

Н. А. Вельмагина

**БИФУРКАЦИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ КОЛЕСНОГО МОДУЛЯ
В ОКРЕСТНОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ**

*Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург, 74, 83114 Донецк, Украина,
e-mail: mti@iamm.ac.donetsk.ua*

Abstract. An analysis of effect of characteristic parameters of the system, describing the wheel module, on area of oscillatory instability is carried out. An influence of accuracy of approximation of nonlinear dependence of the averting force and the heel moment on the character of self-vibrations is considered. A bifurcation set is built, which separates the plane of parameters on the areas with differing numbers of limit cycles.

Key words: wheel module, self-vibrations, oscillatory instability, averting force, heel moment, limit cycle.

Введение.

Явление шимми – это интенсивные самовозбуждающиеся колебания катящихся колес, проявляющиеся в виде крутильных движений колес в горизонтальной плоскости (их верчения), которые сопровождаются другими движениями из продольной вертикальной плоскости [5, 6].

Автоколебания элементов шасси, в первую очередь, связаны с наличием упругого пневматика, который при определенных условиях «трансформирует» часть подводимой к транспортному средству энергии в энергию крутильных колебаний колес. Анализ условий возникновения автоколебаний был предметом исследования многих авторов как представителей теоретического направления [1, 9 – 13], так и инженеров-исследователей авиационного и автомобильного транспорта [3, 5, 7, 14 – 19]. Последние публикации [7, 8] инициированы разработкой более точных моделей взаимодействия упругого колеса с опорной поверхностью.

Целью данной работы является апробация известного аналитического метода приближенного анализа автоколебаний к задаче шимми передней стойки шасси. В работе принята математическая модель [19], описывающая колебания упругого колеса относительно вертикальной абсолютно жесткой стойки с учетом теории неустановившегося увода. Характеристики взаимодействия колеса с опорной поверхностью – сила увода и пяточный момент принимаем в виде известных нелинейных зависимостей (функций угла увода), полученных эмпирически. В работе [3] предлагаемый метод исследования реализован в постановке, не учитывающей наличие пяточного момента, влиянием которого иногда пренебрегают. Кроме того, в данной работе предложен подход к построению бифуркационного множества, разбивающего плоскость конструктивных параметров системы на области с различным числом предельных циклов, что позволяет более полно представить картину автоколебаний при изменении конструктивных параметров системы. Колесная сцепка (колесо на рояльном подвесе) может быть прототипом как управляемого колесного модуля, так и самоориентируемых колесных опор различных транспортных средств.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Уравнения возмущенного движения передней стойки в данной работе представлены для случая вертикальной стойки. Колесная сцепка имеет возможность отклоняться от своего невозмущенного положения ($\psi = 0$), в этом случае возникает восстанавливающий момент, пропорциональный углу отклонения (c – коэффициент крутильной жесткости); (пяточный момент, момент боковой силы и момент демпфирования – пропорциональные скорости изменения угла поворота $\dot{\psi}$). Расстояние от центра колеса до оси вращения колесной сцепки l ; вынос колеса $l > 0$, если точка сцепки O располагается впереди точки контакта колеса с опорной поверхностью, а $l < 0$ – в противном случае.

Основные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} F\ddot{\psi} + c\psi + k\dot{\psi} + lY(\delta) + M(\delta) &= 0; \\ \sigma\dot{\delta} + V\delta - V\psi - l\dot{\psi} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Первое уравнение системы (1) отвечает соотношению, принятому в теории неустановившегося увода (здесь δ – угол увода колеса); V – скорость невозмущенного движения; σ – параметр релаксации. Во втором уравнении системы (1) момент силы увода относительно оси стойки будет рассмотрен приближенно (учтено различное количество членов разложения нелинейной зависимости силы увода по углу увода); конструктивные параметры системы: момент инерции относительно оси вращения стойки F ; параметры c, k определяют жесткость и демпфирование при колебаниях колесной сцепки относительно вертикальной оси вращения, проходящей через точку сцепки O .

2. Результаты анализа условий устойчивости по линейному приближению.

