М. В. Ш а м о л и н

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СРЕДОЙ

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова,
Мичуринский пр., 1, 119192,
Москва, Россия; e-mail: shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru.

Abstract. The full analysis is carried out of the phase trajectories, which correspond to a motion of the rigid body in a resistant medium within conditions of quasi-stationarity. Some systems of more general kind are studied, which are characterized by certain non-trivial symmetries of the hidden type.

Key words: rigid body, motion equations, integrability, transcendent first integral

Введение.

При исследовании известной задачи о движении твердого тела в сопротивляющейся среде в условиях квазистационарности имели место первые интегралы, обладающие нестандартными свойствами.

А именно, последние не были ни аналитическими, ни гладкими, а на некоторых множествах они были даже разрывными. При этом они выражались через конечную комбинацию элементарных функций, что и важно в прикладных задачах механики абсолютно твердого тела.

Удалось провести полный анализ интересующих фазовых траекторий и указать на свойства их грубости. В дальнейшем были изучены соответствующие системы более общего вида, которые обладали некоторыми нетривиальными симметриями скрытого типа.

Представляет интерес проведение исследования достаточно широких классов динамических систем, обладающих аналогичными свойствами, в частности, применительно к динамике твердого тела, взаимодействующего со средой.

§ 1. Постановка задачи о движении тела в сопротивляющейся среде.

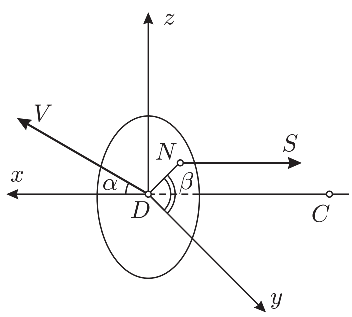

Рис. 1

Рассмотрим задачу о пространственном движении однородного осесимметричного твердого тела массы m, часть поверхности которого имеет форму плоского круглого диска, взаимодействующего со средой по законам струйного обтекания [3 – 5].

Пусть остальная часть поверхности тела лежит внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края диска, и не испытывает воздействия среды. Подобные условия могут иметь место, например, после входа торцом однородных круговых цилиндров в воду [9].

Предположим, что касательные силы к диску отсутствуют. Тогда сила S, приложенная к телу в точке N со стороны среды, не меняет своей ориентации относительно тела (направлена по нормали к диску) и квадратична по скорости его центра D (рис. 1). Примем также, что сила тяжести, действующая на тело, пренебрежимо мала по сравнению с силой сопротивления (воздействия) среды.

При выполнении указанных условий среди движений тела существует режим прямолинейного поступательного торможения (невозмущенного движения), подобный случаю плоскопараллельного движения: тело способно совершать поступательное движение в направлении его оси симметрии, т. е. перпендикулярно плоскости диска. Это самый интересный в прикладном отношении случай движения тела (рис. 2).

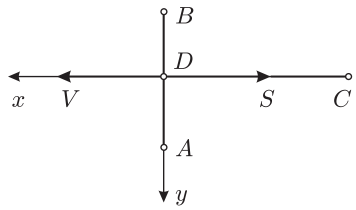

Рис. 2

Свяжем с телом правую систему координат $Dxyz$ (рис. 1) и направим ось Dx вдоль оси симметрии тела. Оси Dy и Dz жестко свяжем с диском. Компоненты вектора угловой скорости Ω в системе $Dxyz$ обозначим $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$. Тензор инерции динамически симметричного тела в осях $Dxyz$ имеет вид $\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2\}$.

Воспользуемся гипотезой квазистационарности [3 – 5, 9] и для простоты предположим, что величина $R = DN$ определяется, по крайней мере, углом атаки α – углом между вектором скорости v центра D диска и прямой Dx (рис. 1).

Примем также величину силы S сопротивления в виде $S = s_1(\alpha)v^2$, $v = |v|$. В дальнейшем для удобства вместо коэффициента сопротивления $s_1(\alpha)$ введем вспомогательную знакопеременную функцию $s(\alpha)$: $s_1 = s_1(\alpha) = s(\alpha)\,\mathrm{sgn}\cos\alpha \geq 0$. Таким образом, пара функций R и $s(\alpha)$ определяет характеристики воздействия среды на диск.

