

Я. Леллеп¹, Л. Роотс²

**ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ
МНОГОСТУПЕНЧАТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТРЕЩИНАМИ**

*Институт математики Тартуского университета,
J. Liivi 2, 50409, Tartu, EESTI; Tartu, Эстония;
e-mail: ¹jaan.lellep@ut.ee; ²a42119@ut.ee*

Abstract. The transverse axisymmetric vibrations of an elastic multi-step cylindrical shell are considered, when the stable cracks exist at the re-entrants of steps. An effect of cracks on vibrations of shell is studied by means of allowance for local flexibility and compliance function. The solution is found in the matrix form with taking into account the arbitrary number of cracks. An effect of locations and lengths of cracks on the transverse axisymmetric vibrations of elastic one- and two-step cylindrical shells is estimated numerically.

Key words: cylindrical shell, crack, transverse axisymmetric vibrations.

Введение.

Тонкостенные пластины и оболочки являются важными элементами конструкций не только в авиации, но и в кораблестроении, в строительной механике, при проектировании сосудов давления и в других отраслях инженерной деятельности.

Однако существование трещин в оболочках может привести к их разрушению в том числе и при свободных и вынужденных колебаниях [2, 3, 4, 7, 11]. Поэтому существенно изучать влияние трещин на частоту и другие характеристики колебаний оболочек. Очевидно, проблемы исследования поперечных осесимметричных колебаний цилиндрических оболочек являются аналогичными, но не совпадающими, с теми же проблемами в случае упругих прямых балок.

Известно много работ, где исследуется зависимость спектра частоты свободных колебаний балок от размеров дефектов и их расположения [5, 6, 9, 19 и др.]. С другой стороны, владение этой информацией позволяет построить различные алгоритмы обнаружения трещин в конструкциях и решать задачи идентификации. Решения задач такого типа представлены в работах [13, 16, 17, 18].

Жестко защемленные балки круглого поперечного сечения изучены в работе [10], а консольные балки с трещинами – в работе [14]; в [6] исследовано влияние трещин на колебания балок с кусочно-переменной высотой поперечного сечения. Задачи определения спектра частот свободных колебаний цилиндрических оболочек изучены многими авторами. Отметим здесь лишь статью [1], где рассмотрены осесимметричные колебания полого цилиндра при различных видах закрепления концов оболочки, и работу [8], посвященную исследованию неосесимметричных колебаний.

В данной работе исследована чувствительность основной частоты колебаний цилиндрической оболочки от глубины трещины. Предполагается, что оболочка имеет кусочно-постоянную толщину и трещина расположена в поперечном сечении, где толщина претерпевает разрыв.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим шарнирно закрепленную на кромках круговую ступенчатую цилиндрическую оболочку длины $2l$ и радиуса R . Примем, что оболочка совершает свободные колебания от начального возмущения, распределенного симметрично относительно оси цилиндрической оболочки. Материал оболочки линейно-упругий.

Из-за симметрии рассмотрим лишь правую половину оболочки и расположим начало декартовой системы координат в центре поперечного сечения (рис. 1). Обозначим различные толщины ступенчатых частей – h_j при $x \in (a_j, a_{j+1})$, где $j = 0, \dots, n$.

Предполагаем, что цилиндрическая оболочка имеет достаточную длину для того, чтобы краевые условия не были близки к критическим (эксперименты показывают, что для этого должно выполняться условие $2l > 1,5R$) и в тоже время достаточно коротка ($2l < 30R$), чтобы можно было не рассматривать ее как длинный трубчатый стержень.

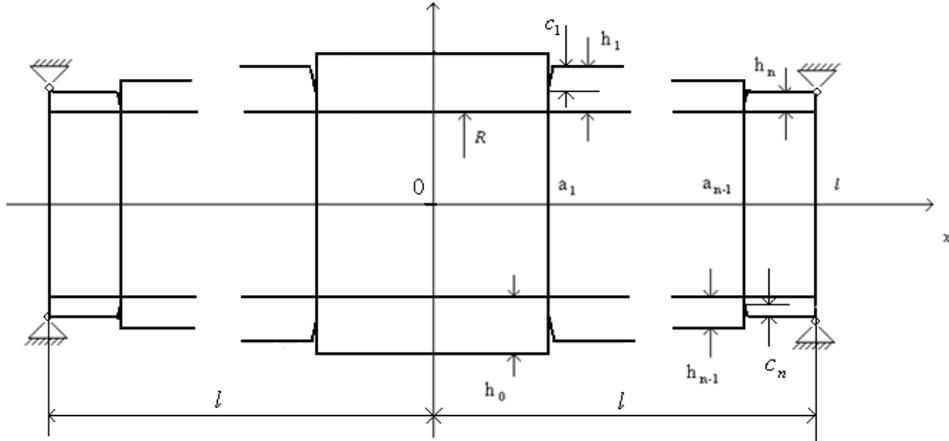


Рис. 1

В поперечных сечениях $x = a_j$ имеются односторонние трещины глубиной c_j , начинающиеся во внешних углах соответствующих ступеней оболочки. Пусть толщина оболочки (рис. 1) $h = h_j$, $j = 0, \dots, n$ для $x \in (a_j, a_{j+1})$. Здесь $a_0 = 0$ и $a_n = l$, а параметры a_j и h_j – заданы.

Целью данной работы является определение зависимости частоты свободных колебаний оболочки от глубин распространения трещин в поперечных сечениях и от местонахождения ступеней с трещинами по длине оболочки.

§2. Уравнение движения.

Используя гипотезы Кирхгофа – Лява [2], перемещения в каждой точке оболочки, а отсюда и деформации, а также напряжения, определяем через перемещение конкретной поверхности. Результатом является сведение трехмерной задачи к двумерной. Кроме того, рассмотрим случай, когда реакция оболочки – тоже осесимметричная. Это обстоятельство позволяет свести задачу к одномерной.

Поскольку рассматриваем свободные поперечные осесимметричные колебания цилиндрической оболочки, и, по соображениям симметрии, перемещение вдоль оси $w = w(x)$ не зависит от координаты y , то уравнение движения такой оболочки принимает следующий вид [2]:

$$\bar{D}_j \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{E h_j}{R^2} w = -\rho h_j \ddot{w}; \quad x \in (a_j, a_{j+1}), \quad (2.1)$$

где \bar{D}_j – цилиндрическая жесткость оболочки $\bar{D}_j = Eh_j^3 / 12(1-\nu^2)$ и ρ – плотность материала.

Следовательно, при $x \in (a_j, a_{j+1})$ имеем уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h_j^2} w = -\frac{\rho h_j}{\bar{D}_j} \ddot{w},$$

решение которого ищем в промежутке $[a_j, a_{j+1}]$ в виде $w = X_j(x)T(t)$, используя метод разделения переменных.