Для построения областей устойчивости в плоскости различных пар параметров системы использован критерий Рауса – Гурвица. В случае учета пяточного момента граница области колебательной неустойчивости задаем соотношением (2) (условие обращения в нуль предпоследнего определителя Гурвица), в котором участвует приведенный коэффициент сопротивления уводу $\tilde{C}_1 = C_1 + A/l$, учитывающий влияние пяточного момента (формально соответствует увеличению номинального коэффициента сопротивления уводу)

$$V^2 F k + V(F l^2 \tilde{C}_1 - \sigma F l \tilde{C}_1 + \sigma k^2) + (\sigma k l^2 \tilde{C}_1 + \sigma^2 k c) = 0. \quad (2)$$

Далее рассмотрены характерные особенности границы области устойчивости в пространстве характерных конструктивных параметров системы. Наличие положительных корней уравнения (2) относительно параметра V свидетельствует о наличии интервала колебательной неустойчивости в диапазоне от V_{\min} до V_{\max} (V_{\min}, V_{\max} – корни уравнения). Такой интервал может существовать, если коэффициент при V в (2) меньше нуля (необходимое условие наличия интервала колебательной неустойчивости). При $l < 0$ или $l > \sigma$ интервал колебательной неустойчивости отсутствует; случай достаточно большого отрицательного выноса (вынос вперед) приводит к дивергентной неустойчивости [3].

При $l < \sigma$ колебательная неустойчивость может реализовываться в интервале $l_1 < l < l_2$, где l_1 и l_2 корни квадратного уравнения $F l^2 \tilde{C}_1 - \sigma F l \tilde{C}_1 + \sigma k^2 = 0$, границы интервала приближенно могут быть заданы соотношениями $l_1 = k^2 / F \tilde{C}_1$ и $l_2 = \sigma$.

В случае, когда величина \tilde{C}_1 на несколько порядков превышает все остальные параметры системы (что действительно имеет место в силу физического смысла, рассматриваемых параметров, исключение составляет параметр крутильной жесткости,

величина которого теоретически может иметь такой же порядок), интервал колебательной неустойчивости может быть приближенно получен как решение квадратного уравнения $V^2 F k - V \sigma F l \tilde{C}_1 + \sigma k l^2 \tilde{C}_1 = 0$ для любого значения выноса из интервала $l_1 < l < l_2$. Решения такого уравнения можно аппроксимировать выражениями, из которых следует расширение интервала неустойчивости при увеличении величины \tilde{C}_1 (чем меньше порядок величины выноса, тем точнее оценка границ интервала колебательной неустойчивости): $V_{\min} = k l / F$, $V_{\max} = l \sigma \tilde{C}_1 / k$.

При возрастании параметра крутильной жесткости c (до порядка величины \tilde{C}_1) интервал колебательной неустойчивости будет сужаться, что следует из анализа уравнения

$$V^2 F k - V \sigma F l \tilde{C}_1 + \sigma k l^2 \tilde{C}_1 + \sigma^2 k c = 0.$$

Таким образом, при фиксированных значениях параметров системы, увеличение вертикальной нагрузки на колесный модуль может привести к колебательной неустойчивости (если при меньших нагрузках система была устойчива, так как $C_1 = N c_1$). Эти результаты согласуются с выводами работы [9] о возможности стабилизации колебательной неустойчивости при больших скоростях движения за счет увеличения положительного выноса (вынос назад) колесной сцепки.

Таким образом, характерной областью колебательной неустойчивости модели является интервал от V_{\min} до V_{\max} , где V_{\min} , V_{\max} – корни уравнения (2), размеры которого увеличиваются при росте параметра \tilde{C}_1 .

При $V = V_{\min}$ линейное приближение теряет устойчивость – пара собственных значений проходит через мнимую ось. Тогда согласно теореме Андронова – Хопфа в системе реализуется замкнутая фазовая траектория (существует предельный цикл при $V < V_{\min}$ или при $V > V_{\min}$). Условия устойчивости предельного цикла могут быть определены косвенно – при $V < V_{\min}$ имеем неустойчивый предельный цикл, а при $V > V_{\min}$ – устойчивый. Аналогичные бифуркации предельного цикла происходят в системе при $V = V_{\max}$.