Рассмотрим сферические координаты (v, α, β) конца вектора $v = v_D$ скорости точки D относительно потока, в которых угол β измеряется в плоскости диска (рис. 1). Выражая величины (v, α, β) неинтегрируемыми соотношениями через циклические кинематические переменные и скорости, рассмотрим их в качестве квазискоростей, добавив к ним компоненты $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ угловой скорости в осях $Dxyz$, в которых, очевидно, имеем

$$\mathrm{v_D} = \{v\cos\alpha, v\sin\alpha\cos\beta_1, v\sin\alpha\sin\beta_1\}.$$

В силу теорем о движении центра масс (в проекциях на оси $Dxyz$) и об изменении кинетического момента получаем независимую динамическую часть уравнений движения, рассматриваемую в шестимерном пространстве квазискоростей ($\sigma = DC$)

$$v^\bullet\cos\alpha - \alpha^\bullet v\sin\alpha + \Omega_y v\sin\alpha\sin\beta_1 - \Omega_z v\sin\alpha\cos\beta_1 + \sigma(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) = -s(\alpha)v^2/m;$$

$$v^\bullet\sin\alpha\cos\beta_1 + \alpha^\bullet v\cos\alpha\cos\beta_1 - \beta_1^\bullet v\sin\alpha\sin\beta_1 + \Omega_z v\cos\alpha -$$

$$-\Omega_x v\sin\alpha\sin\beta_1 - \sigma\Omega_x\Omega_y - \sigma\Omega_z^\bullet = 0;$$

$$v^\bullet\sin\alpha\sin\beta_1 + \alpha^\bullet v\cos\alpha\sin\beta_1 + \beta_1^\bullet v\sin\alpha\cos\beta_1 +$$

$$+\Omega_x v\sin\alpha\cos\beta_1 - \Omega_y v\cos\alpha - \sigma\Omega_x\Omega_z + \sigma\Omega_y^{\bullet} = 0\,;\ I_1\Omega_x^{\bullet} = 0\,;$$

$$I_2\Omega_y^{\bullet} + (I_1 - I_2)\Omega_x\Omega_z = -z_N s(\alpha)v^2\,;\quad I_2\Omega_z^{\bullet} + (I_2 - I_1)\Omega_x\Omega_y = y_N s(\alpha)v^2 \qquad (1.1)$$

(y_N, z_N – декартовы координаты в плоскости диска точки приложения N силы S).

§ 2. Движение тела в сопротивляющейся среде при наличии следящей силы.

Выделим более общий класс задач о воздействии среды на тело, в котором вдоль оси его геометрической симметрии (прямая *CD*, рис. 1) действует следящая сила T, при некоторых условиях обеспечивающая реализацию представляющих интерес классов движений (наложенных связей). При этом сама следящая сила и является реакцией этих связей. В случае отсутствия следящей силы тело совершает пространственное свободное торможение в сопротивляющейся среде [11].

Исследуем два класса движений тела при наличии следящей силы ($v = |v_D|$, V_C – скорость центра масс), а именно, рассмотрим два случая:

I) $v \equiv \text{const}$;

II) $V_C \equiv \text{const}$.

2.1. Случай I. В случае движения, характеризуемого наличием неинтегрируемой связи вида I можно выбрать следящую силу вполне определенным образом [4, 8, 10]. Более того, в силу уравнений (1.1) во все моменты времени имеется инвариантное соотношение $\Omega_x = \Omega_{x_0} = \text{const}$. В дальнейшем будем исследовать случай нулевой закрутки тела вокруг своей оси симметрии, т. е. когда выполнено условие:

$$\Omega_{x_0} = 0\,. \qquad (2.1)$$

Тогда (в силу I, (2.1)) порядок системы уменьшается на две единицы и независимая динамическая часть уравнений движения в четырехмерном фазовом пространстве имеет вид

$$\alpha^{\bullet} v\cos\alpha\cos\beta_1 - \beta_1^{\bullet} v\sin\alpha\sin\beta_1 + \Omega_z v\cos\alpha - \sigma\Omega_z^{\bullet} = 0\,;$$

$$\alpha^{\bullet} v\cos\alpha\sin\beta_1 + \beta_1^{\bullet} v\sin\alpha\cos\beta_1 - \Omega_y v\cos\alpha + \sigma\Omega_y^{\bullet} = 0\,;$$

$$I_2\Omega_y^{\bullet} = -z_N s(\alpha)v^2\,;\ I_2\Omega_z^{\bullet} = y_N s(\alpha)v^2\,, \qquad (2.2)$$

куда входят функции y_N, z_N, s воздействия среды, для качественного описания которых используем экспериментальную информацию о свойствах струйного обтекания [3, 4 – 6].