Функция $T=T(t)$ удовлетворяет уравнению $\ddot{T} + \omega^2 T = 0$, а функция $X_j = X_j(x)$ – уравнению

$$\frac{\partial^4 X_j}{\partial x^4} - r_j^4 X_j = 0 \quad (2.2)$$

$$\left(r_j^4 = \omega^2 \frac{\rho h_j}{\bar{D}_j} - \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h_j^2} \right), \quad (2.3)$$

где ω – частота свободных колебаний оболочки.

Введем обозначение $r_j = k / \sqrt{h_j}$. Тогда, согласно выражению (2.3), имеем

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{k^4 R^2}{12(1-\nu^2)} + 1}}.$$

Таким образом, частота свободных колебаний оболочки зависит от характеристического числа k .

Общее решение уравнения (2.2) представим при $x \in (a_j, a_{j+1})$ в виде

$$X_j(x) = A_j \sin(r_j x) + B_j \cos(r_j x) + C_j \sinh(r_j x) + D_j \cosh(r_j x). \quad (2.4)$$

§3. Локальная гибкость, обусловленная наличием трещины (условие трещины).

Предположим, что рассматриваемая оболочка имеет на кромках ступеней при $x=a_j$ ($j = 0, \dots, n$) поперечные трещины глубиной c_j .

Для описания локальной гибкости конструкции в зоне трещины используются различные модели. Следуя работам [13, 14, 16, 17], выбираем приближенную модель, в которой локальная гибкость описывается посредством пружины с заданной жесткостью K_{Tj} , размещенной в том же самом поперечном сечении, где и трещина. Предполагаем, что жесткость пружины – обратная величина податливости оболочки в этом сечении [5, 6, 12]

$$K_{Tj} = 1 / C_j. \quad (3.1)$$

Скорость высвобождения энергии, связанной с ростом трещины, определяется согласно [20] в виде

$$G_j = \frac{1}{2} P_j^2 \frac{dC_j}{dA_j}, \quad (3.2)$$

где P_j – обобщенная сила (в частном случае она также может быть изгибающим моментом); A_j – длина трещины. В данном случае $A_j = h_j s_j$, где $s_j = c_j / h_j$. В свою очередь, скорость высвобождения энергии G_j и коэффициент интенсивности напряжений K_j для трещин I рода связаны соотношением [20]

$$G_j = K_j^2 / E', \quad (3.3)$$

где $E' = E / (1 - \nu^2)$ в случае плоской деформации (как в данном случае).

Из справочников по коэффициентам интенсивности напряжений [15, 20] можно подобрать наиболее подходящий для данного случая коэффициент интенсивности напряжений K и поправочную функцию для его расчета.

При чистом изгибе для полосы конечной длины с поперечной краевой трещиной коэффициент интенсивности напряжений K определим [20] как

$$K_j = \frac{6M_j}{h_j^2} \sqrt{\pi c_j} F\left(\frac{c_j}{h_j}\right), \quad (3.4)$$

где c_j – длина трещины первого рода; M_j – изгибающий момент; поправочная функция F определяется так:

$$F(s_j) = 1,93 - 3,07s_j + 14,53s_j^2 - 25,11s_j^3 + 25,8s_j^4.$$

Согласно (3.2) и (3.3) с учетом (3.4) получим равенство

$$\frac{dC_j}{ds_j} = \frac{72\pi}{E'h_j^2} s_j F^2(s_j). \quad (3.5)$$

Интегрирование (3.5) приводит к следующей формуле:

$$C_j = \frac{72\pi}{E'h_j^2} f(s_j)$$

$$(f(s_j) = 1,862s_j^2 - 3,95s_j^3 + 16,375s_j^4 - 37,226s_j^5 + 76,81s_j^6 - \\ - 126,9s_j^7 + 172,5s_j^8 - 143,97s_j^9 + 66,56s_j^{10}).$$

Таким образом, для трещины безразмерной длины s_j , расположенной в $x=a_j$, выражение для K_{Tj} (3.1) примет вид

$$K_{Tj} = \frac{\bar{D}_j}{6\pi h_j f_j}, \quad (3.6)$$

где $j = 0, \dots, n$ и $f_j = f(s_j)$; $\bar{D}_j = \bar{D}(a_{j-1} + 0)$, причем, h_j является наименьшей из толщин, т.е. $h_j = \min\{h_{j-1}(a_j - 0), h_j(a_j + 0)\}$.

Таким образом, поперечные сечения $x=a_j$ с трещинами имеют дополнительные вращения при поперечном изгибе. Углы вращения можно определить из отношений [12 – 17]

$$K_{Tj} [w'(a_j)] = -M(a_j), \quad (3.7)$$

где согласно [2] для изгибающего момента в точке $x = a_j$ имеем

$$M(a_j) = -\bar{D}_j \frac{\partial^2 X_j}{\partial x^2} \Big|_{x=a_j-0} = -\bar{D}_{j-1} \frac{\partial^2 X_{j-1}}{\partial x^2} \Big|_{x=a_j+0}. \quad (3.8)$$

С учетом (3.8) условие (3.7) примет вид

$$\left[\frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x=a_j} \right] = K_{Tj}^{-1} \bar{D}_j \frac{\partial^2 X_j}{\partial x^2} \Big|_{x=a_{j+0}} \quad (j = 0, \dots, n),$$

где квадратные скобки обозначают конечные скачки соответствующих величин. Например,

$$\left[\frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{a_j} \right] = \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{a_j+0} - \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{a_j-0}.$$

§4. Граничные условия, условия симметрии и непрерывности.

Для каждого конца оболочки можно указать два граничных условия. Выбираем шарнирно-опертые граничные условия для обоих концов оболочки. В этом случае равны нулю прогиб $w=XT$ и изгибающий момент $M = -\bar{D} X'' T$. Следовательно, граничные условия для X таковы:

$$X_n \Big|_{x=l} = \frac{\partial^2 X_n}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0. \quad (4.1)$$

Поскольку поведение оболочки симметрично относительно плоскости $x = 0$, то возможно рассматривать одну из симметричных частей и условия симметрии в данном случае будут

$$\frac{\partial X_0}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^3 X_0}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = 0. \quad (4.2)$$

Если сюда добавить условия непрерывности для функций X , M и $\partial M / \partial x$ в точках перепада толщины стенок оболочки и условие скачка при трещине, получим задачу, которая полностью определена – количество искомого неизвестных констант равно числу уравнений для их определения.

Условия непрерывности и трещины в точках перепада толщин стенки оболочки запишем в такой форме:

$$X_j(a_j + 0) = X_{j-1}(a_j - 0); \quad X'_j(a_j + 0) = X'_{j-1}(a_j - 0) + p_j X''_j(a_j - 0);$$

$$X''_j(a_j + 0) = \frac{\bar{D}_{j-1}}{D_j} X''_{j-1}(a_j - 0); \quad (4.3)$$

$$X'''_j(a_j + 0) = \frac{\bar{D}_{j-1}}{D_j} X'''_{j-1}(a_j - 0),$$

где $\bar{D}_j / K_{Tj} = p_j$, причем X_{j-1} определяется на отрезке $[a_{j-1}, a_j]$ и X_j – на отрезке $[a_j, a_{j+1}]$. Примем также, что $\bar{D}_{j-1} / \bar{D}_j = \delta_{aj}$.

