1^2,d_2^2,...,d_m^2\}\sum_{i=1}^m u_{0i}^2 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^m d_i^2u_{0i}^2 \le \sum_{i=1}^m d_i^2u_{0i}^2+\sum_{i\ne j}^m d_id_ju_{0i}u_{0j}=\left(\sum_{i=1}^m d_iu_{0i}\right)^2=(d^\mathrm{T}u_0)^2,$$

откуда следует, что $\|u_0\| \le d^\mathrm{T}u_0/\min\{d_1,d_2,...,d_m\}$. Выберем $\gamma_2=\gamma_1\min\{d_1,d_2,..., d_m\}=\gamma_2(\varepsilon)$ и рассмотрим $u_0 \ge 0$ такие, что $d^\mathrm{T}u_0<\gamma_2$. Тогда получим

$$\|u_0\|<d^\mathrm{T}u_0/\min\{d_1,d_2,...,d_s\}<\gamma_2/\min\{d_1,d_2,...,d_s\}=\gamma_1$$

и $d^\mathrm{T}u(t;t_0,u_0)<\varepsilon$ при всех $t \in [t_0,+\infty)_\mathbb{T}$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ существует $\gamma_2=\gamma_2(\varepsilon)>0$ такое, что $d^\mathrm{T}u(t;t_0,u_0)<\varepsilon$ при всех $d^\mathrm{T}u_0<\gamma_2$, $t_0 \in \mathbb{T}_\tau$ и $t \in [t_0,+\infty)_\mathbb{T}$. Далее выберем $\gamma=\psi^{-1}(\gamma_2)>0$. Для $x_0 \in B_\gamma$ имеем

$$d^\mathrm{T}u_0=d^\mathrm{T}V(t_0,x_0) \le \psi(\|x_0\|) \le \psi(\gamma)<\gamma_2$$

и, следовательно, $d^\mathrm{T}u(t;t_0u_0)<\varepsilon$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует $\gamma=\gamma(\varepsilon)>0$ такое, что при всех $x_0 \in B_\gamma$, $t_0 \in \mathbb{T}_\tau$ и $t \in [t_0,+\infty)_\mathbb{T}$ верна оценка $d^\mathrm{T}u(t;t_0,u_0)<\varepsilon$, где $u_0=V(t_0,x_0)\ge 0$.

Обозначим решение системы (6) с начальным условием (t_0,x_0) через $x_E(t;t_0,x_0)$. Покажем, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\|x_E(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon$ при всех $x_0 \in B_\delta$, $t_0 \in \mathbb{T}_\tau$, $t \in [t_0,+\infty)_\mathbb{T}$ и $E \le \overline{E}$. От противного, пусть существует $\tilde{\varepsilon}>0$ такое, что для любого $\delta>0$ существуют $\tilde{x}_0 \in B_\delta$, $\tilde{t}_0 \in \mathbb{T}_\tau$, $\tilde{t} \in [\tilde{t}_0,+\infty)_\mathbb{T}$ и $\tilde{E} \le \overline{E}$ такие, что $x_{\tilde{E}}(\tilde{t};\tilde{t}_0,\tilde{x}_0) \ge \tilde{\varepsilon}$.

В силу теоремы 1 при $\tilde{u}_0=V(\tilde{t}_0,\tilde{x}_0)$ будем иметь оценку

$$V(\tilde{t},x_{\tilde{E}}(\tilde{t};\tilde{t}_0,\tilde{x}_0)) \le r(\tilde{t};\tilde{t}_0,\tilde{u}_0). \tag{13}$$

Из условия (1) и неравенства (13) следует

$$\varphi(\tilde{\varepsilon}) \le \varphi(\|x_{\tilde{E}}(\tilde{t};\tilde{t}_0,\tilde{x}_0)\|) \le d^\mathrm{T}V(\tilde{t},x_{\tilde{E}}(\tilde{t};\tilde{t}_0,\tilde{x}_0)) \le d^\mathrm{T}r(\tilde{t};\tilde{t}_0,\tilde{u}_0).$$

Выше показано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x_0 \in B_\gamma$, $t_0 \in \mathbb{T}_\tau$, $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ и $E \le \overline{E}$ верна оценка $d^{\mathrm{T}} r(t; t_0, u_0) < \varepsilon$, где $u_0 = V(t_0, x_0) \ge 0$. Выберем $\Delta = \min\{\delta, \gamma\}$, тогда существует $\tilde{x}_0 \in B_\Delta$ такое, что
$\phi(\tilde{\varepsilon}) \le d^{\mathrm{T}} r(\tilde{t}; \tilde{t}_0, \tilde{u}_0) < \varepsilon.$

Если выбрать $\varepsilon < \varphi(\tilde{\varepsilon})$, то приходим к противоречию. Связная равномерная устойчивость доказана. Связная равномерная асимптотическая устойчивость доказывается аналогично.

Следствие 2. *Если выполняются условия теоремы 3 и $\varphi \in KR$, то из равномерной асимптотической устойчивости в целом состояния равновесия $u = 0$ системы* (12) *следует связная равномерной асимптотической устойчивость в целом состояния равновесия $x = 0$ системы* (4).

