

**А.Я.Григоренко, О.В.Вовкодав, С.Н.Яремченко**  
**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕТОНЫХ**  
**СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ**  
**ПРИ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ НАГРУЗКАХ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;  
e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru, oxanaukr2111@hotmail.com, yaremch@gmail.com*

**Abstract.** In terms of the based on the straight line hypothesis theory, an analysis of a stress-strain state on non-thin spherical shells of variable thickness under the localized loads is carried out. To reduce the two-dimensional boundary problems to the one-dimensional ones, the spline-collocation method is used. The one-dimensional boundary problems are solved with the discrete-orthogonalization method. An analysis of displacements and stresses distribution in shells is carried out depending on the location of distributed loading as well as on parameters of thickness variation.

**Keywords:** spherical shell, refined statement, varying thickness, spline-collocation method.

**Введение.**

Во многих областях современной техники широко применяются сферические оболочки переменной толщины. Это обуславливает необходимость расчета их напряженно-деформированного состояния. Исследование прочностных характеристик отмеченных оболочек сопряжено со значительными трудностями вычислительного характера, обусловленными сложностью исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных и соответствующих граничных условий.

Основные численные методы для исследования напряженно-деформированного состояния оболочек и рекомендации по их применению изложены в [4, 6, 7]. В [11, 14, 15] проведены исследования некоторых классов сферических оболочек.

В данной статье рассмотрена задача о напряженно-деформированном состоянии сферических оболочек, толщина которых может изменяться в одном или двух координатных направлениях, при определенных видах закрепления их сторон и действии локализованной нагрузки. При этом исследовано влияние изменения толщины при сохранении веса оболочек на их напряженно-деформированное состояние. Решение задачи проведено в неклассической постановке на основе уточненной модели прямолинейного элемента [1, 3, 5, 12, 13].

**1. Постановка задачи.**

Рассмотрим нетонкие сферические оболочки, толщина которых изменяется в одном или двух координатных направлениях, в уточненной постановке, основанной на гипотезе прямолинейного элемента. Суть принятой гипотезы состоит в том, что первоначально нормальный к координатной поверхности элемент после деформации остается прямолинейным, но не перпендикулярным к деформированной координатной поверхности. При этом принимаем, что указанный элемент не изменяет свою длину. Оболочка отнесена к ортогональной системе координат  $\theta, \varphi, \gamma$ , где  $\theta, \varphi$  – сферические координаты, а  $\gamma$  – нормальная к поверхности приведения координата.

В соответствии с принятой гипотезой перемещения оболочки представим в виде

$$\begin{aligned} u_\theta(\theta, \varphi, \gamma) &= u(\theta, \varphi) + \gamma \psi_\theta(\theta, \varphi); & u_\varphi(\theta, \varphi, \gamma) &= v(\theta, \varphi) + \gamma \psi_\varphi(\theta, \varphi); \\ u_\gamma(\theta, \varphi, \gamma) &= w(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u_\theta, u_\varphi, u_\gamma$  – соответствующие перемещения;  $u, v, w$  – перемещения точек координатной поверхности в направлениях  $\theta, \varphi, \gamma$ ;  $\psi_\theta, \psi_\varphi$  – полные углы поворота прямолинейного элемента. В соответствии с (1) выражения для деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} e_\theta(\theta, \varphi, \gamma) &= \varepsilon_\theta(\theta, \varphi) + \gamma \kappa_\theta(\theta, \varphi); & e_\varphi(\theta, \varphi, \gamma) &= \varepsilon_\varphi(\theta, \varphi) + \gamma \kappa_\varphi(\theta, \varphi); \\ e_{\theta\varphi}(\theta, \varphi, \gamma) &= \varepsilon_{\theta\varphi}(\theta, \varphi) + \gamma 2\kappa_{\theta\varphi}(\theta, \varphi); & e_{\theta\gamma}(\theta, \varphi, \gamma) &= \gamma_\theta(\theta, \varphi); & e_{\varphi\gamma}(\theta, \varphi, \gamma) &= \gamma_\varphi(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \left( \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right); \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cos \theta \right) + \frac{w}{r}; \quad \varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \cos \theta \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}; \right. \\ \left. \kappa_\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) \right); \quad \kappa_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \cos \theta \left( \psi_\theta - \frac{u}{r} \right) \right) - \frac{w}{r^2}; \right. \\ \left. 2\kappa_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \varphi} + \cos \theta \left( \frac{v}{r} - \psi_\varphi \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right); \right. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\gamma_\theta = \psi_\theta - \mathcal{G}_\theta; \quad \gamma_\varphi = \psi_\varphi - \mathcal{G}_\varphi; \quad \mathcal{G}_\theta = \frac{1}{r} \left( u - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right); \quad \mathcal{G}_\varphi = \frac{1}{r} \left( v - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right);$$

