

В. Б. Ларин

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОДНОСТОРОННЕГО  
КВАДРАТНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ  
И ЗАДАЧА УТОЧНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The Schur method and the method of doubling transformations, which are used to obtain the solution of algebraic Riccati equation, are generalized on the case of unilateral quadratic matrix equation. On the examples, an efficiency of the offered algorithms of solving the unilateral quadratic matrix equation is shown. These algorithms are compared with the known ones. It is shown that the solutions of unilateral quadratic matrix equation can be used in the problem of refining the model parameters.

**Key words:** unilateral quadratic matrix equation, linear matrix inequality, model updating.

**§1. Введение.**

Вопросы теории колебаний продолжают занимать важное место в различных инженерных задачах [9, 12, 16, 17]. Следует отметить теорию сильно демпфированных систем [2], в которой центральное место занимают вопросы определения корней матричного (или операторного [2]) уравнения

$$A_2 X^2 + A_1 X + A_0 = 0. \quad (1.1)$$

В [10] матричное уравнение (1.1) называется односторонним квадратным матричным уравнением (ОКМУ). Здесь же отмечается широкий круг задач управления, в которых необходимо получить решение (корень [2]) ОКМУ.

Как отмечено в [2], одной из мотиваций определения корней (1.1) могут быть следующие соображения. В скалярном случае уравнение (1.1) можно рассматривать как характеристическое уравнение для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами  $A_2 \ddot{q} + A_1 \dot{q} + A_0 q = 0$ .

Общее решение этого уравнения, как известно, можно записать в виде  $q = c_1 e^{x_1 t} + c_2 e^{x_2 t}$ , где  $x_1, x_2$  – корни характеристического уравнения. В этой связи возникает вопрос о возможности построения аналогичных соотношений в матричном случае, что, в свою очередь, потребует определения корней (1.1).

Отметим, что решения уравнения (1.1), как показано в §§4, 5, могут быть использованы в задаче уточнения параметров модели [14, 24]. Также ниже показано, что в ряде случаев для построения решения (1.1) можно использовать метод удвоения интервала [6, 21, 22], который, в отличие от алгоритма [10], не требует обратимости матрицы  $A_1$  в (1.1). В случае обратимости матрицы  $A_2$ , показано, что для решения (1.1) можно использовать соответствующим образом модифицированный метод Шура [7, 8, 23].

**§2. Метод удвоения интервала [6, 21, 22].**

Ряд алгоритмов определения корней (матриц  $X$  размера  $n \times n$ ) матричных уравнений сводятся к построению решения следующей системы (подробности см., например [22]):

$$M \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} S; \quad (2.1)$$

здесь и далее  $I$  – единичная матрица. В (2.1) матрицы  $M, F$  (размера  $2n \times 2n$ ) определяются коэффициентами этих матричных уравнений. Спектр матрицы  $S$  (размера  $n \times n$ ) определяется тем или иным набором  $n$  из  $2n$  собственных значений матричного пучка

$$M - \lambda F, \quad (2.2)$$

т.е. предполагаем, как и в [10], что инвариантное подпространство пучка (2.2), соответствующее собственным значениям матрицы  $S$ , определяется столбцами матрицы  $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ .

Если собственные значения ( $\lambda_i$ ) матричного пучка (2.2) упорядочены в порядке возрастания модуля и  $|\lambda_{n+1}| > 1, |\lambda_n| < 1$ , то можно отметить 2 решения (2.1) (см. [22], где есть дальнейшие ссылки). Так, если спектральный радиус матрицы  $S$  меньше единицы (ее собственные значения совпадают с  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ), то соответствующее решение (2.1) называется стабилизирующим решением. Как и в [6, 21, 22], это решение обозначим  $X_+$ , а соответствующую матрицу  $S$  обозначим  $S_+$ . В случае, если собственные значения матрицы  $S$  совпадают с  $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n}$ , то такое решение (если оно существует) называется антистабилизирующим решением. В этом случае решение обозначим  $X_-$ , а соответствующую матрицу  $S - \bar{S}$ . Таким образом, можно, следуя [6, 21, 22], записать два уравнения, которые определяют  $X_+$  и  $X_-$ :

$$M \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} S_+; \quad (2.3)$$

$$M \begin{bmatrix} I \\ X_- \end{bmatrix} S_- = F \begin{bmatrix} I \\ X_- \end{bmatrix}; \quad S_- = (\bar{S})^{-1}. \quad (2.4)$$

Отметим, что в соответствии с принятым предположением, собственные значения матрицы  $S_-$  лежат внутри окружности единичного радиуса. Следуя [6, 21, 22], кратко изложим суть метода удвоения интервала применительно к задаче определения решений (2.3), (2.4).