Пусть заданы положительно определенные симметрические матрицы $P_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ и постоянные $c_{ii}, \gamma_i, \nu_i, \mu^* > 0$, $a_{ij}, b_{ij} \ge 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Определим матрицу $\Theta \in \mathbb{R}^{m \times m}$ с компонентами

$$\theta_{ii} = \begin{cases} (-c_{ii} + (\gamma_i^{-2} + \mu^* \nu_i^{-2} b_{ii}^2) \lambda_M(P_i^2) + m(\gamma_i^2 + \mu^* \nu_i^2 + \mu^* \lambda_M(P_i)) a_{ii}^2 \overset{-}{e}{}_{ii}^{2} \lambda_M^{-1}(P_i); \\ m(\gamma_i^2 + \mu^* \nu_i^2 + \mu^* \lambda_M(P_i)) a_{ij}^2 \overline{e}{}_{ij}^{2} \lambda_m^{-1}(P_i), \qquad i \ne j. \end{cases}$$

Относительно временной шкалы $\mathbb{T}$ и системы (4) введем следующие предположения.

Предположение 1.

1. *Существует постоянная $\mu^* > 0$ такая, что $\mu(t) \le \mu^*$ при всех $t \in \mathbb{T}_\tau$.*
2. *Для функций $v_i = x_i^{\mathrm{T}} P_i x_i$ при всех $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ верна оценка $v_i^{\Delta}(x_i)|_{S_i} \le -c_{ii} \|x_i\|^2$, $i = 1, 2, \ldots, m$.*
3. $\|f_i(t, x_i)\| \le b_{ii} \|x_i\|$ *при всех $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $t \in \mathbb{T}_\tau$, $i = 1, 2, \ldots, m$.*
4. $\|h_i(t, x)\| \le \sum_{j=1}^m a_{ij} \|x_j\|$ *при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{T}_\tau$, $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Теорема 4. *Предположим, что существуют положительно определенные симметрические матрицы $P_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ и постоянные $c_{ii}, \gamma_i, \nu_i > 0$, $a_{ij}, b_{ij} \ge 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, такие, что выполняются условия предположения 1 и верны неравенства $0 \le 1 + \mu^* \theta_{ii} < 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Предположим, кроме того, что для любых начальных данных $(t_0, u_0) \in \mathbb{T}_\tau \times \mathbb{R}_+^m$ существует максимальное решение системы*

$$u^{\Delta}(t) = \Theta u(t) \tag{14}$$

при всех $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

Тогда из равномерной асимптотической устойчивости (в целом) состояния равновесия $u = 0$ системы (14) *следует связная асимптотическая устойчивость (в целом) состояния равновесия $x = 0$ системы* (4).

Доказательство. Используя формулу
$v_i^{\Delta}(x_i) = x_i^{\mathrm{T}} P_i x_i^{\Delta} + (x_i^{\Delta})^{\mathrm{T}} P_i x_i + \mu(t)(x_i^{\Delta})^{\mathrm{T}} P_i x_i^{\Delta}$, для Δ-производной функции v_i вдоль решения системы (6) получаем выражение

$$v_i^{\Delta}(x_i(t))|_{(6)} = x_i^{\mathrm{T}} P_i (f_i + \hat{h}_i) + (f_i^{\mathrm{T}} + \hat{h}_i^{\mathrm{T}}) P_i x_i + \mu(t)(f_i^{\mathrm{T}} + \hat{h}_i^{\mathrm{T}}) P_i (f_i + \hat{h}_i) =$$

$$= v_i^{\Delta}(x_i(t))\,|_{S_i} + (x_i^{\mathrm{T}} P_i \hat{h}_i + \hat{h}_i^{\mathrm{T}} P_i x_i) + \mu(t)(f_i^{\mathrm{T}} P_i \hat{h}_i + \hat{h}_i^{\mathrm{T}} P_i f_i) + \mu(t)\hat{h}_i^{\mathrm{T}} P_i \hat{h}_i,$$

где производная функции v_i вдоль решений независимых подсистем (5) имеет вид

$$v_i^{\Delta}(x_i(t))\,|_{S_i} = x_i^{\mathrm{T}} P_i f_i + f_i^{\mathrm{T}} P_i x_i + \mu(t) f_i^{\mathrm{T}} P_i f_i.$$

Из очевидных оценок

$$0 \le \left\| \gamma_i \hat{h}_i - \gamma_i^{-1} P_i x_i \right\|^2 = (\gamma_i \hat{h}_i - \gamma_i^{-1} P_i x_i)^{\mathrm{T}} (\gamma_i \hat{h}_i - \gamma_i^{-1} P_i x_i) =$$

$$= \gamma_i^2 \hat{h}_i^{\mathrm{T}} \hat{h}_i + \gamma_i^{-2} x_i^{\mathrm{T}} P_i^{\mathrm{T}} P_i x_i - (x_i^{\mathrm{T}} P_i \hat{h}_i + \hat{h}_i^{\mathrm{T}} P_i x_i),$$