$\varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_{\theta\varphi}$  – тангенциальные, а  $\kappa_\theta, \kappa_\varphi, \kappa_{\theta\varphi}$  – изгибные деформации координатной поверхности;  $\mathcal{G}_\theta, \mathcal{G}_\varphi$  – углы поворота нормали без учета поперечных сдвигов;  $\gamma_\theta, \gamma_\varphi$  – углы поворота нормали, обусловленные поперечными сдвигами).

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \cos \theta (N_\theta - N_\varphi) + \sin \theta \left( \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + Q_\theta \right) + \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + 2 \cos \theta N_{\theta\varphi} + \sin \theta \left( \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + Q_\varphi \right) = 0; \\ \cos \theta Q_\theta + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + \sin \theta \left( \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - N_\theta - N_\varphi + r q_\gamma \right) = 0; \\ \cos \theta (M_\theta - M_\varphi) + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \sin \theta \left( \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - r Q_\theta \right) = 0; \\ \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + 2 \cos \theta M_{\theta\varphi} + \sin \theta \left( \frac{\partial M_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r Q_\varphi \right) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $N_\theta, N_\varphi, N_{\theta\varphi}, N_{\varphi\theta}$  – тангенциальные усилия;  $Q_\theta, Q_\varphi$  – перерезывающие усилия;  $M_\theta, M_\varphi, M_{\theta\varphi}, M_{\varphi\theta}$  – изгибающие и крутящие моменты.

Соотношения упругости для ортотропных оболочек симметричной структуры по толщине относительно выбранной координатной поверхности принимают вид

$$N_\theta = C_{11} \varepsilon_\theta + C_{12} \varepsilon_\varphi; \quad N_\varphi = C_{12} \varepsilon_\theta + C_{22} \varepsilon_\varphi;$$

$$N_{\theta\varphi} = C_{66}\varepsilon_{\theta\varphi} + 2k_2D_{66}\kappa_{\theta\varphi}; \quad N_{\varphi\theta} = C_{66}\varepsilon_{\theta\varphi} + 2k_1D_{66}\kappa_{\theta\varphi};$$

$$M_{\theta} = D_{11}\kappa_{\theta} + D_{12}\kappa_{\varphi}; \quad M_{\varphi} = D_{12}\kappa_{\theta} + D_{22}\kappa_{\varphi}; \quad (5)$$

$$M_{\varphi\theta} = M_{\theta\varphi} = 2D_{66}\kappa_{\theta\varphi}; \quad Q_{\theta} = K_1\gamma_{\theta}; \quad Q_{\varphi} = K_2\gamma_{\varphi}$$

$$\left( \begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_{\theta}h}{1-\nu_{\theta}\nu_{\varphi}}; & C_{12} &= \nu_{\varphi}C_{11}; & C_{22} &= \frac{E_{\varphi}h}{1-\nu_{\theta}\nu_{\varphi}}; & C_{66} &= G_{\theta\varphi}h; & D_{11} &= \frac{E_{\theta}h^3}{12(1-\nu_{\theta}\nu_{\varphi})}; \\ D_{12} &= \nu_{\varphi}D_{11}; & D_{22} &= \frac{E_{\varphi}h^3}{12(1-\nu_{\theta}\nu_{\varphi})}; & D_{66} &= \frac{G_{\theta\varphi}h^3}{12}; & K_1 &= \frac{5}{6}hG_{\theta\gamma}; & K_2 &= \frac{5}{6}hG_{\varphi\gamma}. \end{aligned} \right) \quad (6)$$

В формулах (6)  $E_{\theta}, E_{\varphi}, \nu_{\theta}, \nu_{\varphi}$  – модули упругости и коэффициенты Пуассона в направлениях  $\theta$  и  $\varphi$ ;  $G_{\theta\varphi}, G_{\theta\gamma}, G_{\varphi\gamma}$  – модули сдвига;  $h = h(\theta, \varphi)$  – толщина оболочки.