Ограничимся в дальнейшем исследованием системы (2.2) для следующих функций (полученных ранее С. А. Чаплыгиным [6]) воздействия среды:

$$y_N = A\sin\alpha\cos\beta_1 - h\Omega_z / v\,;\ z_N = A\sin\alpha\sin\beta_1 + h\Omega_y / v\,;$$

$$s(\alpha) = B\cos\alpha \quad (\,A, B, h > 0\,). \qquad (2.3)$$

В равенствах (2.3) коэффициент h стоит при членах, пропорциональных вращательным производным момента силы воздействия среды по угловой скорости тела [1, 2, 7].

Система (2.2) является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (по углу атаки). Это означает, что интеграл по периоду угла атаки от дивергенции ее правой части, отвечающий за изменение фазового объема (после некоторого приведения системы), равен нулю. Система является (в некотором смысле) «полуконсервативной» [9].

Проектируя в дальнейшем угловые скорости на подвижные оси, не связанные с телом, так, что $z_1 = \Omega_y \cos\beta_1 + \Omega_z \sin\beta_1$; $z_2 = -\Omega_y \sin\beta_1 + \Omega_z \cos\beta_1$, и вводя безразмерные переменные w_k ($k = 1,2$), $z_k = n_0 v w_k$, параметры $n_0^2 = AB / I_2$, $H_1 = Bh / I_2 n_0$, $b = \sigma n_0$ и дифференцирование $\langle \bullet \rangle = n_0 v \langle ' \rangle$, получаем следующую аналитическую систему четвертого порядка:

$$\alpha' = -(1 + bH_1) w_2 + b \sin\alpha ;$$

$$w_2' = \sin\alpha \cos\alpha - (1 + bH_1) w_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_2 \cos\alpha ; \tag{2.4}$$

$$w_1' = (1 + bH_1) w_1 w_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_1 \cos\alpha , \quad \beta' = (1 + bH_1) w_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.5}$$

в которой появляется независимая подсистема третьего порядка (2.4).

При $b = H_1$ дивергенция правой части системы (2.4) ((2.4), (2.5)) после замены переменных $w_1^* = \ln|w_1|$ тождественно равна нулю, что позволяет считать данную систему (системы) консервативной (консервативными).

Теорема 1. Система (2.4), (2.5) обладает полным набором инвариантных соотношений, являющихся элементарными трансцендентными (с точки зрения комплексного анализа) функциями своих фазовых переменных. Два из них образуют полный набор первых интегралов системы (2.4).

Действительно, сопоставим системе (2.4), (2.5) следующую неавтономную систему второго порядка:

$$\frac{dw_2}{d\alpha} = \frac{\sin\alpha \cos\alpha - (1 + bH_1) w_1^2 ctg\alpha - H_1 w_2 \cos\alpha}{-(1 + bH_1) w_2 + b \sin\alpha};$$

$$\frac{dw_1}{d\alpha} = \frac{(1 + bH_1) w_1 w_2 ctg\alpha - H_1 w_1 \cos\alpha}{-(1 + bH_1) w_2 + b \sin\alpha}. \tag{2.6}$$

Применяя подстановку $\tau = \sin\alpha$, преобразуем систему (2.6) к виду

$$\frac{dw_2}{d\tau} = \frac{\tau - (1 + bH_1) w_1^2 / \tau - H_1 w_2}{-(1 + bH_1) w_2 + b\tau}, \quad \frac{dw_1}{d\tau} = \frac{(1 + bH_1) w_1 w_2 / \tau - H_1 w_1}{-(1 + bH_1) w_2 + b\tau}. \tag{2.7}$$

Вводя в дальнейшем замену $w_k = u_k \tau$ ($k = 1,2$), характерную для однородных систем, сопоставим, в свою очередь, системе (2.7) следующее неавтономное дифференциальное уравнение:

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 + (1 + bH_1)(u_2^2 - u_1^2) - (H_1 + b) u_2}{2(1 + bH_1) u_1 u_2 - (H_1 + b) u_1}, \tag{2.8}$$

которое обладает первым интегралом вида

$$\frac{(1 + bH_1) u_2^2 - (H_1 + b) u_2 + (1 + bH_1) u_1^2 + 1}{u_1} = C_1 . \tag{2.9}$$

Пользуясь (2.8), заключаем, что система (2.4), (2.5) имеет первый интеграл вида

$$\frac{(1+bH_1)w_2^2-(H_1+b)w_2\sin\alpha+(1+bH_1)w_1^2+\sin^2\alpha}{w_1\sin\alpha}=C_1\,. \qquad 2.10)$$

Как уже отмечалось, при $b=H_1$ динамическая система (2.4) (впрочем, как и (2.4), (2.5)) является консервативной. Действительно, соотношение (2.10) преобразуется к инвариантному соотношению

$$\frac{w_2^2+(1+b^2)w_1^2+[bw_2-\sin\alpha]^2}{w_1\sin\alpha}=C_1\,. \qquad (2.11)$$

Более того, легко проверить, что и числитель, и знаменатель соотношения (2.11) являются первыми интегралами системы (2.4) при $b=H_1$

$$w_2^2+(1+b)w_1^2+b\ [w_2-\sin\alpha]^2=C_1^*=\text{const},\ w_1\sin\alpha=C_2^*=\text{const}.$$

В случае же $b\neq H_1$ система (2.4) перестает быть консервативной. При этом ни числитель, ни знаменатель инвариантного соотношения (2.10) первыми интегралами не являются. Последний факт проверять необязательно, поскольку у системы (2.4) имеются притягивающие и отталкивающие предельные множества [7, 11, 12], запрещающие наличие у исследуемой системы полного набора даже непрерывных первых интегралов.

Дополнительный первый интеграл для системы (2.4) находим из квадратуры

$$\int\frac{d\tau}{\tau}=\int\frac{[1-(1+bH_1)u_2]du_2}{1-(H_1+b)u_2+(1+bH_1)[u_2^2-U(u_1,C_1)]}\,, \qquad (2.12)$$

где $U(u_1,C_1)=\dfrac{1}{2(1+bH_1)}\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4D_1}\}$ на уровне $C_1>4(1+bH_1)D_1$ интеграла (2.10) $\left(D_1=(1+bH_1)u_2^2-(H_1+b)u_2+1\right)$.

Общий структурный вид дополнительного первого интеграла системы (2.4), (2.5) находим из (2.12):

$$\Phi_1\left(\frac{w_1}{\sin\alpha},\frac{w_2}{\sin\alpha},\sin\alpha\right)=C_2=\text{const}.$$

В силу (2.5), (2.9) дополнительный первый интеграл для системы (2.4), (2.5) четвертого порядка, «привязывающий» уравнение (2.5), получим из решения уравнения

$$\frac{du_1}{d\beta}+\left[\frac{1-(1+bH_1)u_2}{1+bH_1}\right]=u_2-\frac{H_1}{1+bH_1}\,,$$

что приводит к соотношению

$$\sin^2\{2(1+bH_1)^2(\beta+C_3)\}=\frac{(2(1+bH_1)w_1-2C_1\sin\alpha)^2}{[(H_1+b)^2-4b(1+bH_1)+C_1^2]\sin^2\alpha}\,.$$

Замечание. Проинтегрированная система (2.4) рассматривается в трехмерной области $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\}\setminus\{\alpha=0,\alpha=\pi\}\times R^2\{w_1,w_2\}$ (такая система приводится к эквивалентной себе системе на касательном расслоении к двумерной сфере S^2 [9]).

Итак, система (2.4) является системой с переменной диссипацией с нулевым средним, она обладает двумя первыми интегралами (т.е. полным списком), являющимися трансцендентными функциями и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее, как указывалось выше, и стало возможным после сопоставления ей (в общем случае, неавтономной) системы уравнений (2.7) с алгебраической (полиномиальной) правой частью.