где $\gamma_i > 0$, следует неравенство

$$x_i^{\mathrm{T}} P_i \hat{h}_i + \hat{h}_i^{\mathrm{T}} P_i x_i \le \gamma_i^2 \hat{h}_i^{\mathrm{T}} \hat{h}_i + \gamma_i^{-2} x_i^{\mathrm{T}} P_i^{\mathrm{T}} P_i x_i, \tag{15}$$

которое позволяет оценить Δ-производную функции v_i вдоль решений системы (6) следующим образом:

$$v_i^{\Delta}(x_i(t))\,|_{(6)} \le -c_{ii} x_i^{\mathrm{T}} x_i + \gamma_i^2 \hat{h}_i^{\mathrm{T}} \hat{h} + \gamma_i^{-2} x_i^{\mathrm{T}} P_i^2 x_i + \mu(t)[\nu_i^2 \hat{h}_i^{\mathrm{T}} \hat{h} + \nu_i^{-2} f_i^{\mathrm{T}} P_i^2 f_i] +$$

$$+ \mu(t) \hat{h}_i^{\mathrm{T}} P \hat{h}_i \le -c_{ii} x_i^{\mathrm{T}} x_i + \gamma_i^2 \hat{h}_i^{\mathrm{T}} \hat{h} + \gamma_i^{-2} x_i^{\mathrm{T}} P_i^2 x_i + \mu^*[\nu_i^2 \hat{h}_i^{\mathrm{T}} \hat{h} + \nu_i^{-2} f_i^{\mathrm{T}} P_i^2 f_i] +$$

$$+ \mu^* \hat{h}_i^{\mathrm{T}} P \hat{h}_i \le -c_{ii} \|x_i\| + \gamma_i^2 \left\|\hat{h}_i\right\|^2 + \gamma_i^{-2} \lambda_M(P_i^2) \|x_i\|^2 + \mu^* \nu_i^2 \left\|\hat{h}_i\right\|^2 + \tag{16}$$

$$+ \mu^* \nu_i^{-2} \lambda_M(P_i^2) \|f_i\|^2 + \mu^* \lambda_M(P_i) \left\|\hat{h}_i\right\|^2 = [-c_{ii} + \gamma_i^{-2} \lambda_M(P_i^2)] \|x_i\|^2 +$$

$$+ \mu^* \nu_i^{-2} \lambda_M(P_i^2) \|f_i\|^2 + [\gamma_i^2 + \mu^* \nu_i^2 + \mu^* \lambda_M(P_i)] \left\|\hat{h}_i\right\|^2.$$

Воспользуемся известным неравенством

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} \tau_i\Big)^2 \le m \sum_{i}^{m} \tau_i^2, \quad \tau_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

и при любом $E(t) \le \overline{E}$ оценим связи $h_i(t, e_{i1}(t) x_1(t), e_{i2}(t) x_2(t), \ldots, e_{im}(t) x_m(t))$:

$$\hat{h}_i^{\mathrm{T}} \hat{h}_i \le \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_{ij}(t) \|x_j\| \right)^2 \le m \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 e_{ij}^2(t) \|x_j\|^2 \le m \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \overline{e}_{ij}^2 \|x_j\|^2.$$

Учитывая вышеполученное неравенство, продолжим оценку (16)

$$v_i^{\Delta}(x_i(t))\,|_{(6)} \le (-c_{ii} + \gamma_i^{-2} \lambda_M(P_i^2)) \|x_i\|^2 + \mu^* \nu_i^{-2} \lambda_M(P_i^2) b_{ii}^2 \|x_i\|^2 +$$

$$+ m(\gamma_i^2 + \mu^* \nu_i^2 + \mu^* \lambda_M(P_i)) \textstyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \overline{e}_{ij}^2 \|x_j\|^2 =$$

$$= \{-c_{ii} + \gamma_i^{-2} \mu^* \nu_i^{-2} b_{ii}^2) \lambda_M(P_i^2) + m(\gamma_i^2 + \mu^* \nu_i^2 + \mu^* \lambda_M(P_i)) a_{ii}^2 \overline{e}_{ii}^2\} \|x_i\|^2 +$$

$$+ \textstyle\sum_{j=1, j \ne i}^{m} m(\gamma_i^2 + \mu^* \nu_i^2 + \mu^* \lambda_M(P_i)) a_{ij}^2 \overline{e}_{ij}^2 \|x_j\|^2.$$

Поскольку по условиям теоремы 4

$$-c_{ii} + (\gamma_i^{-2} + \mu^* \nu_i^{-2} b_{ii}^2)\lambda_M(P_i^2) + m(\gamma_i^2 + \mu^* \nu_i^2 + \mu^* \lambda_M(P_i)) a_{ii}^2 \bar{e}_{ii}^2 < 0,$$