Для определения напряжений в ортотропных прямоугольных в плане пологих оболочках будем исходить из соотношений закона Гука [1, 2]

$$e_{\theta} = b_{11}\sigma_{\theta} + b_{12}\sigma_{\varphi}; \quad e_{\varphi} = b_{12}\sigma_{\theta} + b_{22}\sigma_{\varphi}; \quad e_{\theta\varphi} = b_{66}\tau_{\theta\varphi}; \quad e_{\theta\gamma} = b_{55}\tau_{\theta\gamma}; \quad e_{\varphi\gamma} = b_{44}\tau_{\varphi\gamma} \quad (7)$$

$$\left( \begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{E_{\theta}}; & b_{12} &= -\frac{\nu_{\theta}}{E_{\theta}} = -\frac{\nu_{\varphi}}{E_{\varphi}}; & b_{22} &= \frac{1}{E_{\varphi}}; & b_{66} &= \frac{1}{G_{\theta\varphi}}; & b_{44} &= \frac{1}{G_{\varphi\gamma}}; & b_{55} &= \frac{1}{G_{\theta\gamma}}. \end{aligned} \right) \quad (8)$$

Разрешив равенства (7) относительно напряжений и используя (2), получаем выражения для напряжений через деформации координатной поверхности

$$(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\sigma_{\theta} = b_{22}(\varepsilon_{\theta} + \gamma\kappa_{\theta}) - b_{12}(\varepsilon_{\varphi} + \gamma\kappa_{\varphi});$$

$$(b_{12}^2 - b_{11}b_{22})\sigma_{\varphi} = b_{12}(\varepsilon_{\theta} + \gamma\kappa_{\theta}) - b_{11}(\varepsilon_{\varphi} + \gamma\kappa_{\varphi}); \quad (9)$$

$$b_{66}\tau_{\theta\varphi} = \varepsilon_{\theta\varphi} + 2\gamma\kappa_{\theta\varphi}; \quad b_{55}\tau_{\theta\gamma} = \gamma_{\theta}; \quad b_{44}\tau_{\varphi\gamma} = \gamma_{\varphi}.$$

Разрешающими функциями выберем компоненты вектора перемещения и полные углы поворота  $u, v, w, \psi_{\theta}, \psi_{\varphi}$ . После некоторых преобразований из указанных основных уравнений уточненной теории оболочек получаем систему пяти разрешающих дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= a_{11} \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + a_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + a_{14} u + a_{15} \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial \varphi} + a_{17} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + a_{18} v + a_{19} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ &+ a_{1,10} w + a_{1,11} \frac{\partial \psi_{\theta}}{\partial \varphi} + a_{1,12} \frac{\partial^2 \psi_{\theta}}{\partial \varphi^2} + a_{1,13} \psi_{\theta} + a_{1,14} \frac{\partial \psi_{\varphi}}{\partial \theta} + a_{1,15} \frac{\partial^2 \psi_{\varphi}}{\partial \theta \partial \varphi} + a_{1,16} \frac{\partial \psi_{\varphi}}{\partial \varphi} + a_{1,17} \psi_{\varphi}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= a_{21} \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \varphi} + a_{23} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + a_{24} u + a_{25} \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{26} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + a_{27} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + a_{28} v + a_{29} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \\ &+ a_{2,10} w + a_{2,11} \frac{\partial \psi_{\theta}}{\partial \theta} + a_{2,12} \frac{\partial^2 \psi_{\theta}}{\partial \theta \partial \varphi} + a_{2,13} \frac{\partial \psi_{\theta}}{\partial \varphi} + a_{2,14} \psi_{\theta} + a_{2,15} \frac{\partial \psi_{\varphi}}{\partial \varphi} + a_{2,16} \frac{\partial^2 \psi_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + a_{2,17} \psi_{\varphi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= a_{31} \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{32} u + a_{33} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + a_{34} v + a_{35} \frac{\partial w}{\partial \theta} + a_{36} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + a_{37} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + a_{38} w + a_{39} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \\
&\quad + a_{3,10} \psi_\theta + a_{3,11} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \varphi} + a_{3,12} \psi_\varphi + a_{3,13} q_\gamma; \\
\frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} &= a_{41} \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{42} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + a_{43} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + a_{44} u + a_{45} \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{46} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial \varphi} + a_{47} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \\
&\quad + a_{48} v + a_{49} \frac{\partial w}{\partial \theta} + a_{4,10} w + a_{4,11} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + a_{4,12} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \varphi} + a_{4,13} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \varphi^2} + \\
&\quad + a_{4,14} \psi_\theta + a_{4,15} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \theta} + a_{4,16} \frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial \theta \partial \varphi} + a_{4,17} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \varphi} + a_{4,18} \psi_\varphi; \\
\frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial \theta^2} &= a_{51} \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{52} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \varphi} + a_{53} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + a_{54} u + a_{55} \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{56} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + a_{57} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \\
&\quad + a_{58} v + a_{59} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + a_{5,10} w + a_{5,11} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + a_{5,12} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta \partial \varphi} + a_{5,13} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \varphi} + \\
&\quad + a_{5,14} \psi_\theta + a_{5,15} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \theta} + a_{5,16} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \varphi} + a_{5,17} \frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial \varphi^2} + a_{5,18} \psi_\varphi.
\end{aligned} \tag{10}$$