Итак, умножив (2.3) справа на  $S_+$  получим

$$M \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} S_+ = F \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} S_+^2. \quad (2.5)$$

Выберем матрицы  $L, G$ , удовлетворяющие соотношению

$$LM = GF. \quad (2.6)$$

Умножив слева (2.3), (2.5) на  $G$  и  $L$ , соответственно, получим уравнение

$$M_1 \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} = F_1 \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} S_+^2 \quad (M_1 = GM; \quad F_1 = LF). \quad (2.7)$$

Аналогично, из соотношения (2.4), следует равенство

$$M_1 \begin{bmatrix} I \\ X_- \end{bmatrix} S_-^2 = F_1 \begin{bmatrix} I \\ X_- \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Выполняя аналогичные операции с (2.7), (2.8), получаем равенства

$$M_2 \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} = F_2 \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} S_+^{2^2}; \quad M_2 \begin{bmatrix} I \\ X_- \end{bmatrix} S_-^{2^2} = F_2 \begin{bmatrix} I \\ X_- \end{bmatrix}$$

$$(M_2 = G_1 M_1; \quad F_2 = L_1 F_1; \quad L_1 M_1 = G_1 F_1).$$

Продолжая этот процесс, на  $p$ -м шаге получаем формулы

$$M_p \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} = F_p \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} S_+^{2^p}; \quad M_p \begin{bmatrix} I \\ X_- \end{bmatrix} S_-^{2^p} = F_p \begin{bmatrix} I \\ X_- \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$(M_p = G_{p-1} M_{p-1}; \quad F_p = L_{p-1} F_{p-1}; \quad L_{p-1} M_{p-1} = G_{p-1} F_{p-1}).$$

Выше отмечено, что собственные значения матриц  $S_+$ ,  $S_-$  лежат внутри окружности единичного радиуса, поэтому  $\lim_{p \rightarrow \infty} S_+^{2^p} = 0$ ;  $\lim_{p \rightarrow \infty} S_-^{2^p} = 0$ .

Следовательно, при достаточно большом  $p$ , как следует из (2.9), можно принять

$$M_p \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} = 0; \quad F_p \begin{bmatrix} I \\ X_- \end{bmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Соотношения (2.10) определяют стабилизирующее ( $X_+$ ) и (если существует) анти-стабилизирующее ( $X_-$ ) решения. Другими словами, последовательности матриц  $Z_p^+$ ,  $Z_p^-$ , определяемых соотношениями

$$M_p \begin{bmatrix} I \\ Z_p^+ \end{bmatrix} = 0; \quad F_p \begin{bmatrix} I \\ Z_p^- \end{bmatrix} = 0,$$

сходятся при  $p \rightarrow \infty$  к решениям  $X_+$  и  $X_-$ , соответственно. Таким образом, задача определения  $X_+$ ,  $X_-$  сводится к задаче построения матриц  $M_p$ ,  $F_p$ , т.е., согласно (2.9), к нахождению матриц  $L_{p-1}$ ,  $G_{p-1}$ . Этот вопрос достаточно рассмотреть применительно к (2.6).

Отметим, что для определения матриц  $L$ ,  $G$  в (2.6) можно использовать как аналитические выражения, так и численные алгоритмы. Соотношение (2.6) соответствует выражению [18, (22)]. В [18] приведены различные аналитические выражения для матриц  $L$ ,  $G$ . В частности, выражение [18 (24)] имеет вид

$$L = I - M(F + M^T M)^{-1} M^T; \quad G = M(F + M^T M)^{-1}. \quad (2.11)$$

Здесь и далее верхний индекс "T" означает транспонирование.

Можно указать и численные алгоритмы нахождения матриц  $L$  и  $G$ . Отметим, что согласно (2.6), матрица  $[L \quad G]^T$  является ядром матрицы  $\begin{bmatrix} M \\ -F \end{bmatrix}^T$  и, следовательно, для определения матриц  $L$ ,  $G$  можно использовать процедуру null.m пакета

MATLAB. В [13] матрицы  $L, G$  предлагается определять, используя QR-разложение (процедура `qr.m`).

Таким образом, используя соотношение (2.11) или указанные численные алгоритмы, можно получить матрицы  $L, G$ , определяемые (2.6). Аналогичным образом можно вычислить и матрицы  $L_{p-1}, G_{p-1}$ .

### §3. Одностороннее квадратное матричное уравнение (1.1).

Представим уравнение (1.1) в виде, аналогичном (2.1), т. е.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

В (3.1) и далее,  $0$  – нулевая матрица соответствующего размера. Таким образом, в обозначениях (2.1) имеем

$$M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}; \quad S = X. \quad (3.2)$$

Пусть в (2.2) матрицы  $M, F$  определяются (3.2), а собственные значения  $\lambda_i$  пучка (2.2), как уже упоминалось, упорядочены в порядке возрастания модуля и

$$|\lambda_n| < 1 < |\lambda_{n+1}|. \quad (3.3)$$

Если при этом базис подпространства, соответствующего собственным значениям  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , определяется столбцами матрицы  $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ , то в этом случае для определения корней (1.1) можно использовать описанный выше метод удвоения интервала (соотношения (2.10)). В случае более общем, чем (3.3), т.е. когда собственные значения пучка (2.2) упорядочены по возрастанию модуля и

$$|\lambda_n| < \rho < |\lambda_{n+1}|, \quad (3.4)$$

можно также использовать метод удвоения интервала. Отметим, что такая ситуация имеет место, например, в случае, так называемых, сильно демпфированных систем [2].