то далее получаем

$$v_i^{\Delta}(x_i(t))\,|_{(6)} \le [-c_{ii} + (\gamma_i^{-2} + \mu^* \nu_i^{-2} b_{ii}^2)\lambda_M(P_i^2) +$$

$$+m(\gamma_i^2 + \mu^* \nu_i^2 + \mu^* \lambda_M(P_i)) a_{ii}^2 \bar{e}_{ii}^2]\lambda_M^{-1}(P_i) v_i(x_i) +$$

$$+\sum\nolimits_{j=1,\, j\ne i}^{m} m\{\gamma_i^2 + \mu^* \nu_i^2 + \mu^* \lambda_M^{-1}(P_i)\} a_{ij}^2 \bar{e}_{ij}^2 \lambda_m^{-1}(P_i) v_j(x_i) =$$

$$= \theta_{ii} v_i(x_i) + \sum\nolimits_{j=1,\, j\ne i}^{m} \theta_{ij} v_j(x_j).$$

Для Δ-производной функции $V = (v_1, v_2, ..., v_m)^{\mathrm{T}}$ вдоль решений системы (6) получим выражение $V^{\Delta}(x(t))\,|_{(6)} \le \Theta V(x(t)).$ Поскольку $0 \le 1 + \mu^* \theta_{ii} \le 1 + \mu(t)\theta_{ii}$ и $\mu(t)\theta_{ij} \ge 0$ при всех $t \in \mathbb{T}$, то функция $u + \ +\mu(t) g(t,u) = u + \mu(t)\Lambda u$ – неубывающая по u.

Таким образом, выполняются все условия теоремы 3 (следствия 2) и, следовательно, из равномерной асимптотической устойчивости (в целом) состояния равновесия $u = 0$ системы (14) следует связная равномерная асимптотическая устойчивость (в целом) состояния равновесия $x = 0$ системы (4). Теорема 4 доказана.

В случае $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ для существования максимального решения системы (14) достаточно, чтобы матрица Θ была матрицей Мецлера [15]. Для случая общей временной шкалы аналогичных достаточных условий на данный момент нет. Для практического применения можно воспользоваться более сильными условиями и потребовать, чтобы матрица Θ была регрессивной и непрерывной, что обеспечит существование единственного решения начальной задачи для системы (14) на $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ при всех $(t_0, x_0) \in \mathbb{T}_{\tau} \times \mathbb{R}^n$ [5]. Поэтому имеет смысл исследование связной устойчивости прямым методом Ляпунова.

Определим матрицу $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ с элементами

$$q_{ij} = \begin{cases} d_i(-c_{ii} + (\gamma_i^{-2} + \mu^* \nu_i^{-2} b_{ii}^2)\lambda_M(P_i^2)) + \sum_{k=1}^{m} d_k(\gamma_k^2 + \mu^* \nu_k^2 + \mu^* \lambda_M(P_k))\, a_{ki}^2 \bar{e}_{ki}^2, i = j; \\ \sum_{k=1}^{m} d_k(\gamma_k^2 + \mu^* \nu_k^2 + \mu^* \lambda_M(P_k))\, a_{ki} a_{kj} \bar{e}_{ki} \bar{e}_{kj}, i \ne j. \end{cases}$$

Теорема 5. *Предположим, что существуют положительно определенные симметрические матрицы* $P_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ *и постоянные* $c_{ii}, d_i, \nu_i, \gamma_i > 0$, $a_{ij}, b_{ij} \ge 0$, $i, j = 1, 2, ..., m$, *такие, что выполняются условия предположения 1. Если матрица* $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *отрицательно определенна, тогда состояние равновесия* $x = 0$ *системы* (4) *связно равномерно асимптотически устойчиво в целом.*

Доказательство. Пусть $\hat{v}_i = \xi_i y_i^2 + \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_{ij} y_j\right)^2$, где $y_i \ge 0$, $\xi_i, \xi_{ij} \in R$, $i, j = 1, 2, ..., m$;

$$\hat{v}_i = \xi_i y_i^2 + \big(\sum_{j=1}^{m} \xi_{ij} y_j\big)^2 = \xi_i y_i^2 + \sum_{j=1}^{m} \xi_{ij}^2 y_j^2 + \sum_{j,k=1,\, j\ne k}^{m} \xi_{ij} \xi_{ij} y_j y_k;$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_i \hat{v}_i = \sum_{i=1}^{m} d_i \xi_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{m} d_i (\sum_{j=1}^{m} \xi_{ij}^2 y_j^2 + \sum_{j,k=1, j\neq k}^{m} \xi_{ij}\xi_{ik} y_j y_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} d_i \xi_i y_i^2 + \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{m} d_i \xi_{ij}^2) y_j^2 + \sum_{j,k=1, j\neq k}^{m} (\sum_{i=1}^{m} d_i \xi_{ij}\xi_{ik}) y_j y_k .$$