Коэффициенты  $a_{ij}$  в общем случае зависят от  $\theta$  и  $\varphi$ .

Рассмотрим задачу при условиях, когда края оболочки жестко закреплены, т.е.

$$u = v = w = \psi_\theta = \psi_\varphi = 0. \tag{11}$$

## 2. Метод решения задачи.

Для решения рассматриваемого класса двумерных краевых задач применим подход, основанный на аппроксимации искомого решения в одном координатном направлении с помощью сплайн-функций, а для решения полученной при этом одномерной краевой задачи используем устойчивый численный метод дискретной ортогонализации [2, 3, 8 – 10].

В систему (10) входят производные от разрешающих функций по координате  $\varphi$  не выше второго порядка. На этом основании при аппроксимации решений по координате  $\varphi$  ограничимся сплайн-функциями третьей степени. Тогда искомое решение краевой задачи для системы уравнений (10) с соответствующими граничными условиями представим в следующем виде [3, 8, 10]:

$$\begin{aligned}
u(\theta, \varphi) &= \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \varphi_{1i}(\varphi); \quad v(\theta, \varphi) = \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \varphi_{2i}(\varphi); \quad w(\theta, \varphi) = \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \varphi_{3i}(\varphi); \\
\psi_\theta(\theta, \varphi) &= \sum_{i=0}^N \psi_{\theta i}(\theta) \varphi_{4i}(\varphi); \quad \psi_\varphi(\theta, \varphi) = \sum_{i=0}^N \psi_{\varphi i}(\theta) \varphi_{5i}(\varphi),
\end{aligned} \tag{12}$$

где  $u_i(\theta), v_i(\theta), w_i(\theta), \psi_{\theta i}(\theta), \psi_{\varphi i}(\theta)$  – искомые функции переменной  $\theta$ ,  $\varphi_{ji}(\varphi)$  ( $j = \overline{1,5}$ ) – линейные комбинации  $B$ -сплайнов на равномерной сетке  $\Delta: 0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_N = b$ , удовлетворяющие граничным условиям на контурах  $\varphi = 0$  и  $\varphi = b$ . В систему входят производные от разрешающих функций по координате  $\varphi$  не выше второго порядка; в этом случае ограничимся их аппроксимацией сплайн-функциями третьей степени

$$B_3^i(\varphi) = \begin{cases} 0, & -\infty < \varphi < \varphi_{i-2}; \\ z^3, & \varphi_{i-2} \leq \varphi < \varphi_{i-1}; \\ -3z^3 + 3z^2 + 3z + 1, & \varphi_{i-1} \leq \varphi < \varphi_i; \\ 3z^3 - 6z^2 + 4, & \varphi_i \leq \varphi < \varphi_{i+1}; \\ (1-z)^3, & \varphi_{i+1} \leq \varphi < \varphi_{i+2}; \\ 0, & \varphi_{i+2} \leq \varphi < \infty, \end{cases} \quad (13)$$

где  $z = (\varphi - \varphi_k) / h_\varphi$  на интервале  $[\varphi_k, \varphi_{k+1}]$ ;  $k = \overline{i-2, i+1}$ ;  $i = \overline{-1, N+1}$ ;  $h_\varphi = \varphi_{k+1} - \varphi_k = \text{const}$ .