§5. Определение характеристического числа k .

Пусть \bar{Y}_i ($i = 0, \dots, n$) обозначает вектор-столбец из констант в выражении (2.4)

$$\bar{Y}_i = \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Из условий симметрии в точке $x=0$ с помощью (2.4) и (4.2) определяем две константы: $A_0=0$, $C_0=0$.

Следовательно, вектор-столбец \vec{Y}_i при $i=0$ примет вид

$$\vec{Y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \\ 0 \\ D_0 \end{bmatrix}.$$

Запишем систему (4.3) в развернутом виде.

Подставляя (2.4) в (4.3), получаем при $j = 1, \dots, n$ уравнения:

$$\begin{aligned} & A_j \sin r_j a_j + B_j \cos r_j a_j + C_j \sinh r_j a_j + D_j \cosh r_j a_j = \\ & = A_{j-1} \sin r_{j-1} a_j + B_{j-1} \cos r_{j-1} a_j + C_{j-1} \sinh r_{j-1} a_j + D_{j-1} \cosh r_{j-1} a_j; \\ & A_j \cos r_j a_j - B_j \sin r_j a_j + C_j \cosh r_j a_j + D_j \sinh r_j a_j = \\ & = \delta_{2j} (A_{j-1} \cos r_{j-1} a_j - B_{j-1} \sin r_{j-1} a_j + C_{j-1} \cosh r_{j-1} a_j + D_{j-1} \sinh r_{j-1} a_j) + \\ & + \delta_{3j} (-A_{j-1} \sin r_{j-1} a_j + B_{j-1} \cos r_{j-1} a_j + C_{j-1} \sinh r_{j-1} a_j + D_{j-1} \cosh r_{j-1} a_j); \quad (5.2) \\ & -A_j \sin r_j a_j - B_j \cos r_j a_j + C_j \sinh r_j a_j + D_j \cosh r_j a_j = \\ & = \delta_{1j} (-A_{j-1} \sin r_{j-1} a_j - B_{j-1} \cos r_{j-1} a_j + C_{j-1} \sinh r_{j-1} a_j + D_{j-1} \cosh r_{j-1} a_j); \\ & -A_j \cos r_j a_j + B_j \sin r_j a_j + C_j \cosh r_j a_j + D_j \sinh r_j a_j = \\ & = \delta_{4j} (-A_{j-1} \cos r_{j-1} a_j + B_{j-1} \sin r_{j-1} a_j + C_{j-1} \cosh r_{j-1} a_j + D_{j-1} \sinh r_{j-1} a_j) \end{aligned}$$

$$\left(\delta_{1j} = \frac{\bar{D}_{j-1}}{D_j} \frac{h_j}{h_{j-1}}; \quad \delta_{2j} = \sqrt{\frac{h_j}{h_{j-1}}}; \right.$$

$$\left. \delta_{3j} = \left(\frac{\bar{D}}{K_T} \right)_j \frac{\sqrt{h_j}}{h_{j-1}} k; \quad \delta_{4j} = \frac{\bar{D}_{j-1}}{D_j} \frac{h_j}{h_{j-1}} \sqrt{\frac{h_j}{h_{j-1}}} \right).$$

Если стенка оболочки состоит из единого материала, то имеем формулы

$$\delta_{1j} = \frac{h_{j-1}^2}{h_j^2}; \quad \delta_{2j} = \sqrt{\frac{h_j}{h_{j-1}}};$$

$$\delta_{3j} = 6\pi f(s) \sqrt{h_j} \gamma_{1j} k; \quad \delta_{4j} = \frac{h_{j-1}}{h_j} \sqrt{\frac{h_{j-1}}{h_j}}.$$

Введем матрицы:

$$[N_j] = \begin{bmatrix} \sin r_j a_j & \cos r_j a_j & \sinh r_j a_j & \cosh r_j a_j \\ \cos r_j a_j & -\sin r_j a_j & \cosh r_j a_j & \sinh r_j a_j \\ -\sin r_j a_j & -\cos r_j a_j & \sinh r_j a_j & \cosh r_j a_j \\ -\cos r_j a_j & \sin r_j a_j & \cosh r_j a_j & \sinh r_j a_j \end{bmatrix} \quad (j = 0, \dots, n);$$

$$[M_{j-1}] = \begin{bmatrix} \sin r_{j-1} a_j & \cos r_{j-1} a_j & \sinh r_{j-1} a_j & \cosh r_{j-1} a_j \\ \delta_{2j} \cos r_{j-1} a_j - \delta_{2j} \sin r_{j-1} a_j + \delta_{2j} \cosh r_{j-1} a_j + \delta_{2j} \sinh r_{j-1} a_j + \\ -\delta_{3j} \sin r_{j-1} a_j + \delta_{3j} \cos r_{j-1} a_j + \delta_{3j} \sinh r_{j-1} a_j + \delta_{3j} \cosh r_{j-1} a_j \\ -\delta_{1j} \sin r_{j-1} a_j & -\delta_{1j} \cos r_{j-1} a_j & \delta_{1j} \sinh r_{j-1} a_j & \delta_{1j} \cosh r_{j-1} a_j \\ -\delta_{4j} \cos r_{j-1} a_j & \delta_{4j} \sin r_{j-1} a_j & \delta_{4j} \cosh r_{j-1} a_j & \delta_{4j} \sinh r_{j-1} a_j \end{bmatrix} \quad (j=1, \dots, n).$$

Эти обозначения вместе с (5.1) позволяют записать систему алгебраических уравнений (5.2) в виде

$$[N_j] \bar{Y}_j = [M_{j-1}] \bar{Y}_{j-1}, \quad j=1, \dots, n.$$

Отсюда определим

$$\bar{Y}_j = [N_j^{-1}] [M_{j-1}] \bar{Y}_{j-1}$$

Если ввести обозначение

$$[S_j] = [N_j^{-1}] [M_{j-1}],$$

то получим равенство

$$\bar{Y}_j = [S_j] \bar{Y}_{j-1}. \quad (5.3)$$

Таким образом, константы, определяющие \bar{Y}_j , можно выразить через константы \bar{Y}_{j-1} . В этом случае, имеет место равенство

$$\begin{bmatrix} A_j \\ B_j \\ C_j \\ D_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^j & s_{12}^j & s_{13}^j & s_{14}^j \\ s_{21}^j & s_{22}^j & s_{23}^j & s_{24}^j \\ s_{31}^j & s_{32}^j & s_{33}^j & s_{34}^j \\ s_{41}^j & s_{42}^j & s_{43}^j & s_{44}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j-1} \\ B_{j-1} \\ C_{j-1} \\ D_{j-1} \end{bmatrix},$$

где через s_{ik}^j обозначены элементы матрицы $[S_j]$.