Поменяем во втором слагаемом местами индексы i и j, а в последней сумме i и k

$$\sum_{i=1}^{m} d_i \hat{v}_i = \sum_{i=1}^{m} d_i \xi_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{m} d_j \xi_{ji}^2) y_i^2 + \sum_{j,i=1, j\neq i}^{m} (\sum_{k=1}^{m} d_k \xi_{kj}\xi_{ki}) y_j y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i \left[(d_i \xi_i + \sum_{j=1}^{m} d_j \xi_{ji}^2) y_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} (\sum_{k=1}^{m} d_k \xi_{ki}\xi_{kj}) y_j \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i \left[(d_i \xi_i + \sum_{k=1}^{m} d_k \xi_{ki}^2) y_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} (\sum_{k=1}^{m} d_k \xi_{ki}\xi_{kj}) y_j \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i \left[q_{ii} y_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} q_{ij} y_j \right] = y^{\mathrm{T}} Q y ;$$

$$q_{ii} = d_i \xi_i + \sum\nolimits_{k=1}^{m} d_k \xi_{ki}^2 ;$$

$$q_{ij} = d_i \xi_i + \sum\nolimits_{k=1}^{m} d_k \xi_{ki}\xi_{kj}, \qquad i \neq j.$$

Продолжим неравенство (16)

$$v_i^{\Delta} |_{(\tilde{S}_i)} \leq [-c_{ii} + \gamma_i^{-2} \lambda_M (P_i^2)] \|x_i\|^2 + \mu^* v_i^{-2} \lambda_M (P_i^2) \|f_i\|^2 + [\gamma_i^2 + \mu^* v_i^2 + \mu^* \lambda_M (P_i)] \|\hat{h}_i\|^2 \leq$$

$$\leq [-c_{ii} + \gamma_i^{-2} \lambda_M (P_i^2)] \|x_i\|^2 + \mu^* v_i^{-2} \lambda_M (P_i^2) b_{ii}^2 \|x_i\|^2 +$$

$$+ [\gamma_i^2 + \mu^* v_i^2 + \mu^* \lambda_M (P_i)] \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \overline{e}_{ij} \|x_j\| \right)^2 .$$

Если введем обозначения

$$y_i = \|x_i\|,$$

$$\xi_i = -c_{ii} + (\gamma_i^{-2} + \mu^* v_i^{-2} b_{ii}^2) \lambda_M (P_i^2), \tag{17}$$

$$\xi_{ij} = \sqrt{\gamma_i^2 + \mu^* v_i^2 + \mu^* \lambda_M (P_i)}\, a_{ij} \overline{e}_{ij},$$

тогда имеем

$$q_{ij} = \begin{cases} d_i (-c_{ii} + (\gamma_i^{-2} + \mu^* v_i^{-2} b_{ii}^2) \lambda_M (P_i^2)) + \sum\nolimits_{k=1}^{m} d_k (\gamma_k^2 + \mu^* v_k^2 + \mu^* \lambda_M (P_k)) a_{ki}^2 \overline{e}_{ki}^2, \ i = j; \\ \sum\nolimits_{k=1}^{m} d_k (\gamma_k^2 + \mu^* v_k^2 + \mu^* \lambda_M (P_k)) a_{ki} a_{kj} \overline{e}_{ki} \overline{e}_{kj}, \ i \neq j. \end{cases} \tag{18}$$

Таким образом, для Δ-производной функции v вдоль решений системы (6) при любой $E(t) \le \bar{E}$ получили оценку $v^{\Delta}(x)|_S \le \phi^{\mathrm{T}}(x)\, Q\phi(x)$, где $\phi(x) = (\|x_1\|, \|x_2\|, ..., \|x_m\|)^{\mathrm{T}} \in R^m$; $Q \in R^{m\times m}$ – матрица с элементами вида (18). Поскольку матрица Q отрицательно определенная, то выполняются условия следствия 1 и при всех $E(t) \le \bar{E}$ состояние равновесия $x = 0$ системы (6) равномерно асимптотически устойчиво в целом. Следовательно, состояние равновесия $x = 0$ системы (4) равномерно связно асимптотически устойчиво в целом. Таким образом, теорема 5 доказана.

5. Связная устойчивость нейронной системы.

Рассмотрим нейронную сеть на временной шкале, динамика которой описывается уравнениями вида

$$x^{\Delta}(t) = -Bx(t) + Ts(x(t)), \qquad t \in \mathbb{T}_{\tau}. \tag{19}$$

Решение $x(t;t_0,x_0)$ при $t = t_0$ принимает значение x_0, т.е.

$$x(t_0;t_0,x_0) = x_0, \quad t_0 \in \mathbb{T}_{\tau}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{20}$$

В системе (19) вектор $x \in \mathbb{R}^n$ характеризует состояние нейронов, $T = \{t_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, компоненты t_{ij} описывают связи между i-ым и j-тым нейронами, $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $s(x) = (s_1(x_1),\ s_2(x_2), ...,\ s_n(x_n))^{\mathrm{T}}$, функция s_i описывает ответ i-го нейрона, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B = \operatorname{diag}\{b_1,\ b_2, ..., b_n\}$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, тогда $x^{\Delta} = d/dt$ и начальная задача (19) – (20) эквивалентна начальной задаче для непрерывной нейронной системы типа Хопфилда [8]

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Bx(t) + Ts(x(t)), \qquad t \ge \tau, \tag{21}$$

$$x(t_0;t_0,x_0) = x_0, \quad t_0 \ge \tau, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{22}$$