При этом функции  $\varphi_{ji}(\varphi)$  формируются таким образом:

1) если соответствующая разрешающая функция равна нулю, то

$$\begin{aligned} \varphi_{j0}(\varphi) &= -4B_3^{-1}(\varphi) + B_3^0(\varphi); \quad \varphi_{j1}(\varphi) = B_3^{-1}(\varphi) - \frac{1}{2}B_3^0(\varphi) + B_3^1(\varphi); \\ \varphi_{ji}(\varphi) &= B_3^i(\varphi) \quad (i = 2, 3, \dots, N-2); \end{aligned} \quad (14)$$

2) если производная по  $\varphi$  разрешающей функции равна нулю, то

$$\begin{aligned} \varphi_{j0}(\varphi) &= B_3^0(\varphi); \quad \varphi_{j1}(\varphi) = B_3^{-1}(\varphi) - \frac{1}{2}B_3^0(\varphi) + B_3^1(\varphi); \\ \varphi_{ji}(\varphi) &= B_3^i(\varphi), \quad (i = 2, 3, \dots, N-2). \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогично представляются функции  $\varphi_{j,N-1}(\varphi)$  и  $\varphi_{j,N}(\varphi)$ .

Подставляя решение (12) в разрешающую систему уравнений (10) и в соответствии с методом сплайн-коллокации требуя их удовлетворения в заданных точках коллокации  $\xi_k \in [0, b], k = \overline{0, N}$ , получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка  $10(N+1)$ , которая в нормальной форме Коши имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{R}}{d\theta} &= A(\theta)\bar{R} + \bar{f}(\theta) \\ (\bar{R} &= \{u_0, u_1, \dots, u_N, u'_0, u'_1, \dots, u'_N, v_0, v_1, \dots, v_N, v'_0, v'_1, \dots, v'_N, w_0, w_1, \dots, \\ & w_N, \psi_{\theta 0}, \psi_{\theta 1}, \dots, \psi_{\theta N}, \psi_{\varphi 0}, \psi_{\varphi 1}, \dots, \psi_{\varphi N}\}^T \end{aligned} \quad (16)$$

– вектор-функция от  $\theta$ ;  $\bar{f}(\theta)$  – вектор правых частей;  $A(\theta)$  – квадратная матрица, элементы которой зависят от  $\theta$ .

Для решения одномерной краевой задачи (16) используем метод дискретной ортогонализации.

### 3. Решение задач и анализ полученных результатов.

С помощью предложенного численно-аналитического подхода решена задача о напряженно-деформированном состоянии сферической, замкнутой по параметру  $\varphi$  оболочки ( $\pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6$ ) переменной в одном координатном направлении толщины. Толщина оболочки изменяется по следующему закону:  $h = 1 + \beta \cos \varphi$ , где  $\beta$  – параметр, который характеризует изменения толщины оболочки в координатном направлении  $\varphi$  ( $\beta = 0,25$ ). Радиус оболочки  $R = 20$ , края жестко закреплены. На оболочку действует нормальная локализованная нагрузка  $q_r = q_0 = \text{const}$ , приложенная в области ( $\zeta \leq \theta \leq \zeta + \pi/6, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ).

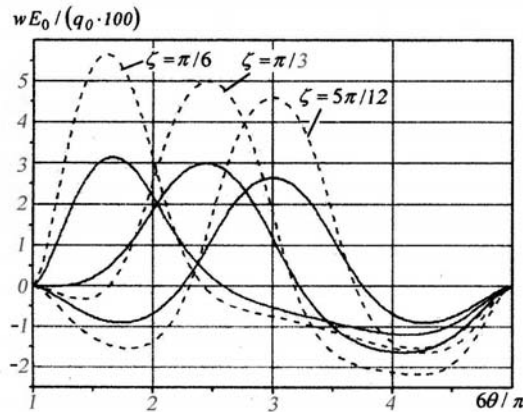


Рис. 1

На рис. 1 показано разделение прогибов  $w$  на поверхностях  $\varphi = 0$  (сплошная линия) и  $\varphi = \pi$  (штриховая линия) при изменении интервала приложения распределенной нагрузки.

Видно, что при перемещении нагрузки с края оболочки к середине (т.е. при изменении параметра  $\zeta$  от  $\pi/6$  до  $5\pi/12$ ) наблюдается также смещение точки максимального прогиба. При отдалении от края оболочки максимальные прогибы смещаются незначительно как для сечения  $\varphi = 0$  (сплошная линия), так и для  $\varphi = \pi$  (штриховая линия).