Из формулы (5.3) следуют соотношения

$$\bar{Y}_1 = [S_1] \bar{Y}_0,$$

$$\bar{Y}_2 = [S_2] \bar{Y}_1,$$

$$\bar{Y}_n = [S_n] \bar{Y}_{n-1}.$$

Таким образом, имеем уравнение

$$\bar{Y}_n = [S_n] [S_{n-1}] \dots [S_1] \bar{Y}_0.$$

Если обозначить

$$[P] = [S_n][S_{n-1}] \dots [S_1],$$

тогда получим равенство

$$\bar{Y}_n = [P] \bar{Y}_0. \quad (5.4)$$

Из граничных условий в точке $x=l$ согласно (2.4) и (4.1) имеем два уравнения

$$A_n \sin r_n l + B_n \cos r_n l = 0; \quad C_n \sinh r_n l + D_n \cosh r_n l = 0,$$

которые в матричном виде принимают такую форму:

$$\begin{vmatrix} \sin r_n l & \cos r_n l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh r_n l & \cosh r_n l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее равенство означает, что

$$[C] \bar{Y}_n = 0; \quad (5.5)$$

$$[C] = \begin{vmatrix} \sin r_n l & \cos r_n l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh r_n l & \cosh r_n l \end{vmatrix}.$$

Здесь $r_n = k / \sqrt{h_l}$ и h_l – толщина оболочки в последней секции вблизи края $x=l$.

С учетом выражения (5.4) уравнение (5.5) примет вид

$$[C][P] \bar{Y}_0 = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} \sin r_n l & \cos r_n l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh r_n l & \cosh r_n l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ B_0 \\ 0 \\ D_0 \end{vmatrix} = 0.$$

После несложных выкладок из последнего равенства получим систему уравнений

$$(p_{12} \sin r_n l + p_{22} \cos r_n l) B_0 + (p_{14} \sin r_n l + p_{24} \cos r_n l) D_0 = 0;$$

$$(p_{32} \sinh r_n l + p_{42} \cosh r_n l) B_0 + (p_{34} \sinh r_n l + p_{44} \cosh r_n l) D_0 = 0.$$

Это однородная линейная алгебраическая система. Для того, чтобы она имела нетривиальное решение, ее определитель должен равняться нулю, т.е. должно выполняться уравнение

$$\begin{aligned} & \sin r_n l [(p_{12} p_{34} - p_{14} p_{32}) \sin r_n l + (p_{22} p_{34} - p_{24} p_{32}) \cos r_n l] + \\ & + \cosh r_n l [(p_{12} p_{44} - p_{14} p_{42}) \sin r_n l + (p_{22} p_{44} - p_{24} p_{42}) \cos r_n l] = 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где p_{ij} – компоненты матрицы P .

Это есть окончательное уравнение для определения характеристического числа k , которое связано с r_i соотношением $r_i = k / \sqrt{h_i}$.

Рассмотрим далее случай, когда половина оболочки состоит из двух частей с толщинами h_0 и h_1 , соответственно, а перепад толщин находится в сечении $x=a$. В данном случае $n = 1$ и элементы матрицы $[P] = [S_1] = (s_{ij})$ имеют вид

$$s_{11}(k) = (1 + \delta_1)\sin(kl_1)\sin(kl_2) + (\delta_2 + \delta_4)\cos(kl_1)\cos(kl_2) - \delta_3\sin(kl_1)\cos(kl_2);$$

$$s_{12}(k) = (1 + \delta_1)\cos(kl_1)\sin(kl_2) - (\delta_2 + \delta_4)\sin(kl_1)\cos(kl_2) - \delta_3\cos(kl_1)\cos(kl_2);$$

$$s_{13}(k) = (1 - \delta_1)\sinh(kl_1)\sin(kl_2) + (\delta_2 - \delta_4)\cosh(kl_1)\cos(kl_2) + \delta_3\sinh(kl_1)\cos(kl_2);$$

$$s_{14}(k) = (1 - \delta_1)\cosh(kl_1)\sin(kl_2) + (\delta_2 - \delta_4)\sinh(kl_1)\cos(kl_2) + \delta_3\cosh(kl_1)\cos(kl_2);$$

$$s_{21}(k) = (1 + \delta_1)\sin(kl_1)\cos(kl_2) - (\delta_2 + \delta_4)\cos(kl_1)\sin(kl_2) + \delta_3\sin(kl_1)\sin(kl_2);$$

$$s_{22}(k) = (1 + \delta_1)\cos(kl_1)\cos(kl_2) + (\delta_2 + \delta_4)\sin(kl_1)\sin(kl_2) + \delta_3\cos(kl_1)\sin(kl_2);$$

$$s_{23}(k) = (1 - \delta_1)\sinh(kl_1)\cos(kl_2) - (\delta_2 - \delta_4)\cosh(kl_1)\sin(kl_2) - \delta_3\sinh(kl_1)\sin(kl_2);$$

$$s_{24}(k) = (1 - \delta_1)\cosh(kl_1)\cos(kl_2) - (\delta_2 - \delta_4)\sinh(kl_1)\sin(kl_2) - \delta_3\cosh(kl_1)\sin(kl_2);$$

$$s_{31}(k) = -(1 - \delta_1)\sin(kl_1)\sinh(kl_2) + (\delta_2 - \delta_4)\cos(kl_1)\cosh(kl_2) - \delta_3\sin(kl_1)\cosh(kl_2);$$

$$s_{32}(k) = -(1 - \delta_1)\cos(kl_1)\sinh(kl_2) - (\delta_2 - \delta_4)\sin(kl_1)\cosh(kl_2) - \delta_3\cos(kl_1)\cosh(kl_2);$$

$$s_{33}(k) = -(1 + \delta_1)\sinh(kl_1)\sinh(kl_2) + (\delta_2 + \delta_4)\cosh(kl_1)\cosh(kl_2) + \delta_3\sinh(kl_1)\cosh(kl_2);$$

$$s_{34}(k) = -(1 + \delta_1)\cosh(kl_1)\sinh(kl_2) + (\delta_2 + \delta_4)\sinh(kl_1)\cosh(kl_2) + \delta_3\cosh(kl_1)\cosh(kl_2);$$

$$s_{41}(k) = (1 - \delta_1)\sin(kl_1)\cosh(kl_2) - (\delta_2 - \delta_4)\cos(kl_1)\sinh(kl_2) + \delta_3\sin(kl_1)\sinh(kl_2);$$