Характер (опасный – безопасный) границы области устойчивости в смысле Н.Н. Баутина [2], определяемый первым ляпуновским коэффициентом, носит локальный характер (справедлив в малой окрестности критического значения параметра V). Ниже представлен подход, позволяющий проанализировать явление автоколебаний во всем интервале колебательной неустойчивости [4].

3. Анализ автоколебаний и оценка амплитуд автоколебаний.

Предполагаем, что периодическое решение системы (1) в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия и в моменты, когда отклонения равны нулю, изменяется по гармоническому закону, имея некоторое запаздывание по фазе $\delta = a \sin \omega t$; $\psi = p_0 \sin(\omega t + \varphi)$ (здесь a – амплитуда; φ – запаздывание фазы). В характерные моменты времени фазовые переменные и их производные принимают значения

$$\omega t = \pi / 2: \quad \delta = a; \quad \dot{\delta} = 0; \quad \ddot{\delta} = -a\omega^2;$$

$$\psi = P_0 \cos \alpha; \quad \dot{\psi} = -P_0 \omega \sin \alpha; \quad \ddot{\psi} = -P_0 \omega^2 \cos \alpha;$$

$$\omega t = 0: \quad \delta = 0; \quad \dot{\delta} = a\omega; \quad \ddot{\delta} = 0;$$

$$\psi = P_0 \sin \alpha; \quad \dot{\psi} = P_0 \omega \cos \alpha; \quad \ddot{\psi} = -P_0 \omega^2 \sin \alpha.$$

В этом случае параметры автоколебаний (a ; p_0 ; ω ; φ) определяются из следующей системы конечных уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma a \omega - V p_0 \sin(\varphi) - l p_0 \cos(\varphi) \omega &= 0; \\ V a - V p_0 \cos(\varphi) + l p_0 \omega \sin(\varphi) &= 0; \\ -F p_0 \sin(\varphi) \omega^2 + c p_0 \sin(\varphi) + k p_0 \cos(\varphi) \omega - l Y(0) - M(0) &= 0; \\ -F p_0 \omega^2 \cos(\varphi) + c p_0 \cos(\varphi) - k p_0 \sin(\varphi) \omega - l Y(a) - M(a) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

После исключения неизвестных p_0 , φ из первых двух уравнений системы (3) получим соотношения, которые определяют усредненную частоту периодического решения, т. е.

$$\omega^2 = \frac{V^2 k + V c (\sigma - l)}{F V (\sigma - l) - k l \sigma} \quad (4)$$

и его амплитуду

$$-F a k V^3 + F V^2 \tilde{Y}(a) l^2 - F V^2 \tilde{Y}(a) \sigma l - k^2 a \sigma V^2 + V \tilde{Y}(a) k \sigma l^2 - V a \sigma^2 c k = 0, \quad (5)$$

где $\tilde{Y}(a) = Y(a) + M(a)/l$ – нелинейная функция, учитывающая наличие пяточного момента. Уравнение (4) имеет физический смысл лишь в случае неотрицательной правой части, это возможно только при выполнении условия $V > k l \sigma / F(\sigma - l)$.

Проведем оценку амплитуды автоколебаний для случая, когда во втором уравнении системы (1) $M(\delta) = 0$, а сила увода представлена в виде монотонной зависимости $Y(\delta) = C_1 \delta / \sqrt{1 + (C_1 \delta / \varphi N)^2}$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$-F a k V^3 + F V^2 Y(a) l^2 - F V^2 Y(a) \sigma l - k^2 a \sigma V^2 + V Y(a) k \sigma l^2 - V a \sigma^2 c k = 0. \quad (6)$$

Теоретический интерес представляет оценка амплитуд автоколебаний в случае различной точности аппроксимации сил увода (учет различного числа членов разложения в ряд Тейлора зависимости $Y(a)$).