Очевидно, в этом случае (3.1) можно записать так:

$$M \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \rho F \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} S; \quad S = \frac{1}{\rho} X. \quad (3.5)$$

В (3.5) матрицы  $M, F$  определяются (3.2). При такой модификации (3.1)  $n$  собственных значений пучка

$$M - \lambda \rho F \quad (3.6)$$

будет лежать внутри окружности единичного радиуса, остальные  $n$  будут лежать вне.

Отметим, что в [10, соотношение (8)] описан итерационный алгоритм построения решения (1.1). В соответствии с этим алгоритмом, строится последовательность матриц

$$\begin{aligned} A_1^{(k+1)} &= A_1^{(k)} - A_0^{(k)} K^{(k)} A_2^{(k)} - A_2^{(k)} K^{(k)} A_0^{(k)} \quad (K^{(k)} = (A_1^{(k)})^{-1}); \\ A_0^{(k+1)} &= -A_0^{(k)} K^{(k)} A_0^{(k)}; \quad A_2^{(k+1)} = -A_2^{(k)} K^{(k)} A_2^{(k)}; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$B^{(k+1)} = B^k - A_2^{(k)} K^{(k)} A_0^{(k)}; \quad A_i^{(0)} = A_i \quad (i=0,1,2, \quad B^{(0)} = A_1).$$

В [8] показано, что в случае выполнения (3.3) последовательность матриц

$$S^{(k)} = -(B^{(k)})^{-1} A_0 \quad (3.8)$$

сходится к решению (1.1), которое соответствует  $X_+$  в (2.3).

Отметим, что в отличие от алгоритма п. 2, реализация алгоритма (3.7), (3.8) требует обратимости матрицы  $A_1$  (см. ниже пример 2).

Случай, когда имеет место соотношение (3.4), простой нормировкой сводится к случаю, когда имеет место соотношение (3.3). Действительно, если корни полинома  $\det (A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0)$  удовлетворяют соотношению (3.4), то корни полинома  $\det (\bar{A}_2 \lambda^2 + \bar{A}_1 \lambda + \lambda_0)$  ( $\bar{A}_2 = A_2 \rho^2$ ;  $\bar{A}_1 = A_1 \rho$ ) удовлетворяют соотношению (3.3). При этом решение  $\bar{S}$  ОКМУ

$$\bar{A}_2 \bar{S}^2 + \bar{A}_1 \bar{S} + A_0 = 0 \quad (3.9)$$

и уравнение (1.1) связаны соотношением, аналогичным (3.5), т. е.  $\bar{S} = S / \rho$ .

Отметим, что если матрица  $A_2$  обратима, то для решения (1.1) можно использовать метод Шура [7, 8, 23]. В этом случае соотношение (3.1) можно записать так:

$$\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} X = H \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_2^{-1} A_0 & -A_2^{-1} A_1 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Пусть ортогональная матрица  $U$  приводит матрицу  $H$  к верхней треугольной форме (форме Шура), т. е.

$$T = U^T H U, \quad (3.11)$$

где  $T$  – верхняя треугольная матрица. Для определения того или иного решения (1.1) необходимо, чтобы диагональные элементы матрицы  $T$  были упорядочены тем или иным способом, например, по убыванию модуля (элемент  $T(1,1)$  матрицы  $T$  имеет максимальный модуль). Разобьем матрицы  $U, T$  на квадратные блоки

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (3.11), приняв во внимание, что  $U^T U = I$ , имеем

$$H \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} t_{11},$$

или

$$\begin{bmatrix} I \\ U_{21} U_{11}^{-1} \end{bmatrix} U_{11} t_{11} U_{11}^{-1} = H \begin{bmatrix} I \\ U_{21} U_{11}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Сравнивая (3.10) и (3.12), получаем два соотношения, позволяющие находить решения (1.1):

$$X = U_{21} U_{11}^{-1}; \quad (3.13)$$

$$X = U_{11} t_{11} U_{11}^{-1}. \quad (3.14)$$

Отметим, что (3.13) соответствует известному соотношению, которое используется для определения решения алгебраического уравнения Риккати [23]. Для определения матриц, фигурирующих в (3.13), (3.14), можно использовать процедуры `schur.m`, `schord.m` пакета MATLAB.