$$s_{42}(k) = (1 - \delta_1)\cos(kl_1)\cosh(kl_2) + (\delta_2 - \delta_4)\sin(kl_1)\sinh(kl_2) + \delta_3\cos(kl_1)\sinh(kl_2);$$

$$s_{43}(k) = (1 + \delta_1)\sinh(kl_1)\cosh(kl_2) - (\delta_2 + \delta_4)\cosh(kl_1)\sinh(kl_2) - \delta_3\sinh(kl_1)\sinh(kl_2);$$

$$s_{44}(k) = (1 + \delta_1)\cosh(kl_1)\cosh(kl_2) - (\delta_2 + \delta_4)\sinh(kl_1)\sinh(kl_2) - \delta_3\cosh(kl_1)\sinh(kl_2),$$

$$(l_1 = a / \sqrt{h_0}; l_2 = a / \sqrt{h_1}; \delta_1 = (h_0 / h_1)^2; \delta_2 = (h_1 / h_0)^{1/2};$$

$$\delta_3 = 6\pi f(s)\sqrt{h_1}\gamma_1k; \delta_4 = \gamma_1\gamma_2;$$

h_0 и h_1 – толщины оболочки до и после поперечного сечения $x = a$.

Уравнение для определения характеристического числа k имеет (с учетом $l_3 = l / \sqrt{h_1}$) такой вид:

$$\sinh kl_3 [(s_{12}(k)s_{34}(k) - s_{14}(k)s_{32}(k))\sin kl_3 + (s_{22}(k)s_{34}(k) - s_{24}(k)s_{32}(k))\cos kl_3] +$$

$$+ \cosh kl_3 [(s_{12}(k)s_{44}(k) - s_{14}(k)s_{42}(k))\sin kl_3 + (s_{22}(k)s_{44}(k) - s_{24}(k)s_{42}(k))\cos kl_3] = 0$$

или с учетом $l_4 = (a-l) / \sqrt{h_1}$

$$\begin{aligned} & ((1 - \delta_1)\cos kl_1 \cosh kl_4 + ((\delta_2 - \delta_4)\sin kl_1 + \delta_3 \cos kl_1) \sinh kl_4); \\ & ((1 - \delta_1)\cosh kl_1 \cos kl_4 - ((\delta_2 - \delta_4)\sinh kl_1 + \delta_3 \cosh kl_1) \sin kl_4) - \\ & - ((1 + \delta_1)\cos kl_1 \cos kl_4 + ((\delta_2 + \delta_4)\sin kl_1 + \delta_3 \cos kl_1) \sin kl_4); \\ & ((1 + \delta_1)\cosh kl_1 \cosh kl_4 - ((\delta_2 + \delta_4)\sinh kl_1 + \delta_3 \cosh kl_1) \sinh kl_4) = 0. \end{aligned}$$

§6. Численные результаты.

Для численных расчетов выбрано два образца: одноступенчатая и двухступенчатая оболочки. Расчеты произведены с помощью пакета Mathcad.

При рассмотрении одноступенчатой оболочки получено, что при приближении точки перепада толщины оболочки к концу l влияние глубины трещины на характеристическое число k исчезает. Подобный анализ показывает, что в предельном случае уравнение (5.6) принимает вид

$$\cos(kl_1) = 0.$$

При приближении точки перепада толщины оболочки к ее центру (к точке симметрии) влияние трещины на характеристическое число k существенно увеличивается и уравнение (5.6) принимает вид

$$\delta_3 \sinh kl_2 \cos kl_2 + \cosh kl_2 [-\delta_3 \sin kl_2 + 2\delta_1 \cos kl_2] = 0.$$

Для удобства введем обозначения:

$$a = \beta l \text{ и } a_i = \beta_i l, \gamma = h_1/h_0 \text{ и } \gamma_i = h_i/h_0 \text{ (} i=1,2\text{)}.$$

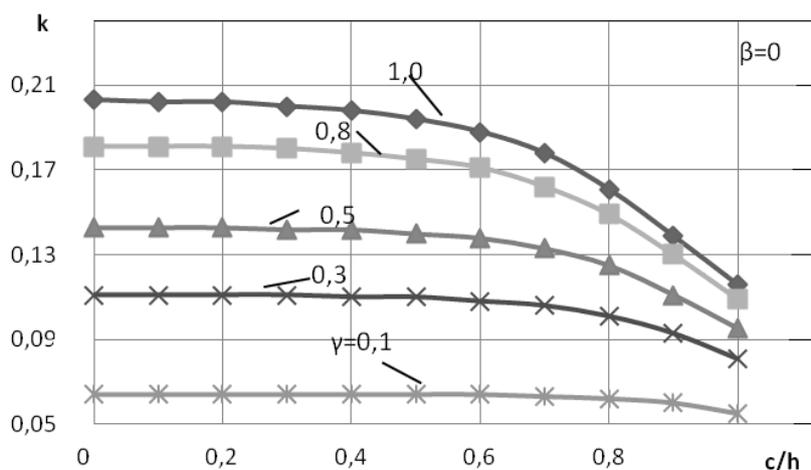
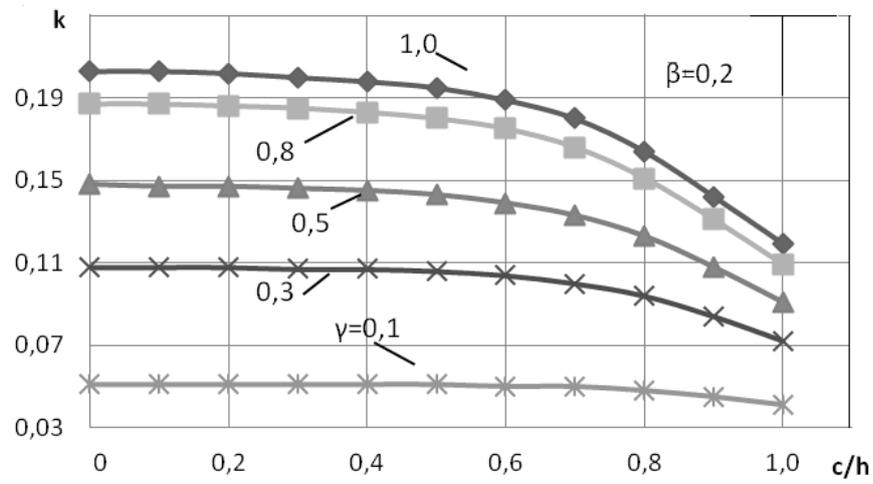
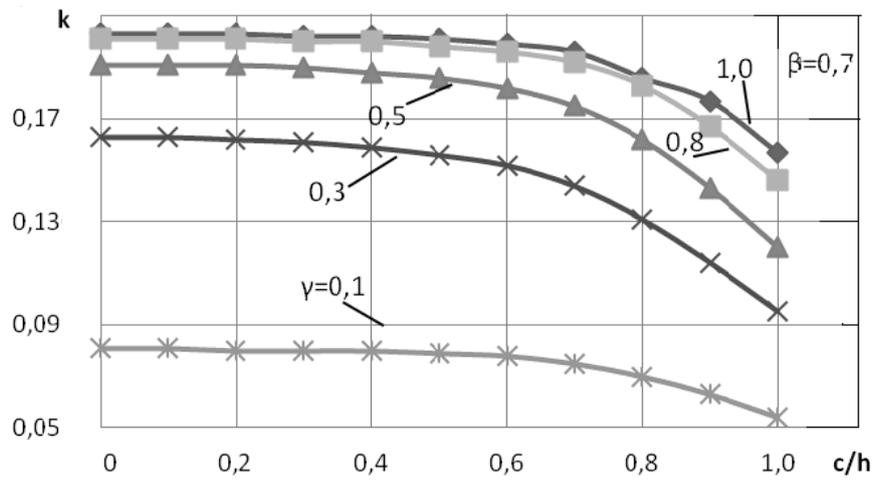