На рис. 1 показан график зависимости амплитуды угла увода от величины продольной скорости: кривая 1 – сила увода аппроксимирована линейным и кубическим членами; кривая 2 – учитываются члены разложения до пятой степени включительно; кривая 3 – до членов седьмой степени включительно (результат подстановки численных значений следующего набора параметров: $c_1=8$; $\sigma=0,18$ м; $l=0,05$ м; $F=1,8$ кгм²; $N=490$ Н; $k=2,254$ Нмс; $c=392$ Нм).

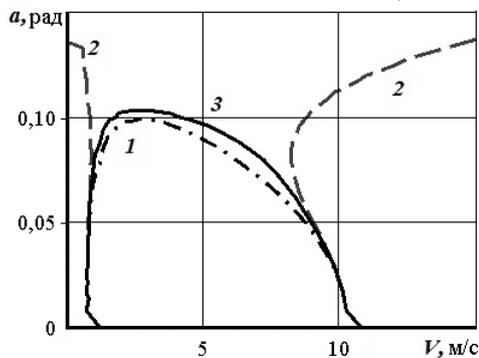


Рис. 1

При данном наборе численных значений параметров для случаев 1 – 3 невозмущенное движение системы неустойчиво в интервале скоростей от 0,78 м/с до 10,3 м/с, граница области устойчивости является безопасной – соответствует рождению устойчивого предельного цикла на левой границе, на правой границе – его исчезновению. Результат, представленный на кривой 2 (рис. 1), интересен с точки зрения существования бифуркационного множества (бифуркационными значениями параметров соответ-

ствует рождение или слияние двух автоколебательных режимов, один из которых устойчивый, другой неустойчивый).

Как следствие, в области устойчивости при $V > 10,3$ м/с появляется неустойчивый предельный цикл, ограничивающий область притяжения невозмущенного движения.

Бифуркационные значения параметров могут быть получены из системы

$$\begin{aligned} \left[FV^2 l^2 Y(a) - FV^2 \sigma l Y(a) \right]' &= (FkV^3 - V\sigma^2 c k - k^2 \sigma V^2); \\ (FV^2 l^2 - FV^2 \sigma l) Y(a) &= (FkV^3 - V\sigma^2 c k - k^2 \sigma V^2) a \end{aligned} \quad (7)$$

на основе метода продолжения по двум параметрам (например l, V), начальным условиям соответствовала бы точка поворота на амплитудной кривой.

Однако, в данном частном случае бифуркационное множество может быть получено проще – как дискриминант полинома, представляющего амплитудное уравнение (6) (учитывались члены разложения функции $Y(a)$ до пятой степени малости включительно). Определяющий полином имеет вид

$$\alpha_4 a^4 + \alpha_2 a^2 + \alpha_0 = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= -3FVC_1^5 \sigma l + 3C_1^5 k \sigma l^2 + 3FVC_1^5 l^2; \\ \alpha_2 &= -4FVC_1^3 l^2 \varphi^2 N^2 + 4FVC_1^3 \sigma l \varphi^2 N^2 - 4C_1^3 k \sigma l^2 \varphi^2 N^2; \\ \alpha_0 &= (8FkV^2 + 8FVC_1 l^2 + 8k^2 \sigma V - 8FVC_1 \sigma l + 8\sigma^2 c k + 8C_1 k \sigma l^2) \varphi^4 N^4. \end{aligned}$$

Дискриминантом уравнения (8) является выражение

$$\begin{aligned} (6FkV^3 + 5FV^2 C_1 l^2 - 5FV^2 C_1 \sigma l + 6k^2 \sigma V^2 + 5VC_1 k \sigma l^2 + 6V\sigma^2 c k)(FV^3 k + \\ + FV^2 C_1 l - FV^2 C_1 \sigma l + k^2 \sigma V^2 + VC_1 k \sigma l^2 + V\sigma^2 c k) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Соотношение (9) при выбранных численных значениях параметров системы определяет бифуркационное множество (рис. 2), которое делит плоскость параметров (l, V) на области с различным числом автоколебательных режимов: одним неустойчивым (внешняя окрестность внешней замкнутой кривой); двумя – устойчивым и неустойчивым (область между замкнутыми кривыми); во внутренней области автоколебания отсутствуют.