Продолжим рассматривать случай, когда матрица  $A_2$  – обратима. В этом случае можно указать сравнительно простую процедуру уточнения решения (1.1), полученного с помощью описанных выше алгоритмов. Итак, пусть известно, что  $X_0$  – некоторое приближенное значение корня уравнения (1.1). Решение (уточненное) уравнения (1.1) будем искать в виде

$$X = X_0 + \varepsilon X_1, \quad (3.15)$$

где  $\varepsilon X_1$  – малая поправка ( $\varepsilon$  – малый параметр). Подставив (3.15) в (1.1) и пренебрегая членами порядка  $\varepsilon^2$ , имеем

$$(X_0 + A_2^{-1}A_1)\varepsilon X_1 + \varepsilon X_1 X_0 = -X_0^2 - A_2^{-1}A_1 X_0 - A_2^{-1}A_0. \quad (3.16)$$

Соотношение (3.16) позволяет использовать для определения поправки  $\varepsilon X_1$  стандартную процедуру `lyap.m` пакета MATLAB.

#### §4. Уточнение модели.

Рассмотрим возможность использования решений уравнений (1.1) в задаче уточнения модели [14, 24]. Согласно [24], задача уточнения модели формулируется следующим образом. Пусть задана механическая система (модель), движение которой описывается следующим уравнением Лагранжа:

$$M_a \ddot{q} + B_a \dot{q} + K_a q = 0. \quad (4.1)$$

В этом уравнении  $q$  –  $n$ -мерный вектор обобщенных координат, матрицы  $M_a = M_a^T > 0$ ,  $B_a, K_a$  заданы. При этом матрицу  $M_a$  принимаем фиксированной, а матрицы  $B_a, K_a$  подлежат уточнению. Для уточнения значений этих матриц используем полученные тем или иным образом, например, путем эксперимента,  $p \leq n$  собственных векторов  $x_i$  и соответствующих собственных значений  $\tilde{\lambda}_i, i = 1, 2, \dots, p$ . Другими словами, принимаем заданными матрицы  $\tilde{\Lambda} = \text{diag}\{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_p\}$ ,  $\tilde{X} = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p]$ . Предполагаем, что если матрицы  $\tilde{\Lambda}, \tilde{X}$  имеют комплексные элементы, то они замкнуты относительно операции сопряжения, т.е.  $\tilde{\lambda}_{2j} = \overline{\tilde{\lambda}_{2j-1}} \in C$ ,  $\tilde{x}_{2j} = \overline{\tilde{x}_{2j-1}} \in C^n$  при  $j = 1, \dots, \ell$  и  $\tilde{\lambda}_k \in R$ ,  $\tilde{x}_k \in R^n$  при  $k = 2\ell + 1, \dots, p$ . Задача уточнения исходной модели состоит в определении матриц  $B, K$ , которые можно рассматривать как результат «уточнения» значений матриц  $B_a, K_a$  путем использования матриц  $\tilde{\Lambda}, \tilde{X}$ .

Для изложения идеи использования решений уравнения (1.1) в рассматриваемой задаче уточнения модели удобно рассмотреть случай  $p = n$ . Полагаем, что матрицы  $B, K$  должны удовлетворять соотношению

$$M_a \tilde{X} \tilde{\Lambda}^2 + B \tilde{X} \tilde{\Lambda} + K \tilde{X} = 0. \quad (4.2)$$

Предполагая, что матрица  $\tilde{X}$  обратима, перепишем соотношение (4.2) в виде, аналогичном (1.1), т. е.

$$M_a X^2 + B X + K = 0; \quad X = \tilde{X} \tilde{\Lambda} \tilde{X}^{-1}.$$

Итак, пусть в уравнении (1.1)  $A_2 = M_a$ ,  $A_1 = B_a$ ,  $A_0 = K_a$ . Пусть при этих исходных данных, уравнение (1.1) имеет решения  $X_1, X_2$  такие, что объединение множеств собственных значений матриц  $X_1, X_2$  совпадает с множеством  $2n$  корней характеристического уравнения (4.1). Для простоты предположим, что экспериментально получен-

ные данные  $(\tilde{X}, \tilde{\Lambda})$  определяют только «уточненное» значение  $(\tilde{X}_1)$  решения  $X_1$  (спектр  $X_1$  близок к спектру  $\tilde{\Lambda}$ ), т.е.

$$\tilde{X}_1 = \tilde{X} \tilde{\Lambda} \tilde{X}^{-1}. \quad (4.3)$$

Отметим, что в соответствии с условием задачи, нет оснований вносить какие-либо изменения в решение  $X_2$ . Другими словами, полагаем, что матрицы  $B, K$  удовлетворяют следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned} M_a \tilde{X}_1^2 + B \tilde{X}_1 + K &= 0; \\ M_a X_2^2 + B X_2 + K &= 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

которая определяет «уточненные» значения параметров модели, т.е. матрицы  $B, K$ .