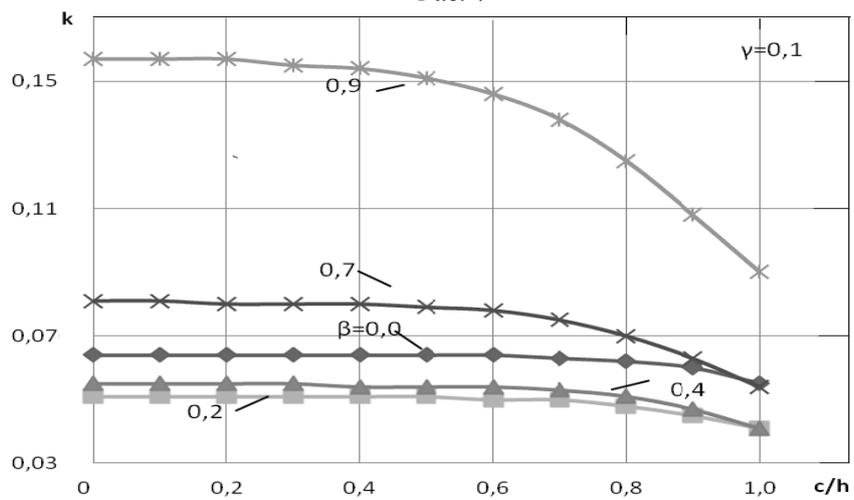
Рис. 2



Puc. 3



Puc. 4



Puc. 5

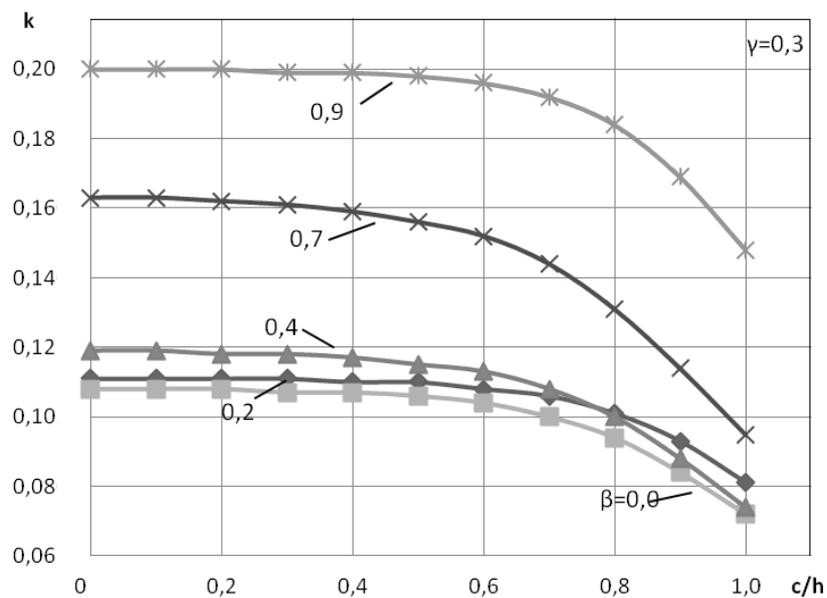


Рис. 6

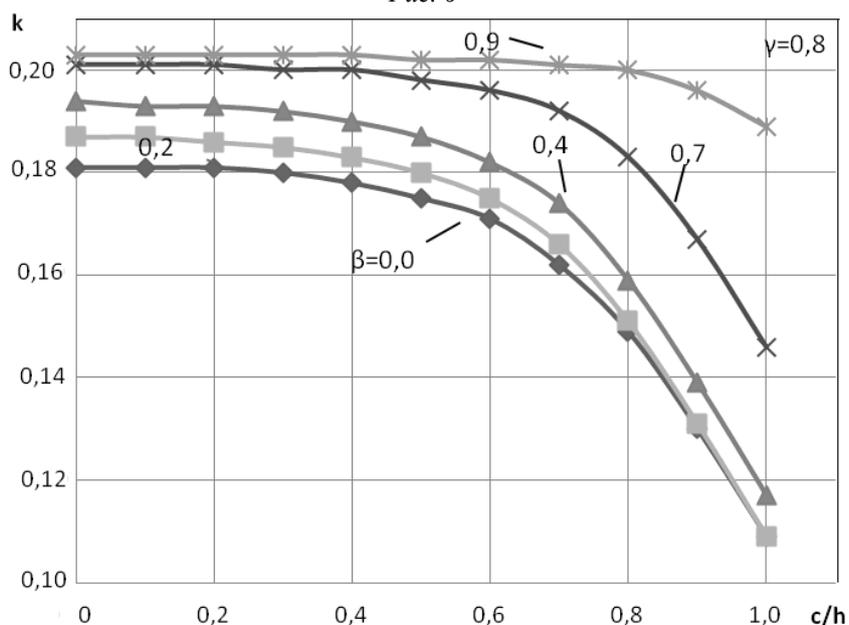


Рис. 7

Для одноступенчатой половины оболочки выбраны следующие размеры: $l=0,6$ и $h_1=0,006$. На рис. 2 – 4 представлены зависимости характеристического числа k от глубины трещины при некоторых значениях величины γ . Рис.2 соответствует случаю, когда $\beta=0$, а рис. 3 и 4 случаям, когда $\beta = 0,2$ и $\beta = 0,7$, соответственно. Таким образом, на рис. 2 изображена ситуация, где трещина находится в центральном поперечном сечении и оболочка имеет постоянную толщину. На рис.3 и 4 трещина находится в сечениях $x = 0,2l$ и $x = 0,7l$, соответственно.

Как видно из рис. 2 – 4 характеристическое число k и соответственно собственная частота ω мало чувствительны по отношению длины трещины, если $c < h/2$. Характеристическое число k монотонно уменьшается при увеличении длины трещины.