Из рис. 2 видно, что для амплитудной кривой, соответствующей значению выноса $l=0,05$ м, пара автоколебательных режимов существует в интервале скорости от 8 м/с до 10,2 м/с (левый интервал не рассматривается из-за его малости).

Проектируя характерные точки амплитудной кривой на бифуркационное множество, получим точки пересечения, которые имеют одну и ту же ординату $l=0,05$ м, что подтверждает корректность полученного бифуркационного множества (все точки бифуркационного множества проходятся при изменении параметра выноса от 0,02 м до 0,145 м).

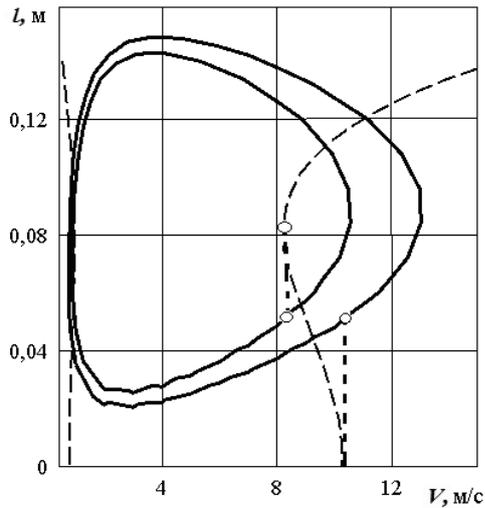


Рис. 2

4. Оценка амплитуд автоколебаний с учетом пяточных моментов.

Проведем оценку амплитуды автоколебаний для случая, когда динамическая система (1) учитывает наличие пяточного момента. Пяточный момент представляет собой момент силы увода относительно проекции центра оси колеса на опорную поверхность. Рассмотрен случай как линейной зависимости $M_1 = A\delta$, так и исходной нелинейной зависимости пяточного момента $M_2 = A\delta / (B\delta^4 + C\delta^2 + 1)$; сила увода в обоих случаях представлена в виде нелинейной монотонной зависимости $Y(\delta) = C_1\delta / \sqrt{1 + (C_1\delta/\varphi N)^2}$.

На рис. 3 показаны графики зависимости амплитуды угла увода от величины продольной скорости: кривые 1 – динамическая система (1) учитывает наличие пяточного момента M_1 по линейному приближению; 2 – пяточный момент M_2 представлен в виде нелинейной зависимости; кривая 3 – пяточный момент отсутствует (результат подстановки численных значений следующего набора параметров: $c_l=8$; $\sigma=0,18$ м; $l=0,1$ м; $F_{zz}=1,8$ кгм²; $N=490$ Н; $k=2,254$ Нмс; $c=392$ Нм).

Таким образом, учет пяточного момента приводит к значительному расширению области неустойчивости, что и было показано при анализе условий устойчивости по линейному приближению.

При этом, как видно из графиков (рис. 3), амплитудная кривая при различных представлениях пяточного момента практически не изменяется, т.е. при анализе автоколебаний достаточно учитывать лишь линейную часть пяточного момента.

В то же время следует указать на возможное искажение картины наблюдаемых автоколебаний (рис. 1) при приближенном представлении сил бокового увода.

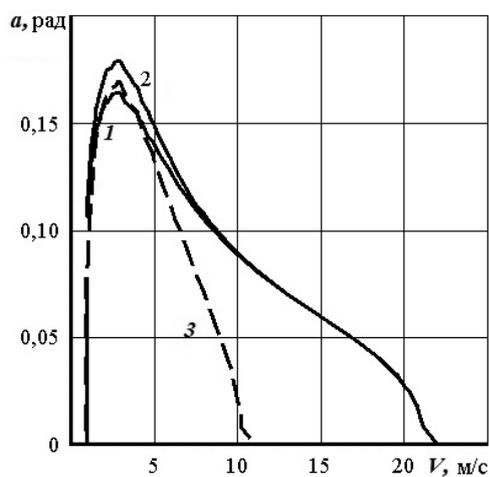


Рис. 3

Заключение.