Если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ и $0 < b_i \le 2$, тогда $x^{\Delta}(k) = x(k+1) - x(k) = \Delta x(k)$, $\mathbb{T}_{\tau} = \{\tau, \tau+1, \tau+2, ...\}$ и начальная задача (19) – (20) эквивалентна следующей [7]:

$$\Delta x(k) = -Bx(k) + Ts(x(k)), \qquad t \in \mathbb{T}_{\tau}, \tag{23}$$

$$x(k_0;k_0,x_0) = x_0, \quad k_0 \in \mathbb{T}_{\tau}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{24}$$

О системе (19) введем следующие предположения:

H_1: вектор-функция $f(x) = -Bx + Ts(x)$ является регрессивной;

H_2: существуеют положительные постоянные $l_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$, такие, что

$$|\,s_i(u) - s_i(v)\,| \le l_i\,|\,u - v\,| \text{ при всех } u, v \in \mathbb{R};$$

H_3: $s(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Если выполняются предположения $\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_3$, то при любых начальных данных $(t_0, x_0) \in \mathbb{T}_{\tau} \times \mathbb{R}^n$ задача (19), (20) имеет точно одно решение на $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ [5]. Обозначим $\Lambda = \operatorname{diag}\{l_1^{-1}, l_2^{-1}, \ldots, l_n^{-1}\}$. Условие регрессивности функции $f(x) = -Bx + Ts(x)$ получено в работе [4] и имеет следующий вид.

Теорема 6. *Пусть выполнено предположение* H_2. *Если при каждом фиксированном* $t \in T$ *матрица* $(I-\mu(t)B)\Lambda^{-1}-\mu(t)\,|T|$ *является* M *-матрицей, то функция* $f(x)=-Bx+Ts(x)-$ *регрессивна.*

Декомпозируем систему (19) таким образом:

$$x_i^{\Delta}(t)=-b_ix_i(t)+t_{ii}s_i(x_i(t))+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}t_{ij}s_j(x_j(t)),\qquad i=1,2,\dots,n, \tag{25}$$

и введем обозначения

$$f_i(t,x_i)=-b_ix_i+t_{ii}s_i(x_i),$$

$$h_i(t,x)=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}t_{ij}s_j(x_j),\qquad i=1,2,\dots,n.$$

Элементы фундаментальной матрицы связей $\overline{E}$ имеют вид

$$\overline{e}_{ii}=0,$$
$$\overline{e}_{ij}=0,\qquad i\neq j,\quad t_{ij}=0,$$
$$\overline{e}_{ij}=1,\qquad i\neq j,\quad t_{ij}\neq 0.$$

При $E=0$ система (25) распадается на n невзаимодействующих друг с другом нейронов

$$x_i^{\Delta}(t)=-b_ix_i(t)+t_{ii}s_i(x_i(t)),\qquad i=1,2,\dots,n. \tag{26}$$

Далее используем функции $v_i(x_i)=p_ix_i^2$, где $p_i>0$, $i=1,2,\dots,n$, для которых верно $v_i^{\Delta}(x_i)=2p_ix_i^{\Delta}+\mu(t)p_i(x_i^{\Delta})^2$ и

$$v_i^{\Delta}(x_i)\,|_{(26)}=2p_i\big(-b_ix_i(t)+t_{ii}s_i(x_i(t))\big)+\mu(t)p_i\big(-b_ix_i(t)+t_{ii}s_i(x_i(t))\big)^2=$$

$$=-2p_ib_ix_i^2+2p_it_{ii}x_is_i(x_i)+\mu(t)p_ib_i^2x_i^2-2\mu(t)p_ib_it_{ii}x_is_i(x_i)+\mu(t)p_it_{ii}^2s_i^2(x_i)\le$$

$$\le-2p_ib_ix_i^2+2p_i\,|t_{ii}|\,l_ix_i^2+\mu^*p_ib_i^2x_i^2+2\mu^*p_ib_i\,|t_{ii}|\,l_ix_i^2+\mu^*p_it_{ii}^2l_i^2x_i^2=$$

$$=\big(-2p_ib_i+2p_i\,|t_{ii}|\,l_i+\mu^*p_i(b_i^2+2l_ib_i\,|t_{ii}|+l_i^2t_{ii}^2)\big)x_i^2.$$

Кроме того, $|f_i(t,x_i)|\le b_i\,|x_i|+l_i\,|t_{ii}|\,|x_i|$, поэтому имеем равенства

$$a_{ii}=0,\quad a_{ij}=|t_{ij}|,\quad i\neq j,$$

$$b_{ii}=b_i+l_i\,|t_{ii}|,$$

$$c_{ii}=2p_ib_i-2p_il_i\,|t_{ii}|-\mu^*p_i(b_i+l_i\,|t_{ii}|)^2,$$

$$\theta_{ii}=-2p_ib_i+2p_il_i\,|t_{ii}|+\mu^*p_i(b_i+l_i\,|t_{ii}|)^2+(\gamma_i^{-2}+\mu^*\nu_i^{-2}b_{ii}^2)p_i^2,$$

$$\theta_{ij}=n(\gamma_i^2+\mu^*\nu_i^2+\mu^*p_i)t_{ij}^2\overline{e}_{ij}^2p_i^{-1},\qquad i\neq j,$$