2.2. Случай II. Если же рассматривается более общая задача о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии некоторой следящей силы T, проходящей через ось симметрии, и обеспечивающей во все время движения выполнение условия II, то в первом уравнении системы (1.1) будет стоять величина, тождественно равная нулю, обеспечивающая движение тела в среде, при котором на тело действует пара сил. При некоторых условиях система (1.1) приведется к системе, в которой произойдет отделение системы более низкого порядка.

Действительно, выбор фазовых переменных позволяет рассматривать систему динамических уравнений шестого порядка в качестве независимой. Более того, как видно из уравнений движения, сохраняется компонента продольной составляющей угловой скорости: $\Omega_x = \Omega_{x_0} = \text{const}$.

Ограничимся также рассмотрением движения тела без собственного вращения, т.е. когда выполнено условие (2.1).

Тогда, вводя аналогичным образом квазискорости z_1, z_2, и далее безразмерные переменные Z_k ($k = 1,2$), $z_k = n_0 v Z_k$, параметры $n_0^2 = AB/I_2$, $H_1 = Bh/I_2 n_0$, $b = \sigma n_0$ и дифференцирование $\langle \bullet \rangle = n_0 v \langle ' \rangle$, используя условия (2.3), получаем следующую аналитическую систему четвертого порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2); \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 Z_2\cos^2\alpha;\\
&Z_2' = \sin\alpha\cos\alpha - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) - (1 + bH_1)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 Z_2\cos\alpha;\\
&Z_1' = -Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) + (1 + bH_1)Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 Z_1\cos\alpha;
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\beta' = (1 + bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \tag{2.15}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha - bH_1 Z_2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Рассмотрим (как и выше) вопросы полной интегрируемости (в элементарных функциях) динамической системы (2.13) – (2.15) с аналитическими правыми частями.

Поскольку рассматриваем такой класс движений тела, при котором выполнено свойство II, то система (2.13) – (2.15) пятого порядка имеет аналитический первый интеграл.

Действительно, скорость центра C масс в рассматриваемой системе координат можно представить в виде $V_C = \{v\cos\alpha, v\sin\alpha\cos\beta - \sigma\Omega_z, v\sin\alpha\sin\beta + \sigma\Omega_y\}$. Тогда следующее соотношение является инвариантным для системы (1.1) при условиях (2.1) и II:

$$v^2 - 2\sigma v z_2\sin\alpha + \sigma^2(z_1^2 + z_2^2) = V_{C0}^2 = \text{const}. \tag{2.16}$$

Соотношение (2.16), в котором линейная и угловые скорости образуют однородную форму степени 2, позволяет выписать полиномиальный интеграл по указанным скоростям для системы (2.13) – (2.15), т.е.

$$v^2(1-2bZ_2\sin\alpha+b^2(Z_1^2+Z_2^2))=V_{C0}^2\,, \tag{2.17}$$

соотношение (2.17) позволяет явно получить зависимость v от других квазискоростей

$$v^2=\frac{V_{C0}^2}{1-2bZ_2\sin\alpha+b^2(Z_1^2+Z_2^2)}\,. \tag{2.18}$$

Видно, что соотношение (2.18) позволяет рассматривать вопросы интегрируемости в элементарных функциях системы (2.13) – (2.15) уже более низкого порядка – четвертого.

Применяя часто используемую подстановку $\tau=\sin\alpha$, систему (2.14) можно привести к следующей системе с алгебраическими правыми частями:

$$\begin{aligned}&\frac{dZ_2}{d\tau}=\frac{\tau+bZ_2(Z_1^2+Z_2^2)-bZ_2\tau^2-(1+bH_1)Z_1^2/\tau+bH_1Z_2^2\tau-H_2Z_2}{-Z_2+b\tau(Z_1^2+Z_2^2)+b\tau(1-\tau^2)-bH_1Z_2(1-\tau^2)};\\&\frac{dZ_2}{d\tau}=\frac{bZ_1(Z_1^2+Z_2^2)-bZ_1\tau^2+(1+bH_1)Z_1Z_2/\tau+bH_1Z_1Z_2\tau-H_2Z_1}{-Z_2+b\tau(Z_1^2+Z_2^2)+b\tau(1-\tau^2)-bH_1Z_2(1-\tau^2)}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Произведем переход к однородным координатам u_k ($k=1,2$) по формулам $Z_k=u_k\tau$. Тогда система (2.19) приведется к виду

$$\begin{aligned}&\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)u_1^2}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)};\\&\tau\frac{du_1}{d\tau}=\frac{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Системе (2.20) можно сопоставить следующее уравнение первого порядка:

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)u_1^2}{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}\,. \tag{2.21}$$

Данное уравнение интегрируется в элементарных функциях. После несложных преобразований приходим к инвариантному соотношению, которое соответствует в координатах (τ,Z_1,Z_2) трансцендентному первому интегралу вида

$$\frac{(1+bH_1)Z_1^2+(1+bH_1)Z_2^2-(b+H_1)Z_2\tau+\tau^2}{Z_1\tau}=\text{const}. \tag{2.22}$$

Используя равенство (2.22), заключаем, что система (2.14) обладает следующим трансцендентным первым интегралом, выражающимся через конечную комбинацию элементарных функций:

$$\frac{(1+bH_1)Z_1^2+(1+bH_1)Z_2^2-(b+H_1)Z_2\sin\alpha+\sin^2\alpha}{Z_1\sin\alpha}=C_1=\text{const}. \tag{2.23}$$

Далее, пользуясь полученным первым интегралом (2.23), переписываем первое уравнение системы (2.20) в следующем виде:

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}{-u_2 + b(1-\tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1,u_2)+u_2^2) - bH_1 u_2(1-\tau^2)}, \tag{2.24}$$

$$U_1(C_1,u_2) = \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1+bH_1)((1+bH_1)u_2^2 - (b+H_1)u_2 + 1)}\}/2$$

или в виде уравнения Бернулли

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b-(1+bH_1)u_2)\tau - b\tau^3(1-U_1^2(C_1,u_2) - u_2^2 - H_1u_2)}{1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}. \tag{2.25}$$

Уравнение (2.25) (при помощи (2.24)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(-b+(1+bH_1)u_2)\tau + 2b(1-U_1^2(C_1,u_2) - u_2^2 - H_1u_2)}{1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)};\ p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{2.26}$$

Это означает, что может быть получен еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (2.26) зависит от произвольной постоянной C_2.

Для поиска последнего дополнительного первого интеграла системы (2.13) – (2.15) (т.е. интеграла, привязывающего уравнение на угол β) заметим, что, поскольку

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{(1+bH_1)Z_1/\tau}{-Z_2 + b\tau(Z_1^2+Z_2^2) + b\tau(1-\tau^2) - bH_1Z_2(1-\tau^2)},$$

то к равенству

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{(1+bH_1)u_1}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2+u_2^2) + b\tau(1-\tau^2) - bH_1\tau u_2(1-\tau^2)} \tag{2.27}$$

добавим также равенство

$$\tau \frac{du_1}{d\tau} = \frac{2(1+bH_1)u_1u_2 - (b+H_1)u_1}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2+u_2^2) + b\tau(1-\tau^2) - bH_1\tau u_2(1-\tau^2)}, \tag{2.28}$$

принятое из системы (2.20).

Полученная система (2.27), (2.28) позволяет выписать уравнение для получения искомого интеграла в таком виде:

$$\frac{du_1}{d\beta} = 2u_2 - \frac{b+H_1}{1+bH_1}. \tag{2.29}$$

Используя первый интеграл уравнения (2.21) (C_1 – его постоянная интегрирования) и уравнение (2.29), можно получить недостающий первый интеграл исходной системы.

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Система (2.13) – (2.15) обладает полным набором первых интегралов, один из которых является аналитической функцией, а два других являются элементарными трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Отметим, что для поиска первых интегралов рассматриваемых систем достаточно их привести к системам с полиномиальными правыми частями, от вида которых зависит возможность интегрирования в элементарных функциях исходной системы.

Итак, выше показана связь трех, на первый взгляд, независимых свойств, но при этом достаточно гармонично сочетающихся на системах из динамики твердого тела:

1) выделенные классы систем;

2) обладание этими классами переменной диссипацией с нулевым средним (по переменной α), что позволяет их рассматривать как «почти» консервативные системы [9];

3) в некоторых (пусть и достаточно маломерных) случаях обладание ими полным набором, в общем случае, трансцендентных первых интегралов.