В случае  $p < n$ , описанная выше процедура редукции задачи уточнения модели (определение матриц  $B, K$ ) к решению системы линейных уравнений (4.4), требуют внесения некоторых дополнительных процедур, связанных с формированием «уточненных» значений матриц  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ . Проиллюстрируем это на примере формирования матрицы  $\tilde{X}_1$ . Итак, пусть заданы матрицы  $\tilde{X}_p = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p] \in C^{n \times p}$ ,  $\tilde{\Lambda}_p = \text{diag}\{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_p\} \in C^{p \times p}$ .

Решение  $X_1$  уравнения (1.1) представим в виде

$$X_1 = X_0 \Lambda X_0^{-1}. \quad (4.5)$$

Пусть в (4.5) столбцы матрицы  $X_0$  и  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – диагональные элементы матрицы  $\Lambda$  упорядочены таким образом, что первые  $p$  элементов  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  мало отличаются от значений  $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_p$ , соответственно. В этом случае, в качестве матриц  $\tilde{\Lambda}, \tilde{X}$ , формирующих, согласно (4.3), матрицу  $\tilde{X}_1$ , можно принять следующие матрицы:

$$\tilde{\Lambda} = \text{diag}\{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}; \quad \tilde{X} = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p, x_{p+1}, \dots, x_n]. \quad (4.6)$$

Сформировав, согласно (4.3) из матриц (4.6) матрицу  $\tilde{X}_1$ , далее можно из системы (4.4) определить матрицы  $B, K$ . В общем случае, если одна часть спектра матрицы  $\tilde{\Lambda}_p$  близка к соответствующим собственным значениям матрицы  $X_1$ , а оставшаяся часть близка к собственным значениям матрицы  $X_2$ , аналогичные процедуры позволяют сформировать «уточненные» значения  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ , которые, в свою очередь, позволят записать систему, определяющую  $B, K$ , в виде

$$\begin{aligned} M_a \tilde{X}_1^2 + B \tilde{X}_1 + K &= 0; \\ M_a \tilde{X}_2^2 + B \tilde{X}_2 + K &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Отметим возможность в рамках рассматриваемого подхода других, аналогичных постановок задачи об уточнении модели. Так, например, можно принять фиксированной матрицу  $K_a$ , а матрицы  $M_a, B_a$  рассматривать как матрицы, подлежащие уточнению (см. пример 4).

Возможна и более «упрощенная» постановка задачи. А именно, фиксированными считаются матрицы  $M_a, K_a$ , а матрица  $B$ , на структуру которой не накладываются ограничения, подлежит уточнению. В этом случае, аналогом (4.7) будет следующее уравнение:

$$AB^T = D; \quad A = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1^T \\ \tilde{X}_2^T \end{bmatrix}; \quad D = - \begin{bmatrix} (\tilde{X}_1^2)^T M_a^T + K_a^T \\ (\tilde{X}_2^2)^T M_a^T + K_a^T \end{bmatrix}.$$

Для определения матрицы  $B$  можно использовать, например, процедуру  $QR$ -факторизации матрицы  $A$ , т.е.  $A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ . В этом случае, выражение для матрицы  $B$  можно записать в виде  $B = (R^{-1}V)^T$ , где матрица  $V$  является верхним квадратным блоком матрицы  $Q^T D$ .

Существенно, что полученные в результате решения систем (4.4) или (4.7) матрицы  $B, K$ , в общем случае, не будут удовлетворять тем или иным дополнительным условиям, например,  $K = K^T$  и т.п. В этой связи целесообразно разработать процедуру получения таких значений матриц  $B, K$ , которые удовлетворяли бы еще дополнительным условиям. Представляется естественным использовать для этой цели процедуры линейных матричных неравенств (ЛМН) [11].

### §5. Использование ЛМН в задаче уточнения параметров модели.

Как отмечалось, пополнение системы (4.4) или (4.7) дополнительными условиями, которым должны удовлетворять искомые матрицы, например,

$$K - K^T = 0, \quad (5.1)$$

приводит к тому, что система, определяющая искомые матрицы, становится переопределенной. В этом случае, для определения матриц  $B, K$  целесообразно использовать процедуры ЛМН [11]. Конкретизируем этот подход на примере системы (4.7), (5.1). Рассмотрим следующие ЛМН:

$$\begin{bmatrix} Z & T_1 \\ T_1^T & I \end{bmatrix} \geq 0; \quad \begin{bmatrix} Z & T_2 \\ T_2^T & I \end{bmatrix} \geq 0; \quad Z = Z^T; \quad Z \leq \lambda I; \quad (5.2)$$

$$T_1 = K + B\tilde{X}_1 + M_a\tilde{X}_1^2; \quad T_2 = K + B\tilde{X}_2 + M_a\tilde{X}_2^2.$$