На рис. 2, 3 показано изменение напряжений на внутренней поверхности оболочки ( $\sigma_\theta^-$ ), соответственно, в сечениях  $\varphi = 0$  (рис. 2) и  $\varphi = \pi$  (рис. 3) при изменении интервала приложения распределенной нагрузки.

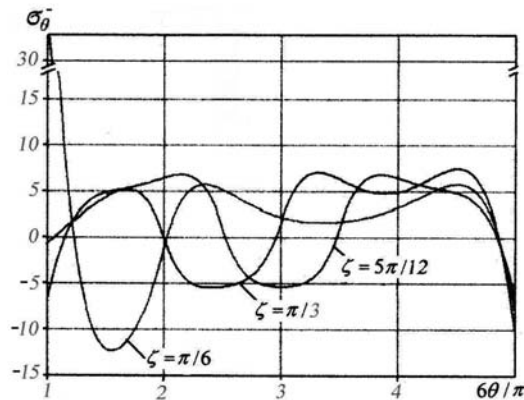


Рис. 2

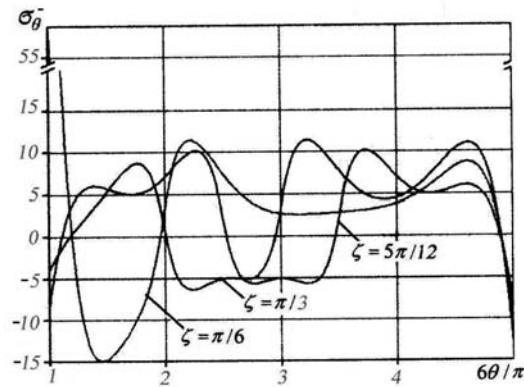


Рис. 3

Из результатов рис. 2, 3 следует, что максимальные напряжения  $\sigma_{\theta}^{-}$  имеют место вблизи края оболочки  $\theta = \pi/6$  в случае, когда нагрузка приложена у края оболочки. При смещении нагрузки к середине оболочки напряжения у края существенно уменьшаются, при этом их максимальные значения сдвигаются в среднюю часть оболочки.

Также исследовано распределение прогибов оболочки в двух координатных направлениях при локализованной нагрузке ( $\zeta = \pi/6$ ). Принято, что толщина изменяется по следующему закону:  $h = (1 + \alpha \cos \theta)(1 + \beta \cos \varphi)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры, характеризующие изменение толщины в направлениях, соответственно,  $\theta$  и  $\varphi$ .

На рис. 4 показана зависимость значений прогибов  $w$  в сечении  $\varphi = 0$  от значений параметров изменений толщины оболочек. Рассмотрены такие комбинации параметров: 1)  $\alpha = 0, \beta = 0$  (толщина оболочки постоянная); 2)  $\alpha = 0, \beta = 0,15$ ; 3)  $\alpha = 0, \beta = 0,25$ ; 4)  $\alpha = 0,25$  и  $\beta = 0,15$ .

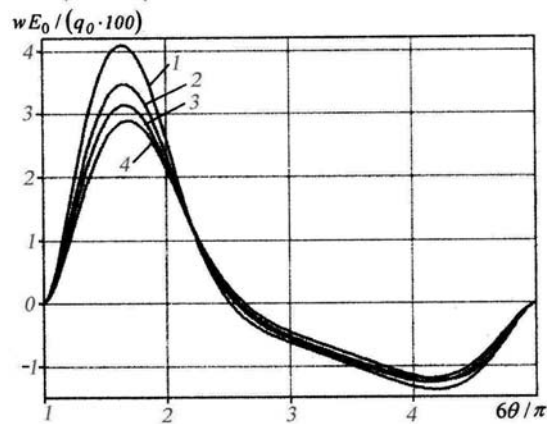


Рис. 4

Из данных рис. 4, следует, что если параметры, характеризующие изменения толщины оболочки, увеличиваются, то прогибы на отрезке  $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$  уменьшаются достаточно заметно, а на остальном участке – прогибы изменяются незначительно.

На рис. 5 показана зависимость значений прогибов  $w$  в сечении  $\varphi = \pi$  от изменений толщины оболочки.