§ 3. Пространственный маятник в потоке набегающей среды.

По аналогии со свободным телом при плоскопараллельном движении рассмотрим задачу о движении в однородном потоке набегающей среды пространственного маятника: поток воздействует лишь на круглый диск, жестко закрепленный в своем центре перпендикулярно державке, которая, в свою очередь, другим концом закреплена на сферическом шарнире. Модель воздействия среды на диск остается прежней.

Рассмотрим движение такого маятника в потоке набегающей среды без собственной закрутки (т. е. $\Omega_{x0} = 0$). При этом по-прежнему учитываются эффекты от влияния вращательных производных момента гидроаэродинамических сил по угловой скорости тела в случае функций Чаплыгина (2.3) (рис. 3).

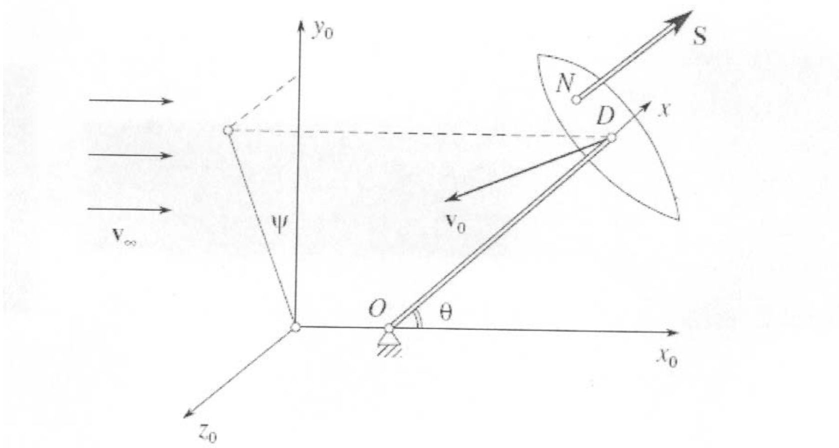

Рис. 3

Первоначальные уравнения движения имеют вид

$$\Omega_y^{\bullet} = -\frac{1}{I_2} v_D^2 z_N s(\alpha), \Omega_z^{\bullet} = \frac{1}{I_2} v_D^2 y_N s(\alpha),$$

где функции y_N и z_N удовлетворяют условиям (2.3).

Пусть (θ, ψ) – углы, определяющие положение пространственного маятника на сфере S^2. Угол θ будем измерять от оси x_0 до державки, а ψ – от проекции державки на плоскость Oy_0z_0 до оси y_0 (принимаем, что в начальный момент времени $\psi = 0$). Тогда соотношения, связывающие (v_D, α, β) и $(\theta, \psi, \Omega_y, \Omega_z)$, где l – длина державки, таковы:

$$v_D \cos\alpha = -v_\infty \cos\theta, \quad v_D \sin\alpha \cos\beta = l\Omega_z + v_\infty \sin\theta \cos\psi,$$

$$v_D \sin\alpha \sin\beta = -l\Omega_y - v_\infty \sin\theta \sin\psi,$$

а в силу кинематических соотношений, аналогичных кинематическим формулам Эйлера, имеем

$$\Omega_y = \theta^{\bullet}\sin\psi + \psi^{\bullet}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\psi,\ \Omega_z = \theta^{\bullet}\cos\psi - \psi^{\bullet}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\psi\ .$$

Тогда уравнения движения такой системы на касательном расслоении двумерной сферы можно представить в следующем виде:

$$\theta^{\bullet\bullet} + (b - H_1)\theta^{\bullet}\cos\theta + \sin\theta\cos\theta - \psi^{\bullet 2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0\ ; \tag{3.1}$$

$$\psi^{\bullet\bullet} + (b - H_1)\psi^{\bullet}\cos\theta + \theta^{\bullet}\psi^{\bullet}\left[\frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\right] = 0\ . \tag{3.2}$$

Здесь b, H_1 – безразмерные физические постоянные (см. выше), причем коэффициент H_1 по-прежнему пропорционален вращательным производным момента гидроаэродинамических сил по компонентам угловой скорости пространственного маятника. Длина державки эквивалентна расстоянию σ = CD для свободного тела, постоянная скорость набегающего потока v_∞ – постоянному параметру v для свободного тела. При этом угол атаки α для свободного тела эквивалентен углу θ отклонения маятника от вектора скорости потока, а угол β – циклической переменной, т.е. углу ψ .