В (5.2)  $\lambda$  – скаляр. Как известно [11], ЛМН (5.2) эквивалентны следующим неравенствам:  $Z - T_1 T_1^T \geq 0$ ;  $Z - T_2 T_2^T \geq 0$ , которые с учетом последнего неравенства в (5.2) можно переписать так:

$$\lambda I \geq T_1 T_1^T; \quad \lambda I \geq T_2 T_2^T. \quad (5.3)$$

Очевидно, что при достаточно малой величине  $\lambda$  решения неравенств (5.3), т.е. матрицы  $B, K$ , могут служить достаточно хорошей аппроксимацией решений (4.7). Пополнив неравенства (5.2) условием (5.1), можно сформулировать следующую задачу. Заданы матрицы  $M_a, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ ; необходимо путем выбора матриц  $B, K$  минимизировать  $\lambda$  при выполнении ЛМН (5.2) и условия (5.1). Это стандартная задача ЛМН (задача на собственные значения [11]). Для ее решения используется стандартная процедура `gevr.m` пакета MATLAB [15]. В результате определяются матрицы  $B, K$  и соответствующее значение скаляра  $\lambda$ .

Аналогичная процедура может быть использована и при других постановках задачи. Так, например, если матрица  $K_a$  фиксирована, а матрицы  $M$  и  $B$  подлежат уточнению, то для решения задачи в такой постановке достаточно заменить (5.1) на условие

$$M = M^T, \quad (5.4)$$

а в ЛМН (5.2) в качестве матриц  $T_1, T_2$  принять следующие матрицы:

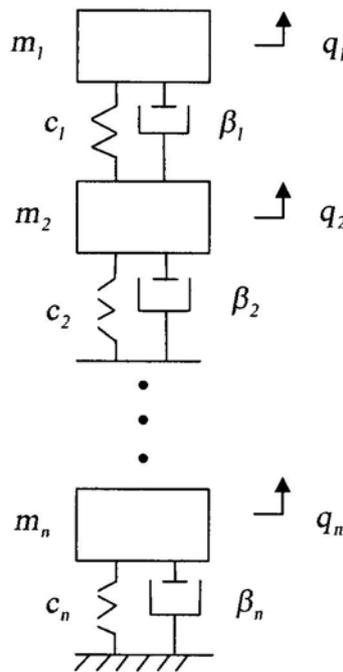
$$T_1 = K_a + B\tilde{X}_1 + M\tilde{X}_1^2; \quad T_2 = K_a + B\tilde{X}_2 + M\tilde{X}_2^2. \quad (5.5)$$

### §6. Примеры.

Проиллюстрируем на примерах эффективность алгоритмов, определяемых соотношениями (2.10), (2.11) и (3.7), (3.8).

**Пример 1.** Рассмотрим колебательную систему, показанную на рисунке, которая состоит из  $n$  масс  $m_i$ , соединенных пружинами с жесткостью  $c_i$  и вязкими демпферами с коэффициентами демпфирования  $\beta_i$ ,  $i=1, \dots, n$ . Координаты масс  $m_i$  обозначим  $q_i$ . Если  $m_i = m$ ,  $\beta_i = b$ ,  $c_i = c$ ,  $i=1, \dots, n$ , то уравнение свободных колебаний такой системы можно записать в виде

$$A_2 \ddot{q} + A_1 \dot{q} + A_0 q = 0; \quad (q = [q_1 \dots q_n]^T; \quad A_2 = mI; \quad A_1 = bD; \quad A_0 = cD). \quad (6.1)$$



Здесь  $D$  – симметричная трехдиагональная матрица следующего вида:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

В этом примере принято, что  $m=1$ ,  $b=1000$ ,  $c=50$ . Определив согласно (6.1) матрицы, фигурирующие в (1.1), для значений  $n=20, 50, 110$  получены решения (1.1). Погрешность ( $er$ ) полученных решений определена отношением нормы невязки к норме решения, т.е.

$$er = \frac{\|A_2 X^2 + A_1 X + A_0\|}{\|X\|}. \quad (6.2)$$

Отметим, что, если в (3.4)  $\rho \neq 1$ , для получения решения (1.1) использованы соотношения (3.5), (3.9). Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

$n$	$er_+$	$er_-$	$er_0$	$er_{01}$	$n\ell$
20	$3,2 \cdot 10^{-11}$	$7 \cdot 10^{-10}$	$9,4 \cdot 10^{-11}$	$3,14 \cdot 10^{-13}$	3
50	$6,4 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-9}$	$3,4 \cdot 10^{-10}$	$6,7 \cdot 10^{-13}$	3
110	$7,4 \cdot 10^{-11}$	$3,4 \cdot 10^{-9}$	$5,6 \cdot 10^{-6}$	$3,2 \cdot 10^{-13}$	3

В табл. 1 приняты следующие обозначения:  $n$  – число масс;  $er_{\pm}$  – погрешности, полученные в результате использования алгоритма (2.10), (2.11), отвечающие решениям  $X_+, X_-$ , соответственно;  $er_0$  – погрешность решения, полученная в результате использования алгоритма (3.7), (3.8);  $er_{01}$  – погрешность уточненного решения, полученного путем использования итерационной процедуры (3.16);  $n\ell$  – количество итераций (3.16), необходимых для получения решения, которому соответствует погрешность  $er_{01}$ .