Зависимость характеристического числа k от глубины трещины при $\gamma = 0,1$; $0,3$ и $0,8$ представлена на рис. 5 – 7. Различные кривые здесь соответствуют различно-

му положению трещины. Из анализа рис. 5 – 7 следует, что наибольшее значение характеристического числа k достигается при $\beta = 0$, т.е. тогда, когда трещина находится в середине пролета и толщина оболочки постоянна.

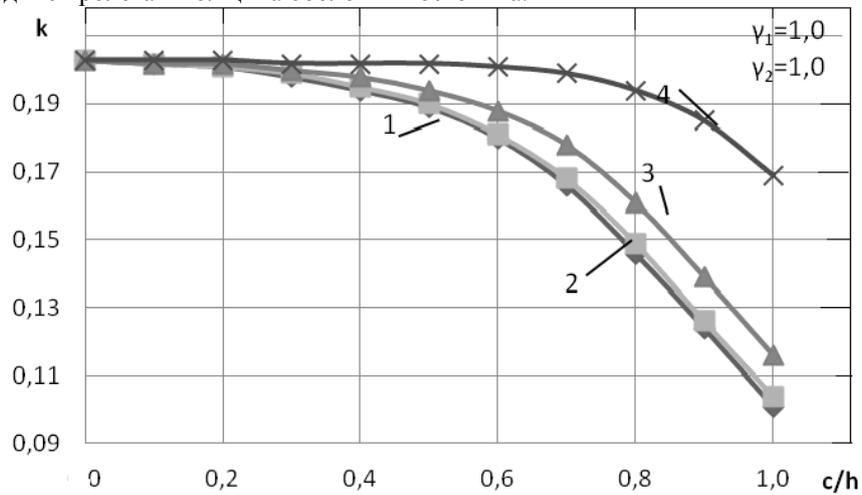


Рис. 8

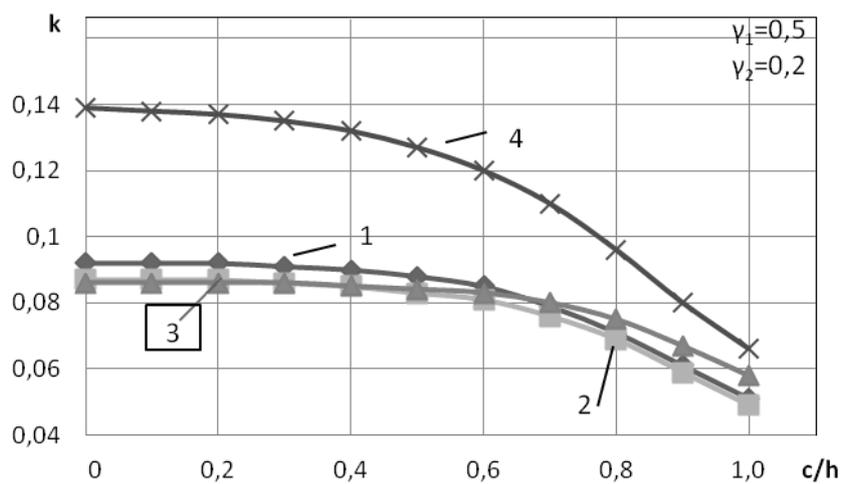


Рис. 9

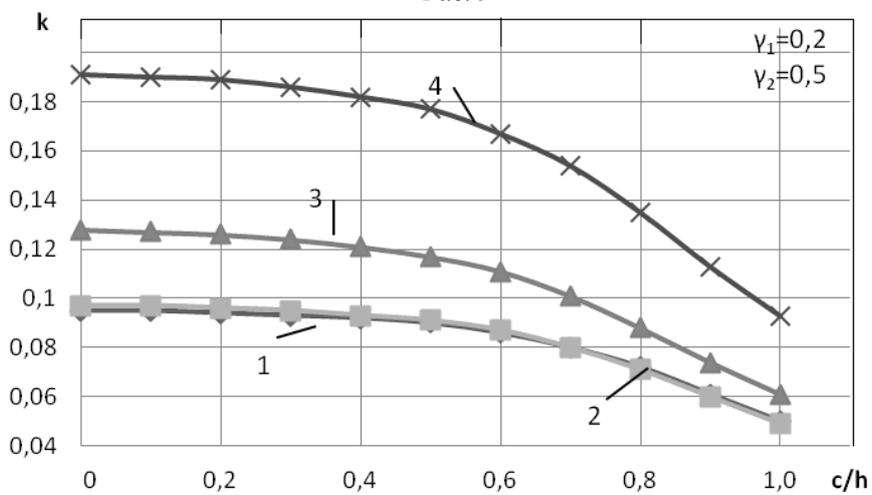


Рис. 10

Расчеты в случае двухступенчатой оболочки изображены на рис. 8 – 10. Принято, что глубины трещин обеих ступеней были одинаковыми при различных других параметрах. Основные размеры оставались теми же, что и у одноступенчатой оболочки, т.е. $l=0,6$ и $h_1=0,006$. Варьировалось только место расположений ступеней с трещинами. Кривые I на рис. 8 – 10 соответствует значениям $\beta_1=0$; $\beta_2=0,3$; в случае серии 2 – $\beta_1=0,1$; $\beta_2=0,4$; в случае серии 3 – $\beta_1=0,3$; $\beta_2=0,7$ и в случае серии 4 – $\beta_1=0,7$; $\beta_2=0,8$, кроме рис. 10, где в случае серии 4 имеем $\beta_1=0,8$; $\beta_2=0,9$. На рис. 8 принято: $\gamma_1=\gamma_2=1$, на рис. 9 – $\gamma_1=0,5$; $\gamma_2=0,2$ и на рис. 10 – $\gamma_1=0,2$; $\gamma_2=0,5$.

Результаты расчетов показывают, что как при одноступенчатой оболочки, так и в этом случае характеристическое число k с ростом глубин трещин уменьшается.

Особый интерес в случае двухступенчатой оболочки вызывает оболочка без трещин, у которой длина среднего пролета между ступенями стремится к нулю и толщина этого пролета меньше других. Конфигурацию такой оболочки можно принять одноступенчатой оболочкой с круговым разрезом в ступени.

В табл. 1 и 2 дано сравнение двух моделей расчета характеристического числа k . Первая модель состоит из одноступенчатой оболочки, в которой локальная гибкость описывается посредством пружины с заданной жесткостью K_T , размещенной в том же самом поперечном сечении, где и трещина. В случае второй модели рассмотрена двухступенчатая оболочка, где трещина представляет собой серединный пролет между ступенями. В обоих случаях $l=0,6$ и $h_1=0,006$. Для модели 2 выбираем $\Delta=0,0001$ (длина среднего пролета).