Если в системе (2.4) – (2.5) «избавится» от w_1 и w_2, то в точности получим систему (3.1), (3.2), в которой вместо θ, ψ, соответственно, стоят α, β. Поэтому справедлива такая теорема.

Теорема 3. Система (2.4) – (2.5) эквивалентна системе (3.1), (3.2).

Заметим, что там, где $\cos\theta = 0$, систему (3.1), (3.2) можно доопределить по непрерывности, а особенность $\sin\theta = 0$ является чисто кинематической, поскольку на ней вырождаются рассматриваемые сферические координаты (v, α, β).

Фазовый портрет системы (3.1), (3.2) изображен на рис. 4 (см. также [9]).

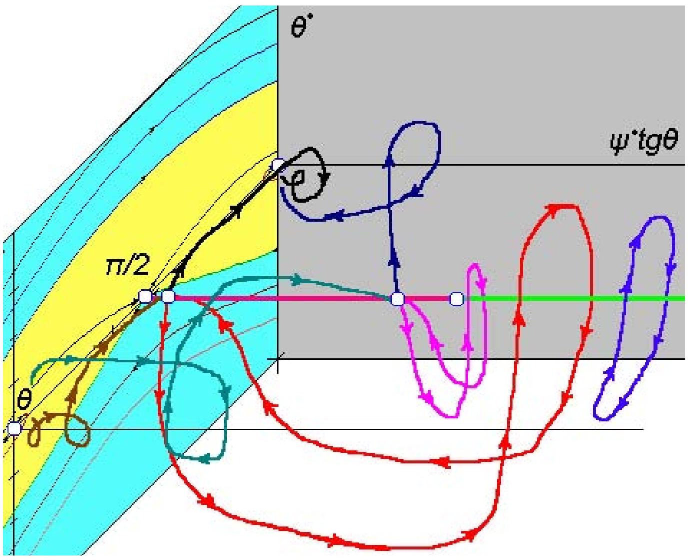

Рис. 4

Заключение.

Поиск случаев полной интегрируемости, а тем более в элементарных функциях, – всегда сложная задача. В работе показано, что существует тесная связь трех, на первый взгляд, независимых свойств, но при этом достаточно гармонично сочетающихся на системах из динамики твердого тела: рассмотрение класса систем с отмеченными симметриями; обладание данным классом систем переменной диссипацией с нулевым средним (по имеющейся периодической фазовой переменной), что позволяет такие системы рассматривать как «почти» консервативные системы; в некоторых случаях обладание ими полным набором, в общем случае, трансцендентных первых интегралов.

РЕЗЮМЕ. Проведено повний аналіз фазових траєкторій, що відповідають руху твердого тіла в середовищі, яке створює опір, в умовах квазістаціонарності. Вивчені відповідні системи більш загального вигляду, які характеризуються деякими нетривіальними симетріями прихованого типу.

1. *Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В.* Динамика продольного и бокового движения. – М.: Машиностроение, 1969. – 349 с.
2. *Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В.* Динамика самолета. Пространственное движение. – М.: Машиностроение, 1988. – 320 с.
3. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979. – 322 с.
4. *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1989. – № 3. – С. 51–54.
5. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды. – М.: Наука, 1976. – 495 с.
6. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Т. 1. – Л.: Изд-во АН СССР, 1933. – С. 133 – 135.
7. *Шамолин М.В.* Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1992. – № 2. – С. 52 – 56.
8. *Шамолин М.В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента // Прикл. математика и механика. – 1993. – **57**, № 4. – С. 40 – 49.
9. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Экзамен, 2007. – 352 с.
10. *Шамолин М.В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. – 1999. – **364**, № 5. – С. 627 – 629.
11. *Shamolin M. V.* Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body // J. Math. Sci. – 2004. – **122**, N 1. – P. 2841 – 2915.
12. *Shamolin M. V.* New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium // J. Math. Sci. – 2003. – **114**, N 1. – P. 919 – 975.

Поступила 08.04.2011 Утверждена в печать 06.06.2013