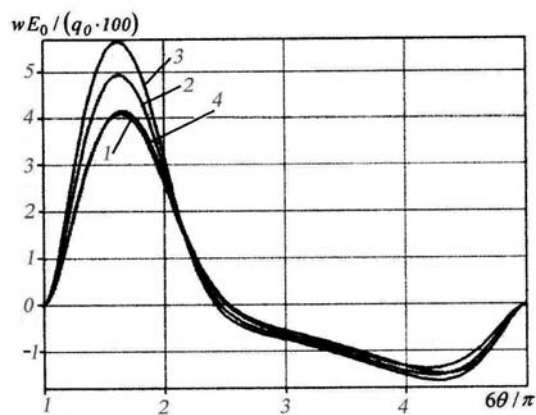


Рис. 5

Получено, что с увеличением параметров изменения толщины оболочки, прогибы поверхности в сечении  $\varphi = \pi$  на отрезке  $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$  увеличиваются, причем параметр  $\beta$  значительно больше влияет на прогибы, чем параметр  $\alpha$ .

Изменение толщины влияет исключительно на величину прогибов, в то время как локализованная нагрузка не только влияет на величину, но также смещает точку максимального прогиба.

Таким образом, из полученных результатов следует, что, варьируя не только величиной параметров изменения толщины, но также и величиной локализованной нагрузки, можно влиять на выбор рациональных параметров оболочки, относящихся к оценке ее деформативности и прочности.

**РЕЗЮМЕ.** На основі теорії, що базується на гіпотезі прямої лінії, проведено дослідження напружено-деформованого стану нетонких сферичних оболонок зі змінною товщиною при дії локалізованих навантажень. Для зведення двовимірних крайових задач до одновимірних застосовано метод сплайн-колокації. Одновимірні крайові задачі розв'язано методом дискретної ортогоналізації. Проведено аналіз розподілу переміщень та напружень в оболонках в залежності від розміщення розподіленого навантаження, а також від параметрів зміни товщини оболонок.

1. *Власов В.З.* Общая теория оболочек. – М.; Л.: Гл. изд. техн.-теор. лит., 1949. – 784 с.
2. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т.* Теория оболочек переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1981. – 543 с.
3. *Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.: Академперіодика, 2006. – 472 с.
4. *Григоренко Я.М., Шевченко Ю.Н., Василенко А.Т. и др.* Численные методы. – К.: «А.С.К.», 2002. – 448с.
5. *Пелех Б.Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наук. думка, 1973. – 246с.
6. *Cheung Y.K.* Finite Strip Method in Structure Analysis. – Oxford: Pergamon Press, 1976. – 514 p.
7. *Fan S.C., Cheung Y.K.* Analysis of shallow shells by spline finite strip method // Eng. Struct. – 1983. – N 5. – P. 255 – 263.
8. *Grigorenko A.Ya., Mal'sev S.A.* Natural Vibrations of Thin Conical Panels of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 11. – P.1221 – 1231.
9. *Grigorenko A. Ya., Parkhomenko A. Yu.* Free Vibrations of Shallow Nonthin Shells with Variable Thickness and Rectangular Platform // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 8. – P. 877 – 889.
10. *Grigorenko Ya. M., Rozhok L.S.* Influence of Curvature on the Stress State of Hollow Cylinders with Complex-Shaped Noncircular Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 7 – P. 737 – 743.
11. *Li Q.S., Lui J., Tang J.* Buckling of shallow spherical shells including the effect of transverse shear deformation // Int. J. of Mech. Science. – 2003. – 38, N 9. – P. 1519 – 1529.
12. *Rychter Z.* Family of shear deformation theories for shallow shells // Adv Mech. – 1993. – N 98. – P. 221 – 232.
13. *Simmonds J.G., Wan F.Y.M.* An asymptotic analysis of the three-dimensional displacements and stresses in a spherical shell under inward radially opposed concentrated surface loads // Int. J. of Solids and Struct. – 2001. – 38, N 38 – 39. – P. 6869 – 6887.
14. *Voronovich I.I., Manakova N.I.* Equations of the axisymmetric state of stress and strain of a non-shallow spherical shell of nonlinear elastic material under large deformation // J. of Appl. Math. and Mech. – 1973. – 37, N 4. – P. 886 – 891.
15. *Wunderlich W., Albertin U.* Buckling behaviour of imperfect spherical shells // Int. J. of Non-Linear Mech. – 2002. – 37, N 4 – 5. – P. 589 – 604.

Поступила 15.04.2011

Утверждена в печать 22.11.2012