Отметим, что, согласно результатам, приведенным в табл. 1, в данном примере точность решения при использовании алгоритма (2.10), (2.11) несколько выше, чем при использовании алгоритма, определяемого соотношениями (3.7), (3.8).

Существенно, что в этом примере при любом  $n$  –  $A_2 = I$ , а симметричные матрицы  $A_1, A_0$  положительно определены. Это дает возможность в рассматриваемом конечномерном случае оценить насколько точно удовлетворяют полученные решения  $X_{\pm}$  соотношениям, приведенным в [2]. Согласно [2], условием того, что система сильно демпфирована, является выполнение неравенства

$$A_1^2 \geq 4A_0. \quad (6.3)$$

Как показано в [2, теорема 17], в случае сильно демпфированной системы уравнение (1.1) имеет один и только один корень  $X_1$  такой, что

$$X_1^T X_1 \geq A_0, \quad (6.4)$$

и один и только один корень  $X_2$  такой, что

$$X_2^T X_2 \leq A_0. \quad (6.5)$$

Эти корни называются сопутствующими. Имеют место равенства, которые можно рассматривать как некоторый аналог теоремы Виета:

$$A_1 = -(X_1 + X_2^T); \quad A_0 = X_2^T X_1. \quad (6.6)$$

Отметим, что в рассматриваемом примере решение  $X_-$  соответствует  $X_1$ , а  $X_+$  соответствует  $X_2$ . Другими словами, корни  $X_-$  и  $X_+$  являются сопутствующими

корнями ОКМУ (1.1). Оценим, насколько точно в данном примере удовлетворяют полученные решения соотношениям (6.3) – (6.6).

Точность выполнения равенств (6.6) и неравенств (6.3) – (6.5) будем характеризовать следующими соотношениями:

$$d_1 = \underline{\lambda}(A_1^2 - 4A_0); \quad d_2 = \underline{\lambda}(X_-^T X_- - A_0);$$

$$d_3 = \underline{\lambda}(A_0 - X_+^T X_+); \quad d_4 = \|A_1 + X_- + X_+^T\|; \quad d_5 = \|A_0 - X_+^T X_-\|.$$

В этих соотношениях  $\underline{\lambda}(X)$  означает минимальное собственное значение матрицы  $X$ . Результаты вычисления этих величин при  $n = 20, 50, 110$  приведены в табл. 2.

Таблица 2

$n$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$
20	33,26	33,6	0,29	$4,6 \cdot 10^{-9}$	$2,3 \cdot 10^{-10}$
50	0,74	0,79	0,046	$9 \cdot 10^{-9}$	$4,5 \cdot 10^{-10}$
110	$4,2 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$1,68 \cdot 10^{-8}$	$8,4 \cdot 10^{-10}$

Результаты вычислений (табл. 2) свидетельствуют о том, что при рассматриваемых значениях  $n$  система остается сильно демпфированной и неравенства (6.4), (6.5) не нарушаются. Равенства (6.6) выполняются достаточно точно.

**Пример 2.** Пусть в системе, показанной на рис. 1,  $n = 2; m_1 = 1; m_2 = 0; \beta_2 = 0$ . В этом случае матрицы  $A_2, A_1, A_0$  имеют следующую структуру:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 & -\beta_1 \\ -\beta_1 & \beta_1 \end{bmatrix}; \quad A_0 = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что аналогичные системы рассмотрены в [1, 3, 4, 18]. Пусть  $c_1 = 0, 1; c_2 = 1$ . При таких значениях  $c_1, c_2$  характеристическое уравнение системы может иметь 3 действительные корня при подходящем выборе величины  $\beta_1$ . Принимаем, что  $\beta_1 = 0,6$ . При таком выборе матриц  $A_2, A_1, A_0$  матричный пучок (2.2), в котором матрицы  $M, F$  определяются (3.2), кроме собственного значения на бесконечности, будет иметь 3 действительные собственные значения:  $-1/3, -1/2, -1$ . Воспользовавшись соотношением (2.10), получим следующее выражение для  $X_+$ :

$$X_+ = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{30} & -\frac{19}{30} \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы  $X_+$  равны  $-1/3, -1/2$ . Они совпадают с соответствующими собственными значениями матричного пучка (2.2). Определяемая, согласно (6.2) погрешность этого решения равна:  $er = 1,8 \cdot 10^{-16}$ . Таким образом, и в случае сингулярной матрицы  $A_1$  алгоритм, описанный в §2, может обеспечить высокую точность решения (1.1). Отметим, что в случае сингулярной матрицы  $A_1$  использование алгоритма, определяемого соотношениями (3.7), (3.8), становится проблематичным.