$$q_{ii} = d_i\left(-2p_ib_i + 2p_il_i\left|t_{ii}\right| + \mu^* p_i(b_i + l_i\left|t_{ii}\right|)^2 + (\gamma_i^{-2} + \mu^*\nu_i^{-2}b_{ii}^2)p_i^2\right) +$$

$$+\sum\nolimits_{k=1}^{n} d_k(\gamma_k^2 + \mu^*\nu_k^2 + \mu^* p_k)a_{ki}^2\overline{e}_{ki}^{-2};$$

$$q_{ij} = \sum\nolimits_{k=1}^{n} d_k(\gamma_k^2 + \mu^*\nu_k^2 + \mu^* p_k)a_{ki}a_{kj}\overline{e}_{ki}\overline{e}_{kj}, \qquad i \ne j. \tag{27}$$

Таким образом, достаточные условия связной устойчивости для нейронной системы (19) даются теоремами 4 и 5 в случае, когда матрицы Θ и Q имеют коэффициенты вида (27).

6. Пример.

В качестве численного примера рассмотрим двухкомпонентную нейронную сеть

$$x_1^{\Delta} = -b_1x_1 + t_{11}s(x_2) + t_{12}s(x_2),$$

$$x_2^{\Delta} = -b_2x_1 + t_{21}s(x_1) + t_{22}s(x_2), \tag{28}$$

где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; $b_1 = b_2 = 0,7$; $T = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$; $s(r) = \operatorname{th} r$.

Фундаментальная матрица связей $\overline{E}$ имеют вид $\overline{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Выберем $p_1 = p_2 = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$ и вычислим постоянные, фигурирующие в условиях теорем 4 и 6:

$$\left\|T\right\| = 0,1414, \quad l_1 = l_2 = 1;$$

$$c_{11} = c_{22} = 1,2 - 0,64\mu^*;$$

$$\theta_{11} = \theta_{22} = -0,2 + 1,28\mu^*;$$

$$\theta_{12} = \theta_{21} = 0,02 + 0,04\mu^*.$$

Теорема 6 дает такое условие регрессивности: $\mu(t) \le 1,1111$. Из условия $0 \le 1 + \mu^*\theta_{ii} < 1$ теоремы 4 получаем еще одно ограничение на зернистость временной шкалы $\mu^* <$ 0,1562. Выберем $\mu^* = 0,1$. Матрица

$$\Theta = \begin{pmatrix} -0,072 & 0,024 \\ 0,024 & -0,072 \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа $\lambda_1(\Theta) = -0,096$, $\lambda_2(\Theta) = -0,048$, собственные векторы $\zeta_1 =$ $(0,7071; -0,7071)^{\mathrm{T}}$, $\zeta_2 = (0,7071; 0,7071)^{\mathrm{T}}$ и будет регрессивна, если $\mu(t) \ne 1/0,096 =$ $10,4167$, $\mu(t) \ne 1/0,048 = 20,8333$.

Общее решение системы (14) имеет вид

$$u(t) = C_1e_{-0,096}(t,t_0)\begin{pmatrix} 0,7071 \\ -0,7071 \end{pmatrix} + C_2e_{-0,048}(t,t_0)\begin{pmatrix} 0,7071 \\ 0,7071 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\delta = \varepsilon$ и рассмотрим начальные значения $u_0 \in \mathbb{R}^2$ такие, что $\|u_0\| = \|C_1\zeta_1 + C_2\zeta_2\| < \delta$. Тогда, учитывая лемму 2 и то, что $\zeta_1^T \zeta_2 = 0$, имеем

$$\|u(t)\|^2 = \|C_1 e_{-0,096}(t,t_0)\zeta_1 + C_2 e_{-0,048}(t,t_0)\zeta_2\|^2 =$$

$$= \left(C_1 e_{-0,096}(t,t_0)\zeta_1 + C_2 e_{-0,048}(t,t_0)\zeta_2\right)^{\mathrm{T}} \left(C_1 e_{-0,096}(t,t_0)\zeta_1 + C_2 e_{-0,048}(t,t_0)\zeta_2\right) =$$

$$= C_1^2 e_{-0,096}^2(t,t_0)\zeta_1^{\mathrm{T}}\zeta_1 + C_2^2 e_{-0,048}(t,t_0)^2 \zeta_2^{\mathrm{T}}\zeta_2 \le C_1^2 \zeta_1^{\mathrm{T}}\zeta_1 + C_2^2 \zeta_2^{\mathrm{T}}\zeta_2 =$$

$$= (C_1\zeta_1 + C_2\zeta_2)^{\mathrm{T}} (C_1\zeta_1 + C_2\zeta_2) < \delta^2 = \varepsilon^2,$$

откуда следует равномерная устойчивость нулевого состояния равновесия системы сравнения (14).