Для трех примеров модели 1 были приняты соответствующие примеры модели 2, при этом γ модели 1 соответствует γ_1 модели 2, β модели 1 соответствует β_1 модели 2 и различные значения γ_2 модели 2 соответствуют определенным значениям глубины трещины s модели 1. В табл. 1 представлены значения k при различных значениях глубины трещины и координаты a_1 модели 1. Табл. 2 соответствует случаям модели 2, когда $\beta=0$, $\beta=0,4$ и $\beta=0,7$. Из табл. 1 и 2 видно, что значения характеристического числа k при разных моделях, имитирующих одинаковые глубины трещины, совпадают с достаточной точностью. Результаты являются особенно близкими при малых значениях глубины трещины. Если, например, глубина трещины $c \leq 0,3h$, то максимальное расхождение результатов $\Delta k=0,003$ (при $c=0,5h$ имеем $\Delta k=0,006$).

Таблица 1

s	γ	1,0	0,5	0,1
	β	0,0	0,4	0,7
0,0		0,203	0,161	0,081
0,1		0,202	0,161	0,081
0,2		0,202	0,160	0,080
0,3		0,200	0,159	0,080
0,4		0,198	0,158	0,080
0,5		0,194	0,155	0,079
0,6		0,188	0,151	0,078
0,7		0,178	0,143	0,075
0,8		0,161	0,131	0,070
0,9		0,139	0,114	0,063
1,0		0,116	0,095	0,054

Таблица 2

s	γ_1	1,0	0,5	0,1
	β_1	0,0	0,4	0,7
0,0		0,203	0,161	0,080
0,1		0,203	0,161	0,080
0,2		0,203	0,161	0,080
0,3		0,203	0,160	0,080
0,4		0,202	0,160	0,079
0,5		0,202	0,159	0,078
0,6		0,200	0,158	0,077
0,7		0,197	0,154	0,073
0,8		0,186	0,141	0,064
0,9		0,140	0,102	0,044
1,0		–	–	–

Заклучение.

Представлен метод определения осесимметричных колебаний упругих круговых цилиндрических оболочек с трещинами. Принято, что толщина оболочки является кусочно-постоянной и в углах ступеней расположены трещины. Разработанный метод позволяет установить влияние параметров трещин на собственную частоту колебаний ступенчатых оболочек. Результаты численных расчетов представлены в случаях одно- и двухступенчатых оболочек с шарнирно-закрепленными торцами. Расчетами обнаружено, что характеристическое число монотонно уменьшается при увеличении глубины трещины, если другие геометрические параметры остаются постоянными. Расчеты показали, что максимальное значение характеристического числа достигается, если трещина находится в середине пролета при всех значениях глубины трещины.

Работа выполнена в Институте математики Тартуского университета в Эстонии. Авторы выражают благодарность Эстонскому Научному Фонду за частичное поддержание данного исследования грантом ETF9110 «Оптимизация структурных элементов» и целевым финансированием SF0180081s08 „Модели прикладной математики и механики”.

РЕЗЮМЕ. Досліджено поперечні осесиметричні коливання пружної багатосхідчастої циліндричної оболонки і прийнято наявність стійких тріщин у вхідних кутах сходін. Вплив тріщин на коливання оболонки оцінено з урахуванням локальної гнучкості та функції піддатливості, що пов'язана з коефіцієнтом інтенсивності напружень лінійної механіки руйнування. Отримано розв'язок у матричній формі з урахуванням довільного числа тріщин. Чисельно оцінено вплив розташування та довжин тріщин на поперечні осесиметричні коливання пружних одно- та двосхідчастих циліндричних оболонок.

1. Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Свободные осесимметричные колебания полого цилиндра при различных видах закрепления торцов // Прикл. механика. – 1990. – 26, №5. – С. 109 – 111.
2. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал.Н., Чехов Вик.Н., Шнеренко К.И. Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями. – К.: Наук. думка, 1974. – 272с.
3. Панасюк В.В. Механика разрушения и прочность материалов. Т. 1. Основы механики разрушения материалов. – К.: Наук.думка, 1988. – 300с.
4. Bashchuk E.Yu, Boichuk V.Yu. Influence of the Inhomogeneity of the Principal Stress State on the Critical Loads of a Plate with a Crack // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N3. – P. 328-336.
5. Chondros T.G., Dimarogonas A.D. Identification of cracks in welded joints of complex structures // J. Sound Vibr. – 1980. – 69, N4. – С. 531 – 538.
6. Dimarogonas A.D. Vibration of cracked structures: a state of the art review // Eng. Fracture Mech. – 1996. – 55. – P. 831 – 857.
7. Dovzhik M.V., Nazarenko V.M. Fracture of a Material Compressed along a Periodic Set of Closely Spaced Cracks // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N6. – P. 710-718.
8. Grigorenko, Ya. M., Grigorenko A. Ya., Zakhariichenko L. I. Stress-Strain Analysis of Orthotropic Closed and Open Noncircular Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N7. – P. 778 – 785.
9. Gudmundson P. Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes // J. Mech. Phys. Solids. – 1982. – 30, N 5. – С. 339 – 353.
10. Kikidis M.L., Papadopoulos C.A. Slenderness ratio effect on cracked beam // J. Sound Vibr. – 1992. – 155, N 1. – С. 1 – 11.
11. Kostandov Yu.A., Makarov P.V., Eremin M.O., Smolin I.Yu., Shipovskii I.E. Fracture of Compressed Brittle Bodies with a Crack // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N1. – P. 95-101.
12. Lellep J., Sakkov E. Buckling of stepped composite columns // Mech. Comp. Mater. – 2006. – 42, N 1. – P. 63 – 72.
13. Liang R.Y., Choy F.K., Hu J. Detection of cracks in beam structures using measurements of natural frequencies // J. Franklin Inst. – 1991. – 328, N 4. – P. 505 – 518.
14. Liang R.Y., Hu J., Choy F. Theoretical study of crack-induced eigenfrequency changes on beam structures // J. Eng. Mech. – 1992. – 118, N 2. – P. 384 – 395.
15. Murakami Y. Stress Intensity Factor Handbook. I – II. – Oxford: Pergamon Press, 1992.
16. Nandwana B.P., Maiti S.K. Detection of the location and size of a crack in stepped cantilever beams based on measurements of natural frequencies // J. Sound Vibr. – 1997. – 203, N 3. – P. 435 – 446.
17. Narkis Y., Elmanah E. Crack identification in a cantilever beam under uncertain end conditions // Int. J. Mech. Sci. – 1996. – 38, N 5. – P. 499 – 507.
18. Rizos P.F., Aspragathos N., Dimarogonas A.D. Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes // J. Sound Vibr. – 1990. – 138, N 3. – P. 381 – 388.
19. Shen M.-H., Pierre C. Natural modes of Bernoulli – Euler beams with symmetric cracks // J. Sound Vibr. – 1990. – 138, N 1. – P. 115 – 134.
20. Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. Stress Analysis of Cracks Handbook // ASME, N.Y. – 2000.

Поступила 23.11.2013

Утверждена в печать 26.06.2013