Таким образом, в настоящей статье проведен анализ влияния характерных параметров системы на область колебательной неустойчивости колесного модуля; рассмотрено влияние точности аппроксимации нелинейной зависимости силы увода и пяточного момента на характер автоколебаний, построено бифуркационное множество, разделяющее плоскость параметров на области с различным числом предельных циклов.

РЕЗЮМЕ. Проведено аналіз впливу характерних параметрів системи на область коливальної нестійкості колісного модуля; розглянуто вплив точності апроксимації нелінійної залежності сили відведення і п'яточного моменту на характер автоколивань, побудовано біфуркаційну множину, що розділяє площину параметрів на області з різним числом граничних циклів.

1. Аронович Г.В. К теории шимми автомобиля и самолета // Прикл. математика и механика. – 1949. – 13, №5. – С. 477 – 488.
2. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1984. – 176 с.

3. Вельмагина Н.А., Вербицкий В.Г. Анализ автоколебаний колесного модуля в прямолинейном режиме движения // *Механика твердого тела*. – 2011. – №41. – С. 100 – 108.
4. Вербицкий В.Г., Садков М.Я. Приближенный анализ автоколебательной системы // *Доп. НАН України*. – 2001. – №10. – С.48 – 52.
5. Гоздек В.С. О влиянии различных параметров на устойчивость движения ориентирующихся колес самолета // *Тр. ЦАГИ*. – 1964. – Вып. 917. – С. 1 – 30.
6. Гончаренко В. И. Каноническое описание системы управления в задаче о шимми колес шасси самолета // *Прикл. механика*. – 2011. – 47, №2. – С.129 – 142.
7. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. О механизме явления шимми // *Докл. АН РФ*. – 2009. – 428, № 6. – С. 761 – 764.
8. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Теория явления шимми // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. – 2010. – № 3. – С. 22 – 29.
9. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. – *Избранные труды. Механика*. – М.: Наука, 1985. – С. 491 – 530.
10. Лобас Л.Г. Автоколебания колеса на ориентирующейся стойке шасси с нелинейным демпфером // *Прикл. математика и механика*. – 1981. – 45, № 4. – С.80 – 87.
11. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неавтономных систем. – М.: Наука, 1967. – 520с.
12. Плахтиенко Н.П., Шифрин Б.М. Об устойчивости движения самолета по взлетно-посадочной полосе при ветровой нагрузке // *Прикл. механика*. – 1999. – 35, №10. – С. 101 – 107.
13. Плахтиенко Н.П., Шифрин Б.М. Поперечные упруго-фрикционные вибрации движущегося по взлетно-посадочной полосе самолета // *Прикл. механика*. – 2001. – 37, №5. – С.136 – 143.
14. Besselink J.M. Shimmy of aircraft main landing gears: PhD thesis. – Delft University of Technology, 2000. – 201p.
15. Mi-Seon Yi., Bae Jae-Sung, Hwang Jae-Hyuk. Non-linear shimmy analysis of a nose landing gear with friction // *J. Korean Soc. Aeronaut. & Space Scie.* – 2011. – 39, N7. – P. 605 – 611.
16. Pacejka H.B. The wheel shimmy phenomenon: PhD thesis. – Delft University of Technology, December, 1966.
17. Schlippe B. von, Dietrich R. Das Flattern eines bepneuten Rades, Bericht 140 der Lilienthal Gesellschaft (1941); English translation: NACA TM 1365. – 1954. – P.125 – 147.
18. Sharp R.S., Jones C.J. A comparison of tyre representations in a simple wheel shimmy problem // *Vehicle System Dynamics*. – 1980. – 9.– P. 45 – 57.
19. Somieski G. Shimmy analysis of a simple aircraft nose landing gear model using different mathematical methods // *Aerospace Scie. and Technol.* –1997. – 8. – P. 545 – 555.

Поступила 27.12.2011

Утверждена в печать 06.06.2013