В силу леммы 2 для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что $\left|e_{\zeta_i}(t,t_0)\right| < \varepsilon$ при всех $t_0 \in \mathbb{T}_\tau$, $t \in [t_0 + \sigma, +\infty)_{\mathbb{T}}$ и $i = 1,2$. Теперь для любых $\Delta > 0$ и начальных значений $u_0 \in \mathbb{R}^2$ таких, что $\|u_0\| = \|C_1\zeta_1 + C_2\zeta_2\| < \Delta$, будем иметь

$$\|u(t)\|^2 = C_1^2 e_{-0,096}^2(t,t_0)\zeta_1^{\mathrm{T}}\zeta_1 + C_2^2 e_{-0,048}(t,t_0)^2 \zeta_2^{\mathrm{T}}\zeta_2 \le$$

$$\le (C_1^2\zeta_1^{\mathrm{T}}\zeta_1 + C_2^2\zeta_2^{\mathrm{T}}\zeta_2)\varepsilon^2 = \left(C_1\zeta_1 + C_2\zeta_2\right)^{\mathrm{T}}\left(C_1\zeta_1 + C_2\zeta_2\right)\varepsilon^2 < \Delta^2\varepsilon^2,$$

откуда следует равномерная асимптотическая устойчивость нулевого состояния равновесия системы сравнения (14). На основании теоремы 4 делаем вывод о связной равномерной асимптотической устойчивости в целом нулевого состояния равновесия нейронной системы (28) при условии $\mu(t) \le 0,1$.

Заключение.

В настоящей работе исследование связной устойчивости нулевого состояния равновесия нелинейной системы на временной шкале проведено в рамках метода сравнения и прямым методом Ляпунова на основе векторной функции. Полученные достаточные условия связной равномерной асимптотической устойчивости (в целом) использованы при исследовании на устойчивость нейронной системы типа Хопфилда на временной шкале. При этом требования на активаторные функции s_i ослаблены по сравнению с требованиями работы [16].

Получены также предварительные результаты, а именно достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости (в целом) нулевого состояния равновесия нелинейной системы на временной шкале и один вариант принципа сравнения для таких систем.

Эффективность полученных достаточных условий проверена на конкретном числовом примере.

В дальнейшем имеет смысл провести предложенным в работе способом исследование поведения неточных систем [10, 13] на временной шкале, а также получить для временной шкалы результаты, аналогичные результатам работы [11].

Р Е З Ю М Е . Встановлено умови звязної стійкості для динамічної системи на часовій шкалі. Отримані умови звязної стійкості ілюструються на чисельному прикладі.

1. *Бохнер М., Мартынюк А.А.* Элементы теории устойчивости А.М.Ляпунова для динамических уравнений на временной шкале // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 9. – С. 3 – 27.
2. *Лукьянова Т.А., Мартынюк А.А.* Анализ связной устойчивости дискретной системы // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 9. – С. 102 – 110.
3. *Мартынюк А.А.* Об неустойчивости решений динамических уравнений на временной шкале // Доп. НАН України. – 2009. – № 10. – С. 21 – 26.
4. *Мартынюк А.А., Лукьянова Т.А.* Об устойчивости нейронной сети на временной шкале // Доп. НАН України. – 2010. – № 1. – С. 21 – 26.
5. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications. – Boston: Birkhäuser, 2001. – 358 p.
6. *Grujic Lj.T., Siljak D.D.* Exponential stability of Large-scale discrete systems // Int. J. Control. – 1974. – **19**, N 3. – P. 481 – 491.
7. *Feng Z., Michel A.N.* Robustness analysis of a class of discrete-time systems with applications to neural networks // IEEE Trans. on Circuits and Systems. – 2003. – **46**, N 12. – 1482 – 1486.
8. *Hopfield J.J.* Neurons with graded response have collective computational properties like those of two state neurons // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 81 – 1984. – P. 3088 – 3092.
9. *Ikeda M., Siljak D.D.* Hierarchical Liapunov function // J. Math. Anal. Appl. – 1985. – **112**, N 1. – P. 110 – 128.
10. *Khoroshun A.S.* Global Parametric Quadratic Stabilizability of Nonlinear Systems with Uncertainty // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 6. – P. 703 – 709.
11. *Lukyanova T.A.* On Certain Variant of Stability Conditions and Finiteness of Equilibrium States of Descrete in Time Mechanical Systems // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 8. – P. 917 – 922.
12. *Martynyuk-Chernienko Yu.A., Chernetskaya L.N.* Analysis of Exponential Stability of Motion on Times Scale // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 4. – P. 461 – 466.
13. *Martynyuk A.A., Khoroshun A.S.* On Parametric Asymptotic Stability of Large-Scale Systems // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 5. – P. 565 – 574.
14. *Siljak D.D.* Stability of Large-Scale Systems Under Structural Perturbations // IEEE Transactions. – 1972. – SMC-2. – P. 657 – 663.
15. *Siljak D.D.* Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure. – New-York: North Holand, 1978. – 416 p.
16. *Tseng H.C., Siljak D.D.* A Learning Scheme for Dynamic Neural Networks: Equilibrium Manifold and Connective Stability // Neural Networks. – 1995. – **8**, N. 6. – P. 853 – 864.

Поступила 07.10.2010 Утверждена в печать 26.06.2012