**Пример 3 [24].** Матрицы, фигурирующие в (1.1), имеют вид

$$A_2 = 0,03 \times \begin{bmatrix} 52 & 22 & 18 & -13 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & 12 & 13 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 13 & 104 & 0 & 18 & -13 & 0 \\ -13 & -9 & 0 & 24 & 13 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 13 & 104 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & -13 & -9 & 0 & 24 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 13 & 104 \end{bmatrix};$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 25,8258 & 31,9662 & -13,6308 & 26,6652 & 0,2790 & -0,2106 & 0 \\ 0 & 59,1804 & -25,3728 & 27,7020 & 0,2106 & -0,1584 & 0 \\ 0 & 0 & 59,6436 & 0 & -12,4608 & 25,8048 & 0,2790 \\ 0 & 0 & 0 & 117,1368 & -25,8048 & 28,0224 & 0,2106 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 59,6436 & 0 & -12,4608 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 117,1368 & -25,8048 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 59,6436 \end{bmatrix};$$

$$A_0 = 600 \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 12 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

При таких исходных данных, для определения решений (1.1) (матриц  $X_+$ ,  $X_-$ ) были использованы соотношения (2.10). В результате получены матрицы  $X_+$ ,  $X_-$ , которым соответствуют, определяемые (6.2), погрешности  $er_+ = 1,28 \cdot 10^{-8}$ ,  $er_- = 4,7 \cdot 10^{-9}$ . Использование трех итераций, в соответствии с (3.16), позволило получить уточненные значения  $X_+$ ,  $X_-$ , которым соответствуют  $er_+ = 1,46 \cdot 10^{-13}$ ,  $er_- = 6,54 \cdot 10^{-13}$ .

Использование соотношений (3.13), (3.14) позволило получить матрицы  $X_+$ ,  $X_-$ , которым соответствуют  $er_+ = 7,8 \cdot 10^{-10}$ ,  $er_- = 5,2 \cdot 10^{-10}$ ,  $er_+ = 2,8 \cdot 10^{-11}$ ,  $er_- = 3,9 \cdot 10^{-10}$ . Собственные значения  $E_+$ ,  $E_-$  матриц  $X_+$ ,  $X_-$  приведены в табл. 3.

Таблица 3

$\lambda_i$	$E_+$	$10^{-3} \cdot E_-$
$\lambda_1$	-40,7224	-1,2723
$\lambda_2$	-10,5046+16,8844i	-0,2544
$\lambda_3$	-10,5046-16,8844i	-0,0186+0,0373i
$\lambda_4$	-0,269	-0,0186-0,0373i
$\lambda_5$	-9,1423+6,8417i	-0,0677+0,0529i
$\lambda_6$	-9,1423-6,8417i	-0,0677-0,0529i
$\lambda_7$	-8,7209	-0,1017

Из анализа данных, приведенных в табл. 3, следует, что в данном примере использование алгоритма, определяемого (2.10), (2.11), позволило получить решение ОКМУ (1.1) в случае, когда матричный пучок (2.2) имеет комплексные корни.

**Пример 4.** Проиллюстрируем эффективность алгоритма изложенного в §§4, 5 на примере [24]. Исходные данные модели, матрицы  $M_a, B_a, K_a$  в (4.1) совпадают с приведенными в Примере 3 матрицами  $A_0, A_1, A_2$  ( $A_0 = K_a, A_1 = B_a, A_2 = M_a$ ). Для уточнения матриц  $B_a, K_a$  используются следующие матрицы:

$$\tilde{\Lambda}_p = \text{diag}\{-71,087 + 55,495i, -71,087 - 55,495i, -19,507 + 39,177i, -19,507 - 39,177i\}; \quad (6.8)$$

$$\tilde{X}_p = \begin{bmatrix} 0,1749 + 0,3982i & 0,1714 - 0,3902i & 0,4628 + 0,2187i & 0,4628 - 0,2187i \\ -0,3863 - 0,3210i & -0,3786 + 0,3146i & -0,5110 + 0,0243i & -0,5110 - 0,0243i \\ -0,0064 - 0,1378i & -0,0063 + 0,1350i & -0,3022 - 0,2606i & -0,3022 + 0,2606i \\ 0,0872 + 0,5480i & 0,0855 - 0,5370i & 0,1293 - 0,0539i & 0,1293 + 0,0539i \\ -0,0670 - 0,0460i & -0,0657 + 0,0451i & 0,4070 + 0,1619i & 0,4070 - 0,1619i \\ -0,1906 - 0,4256i & -0,1868 + 0,4171i & -0,0065 + 0,0671i & -0,0065 - 0,0671i \\ 0,0753 - 0,0440i & 0,0738 - 0,0431i & -0,3158 - 0,0366i & -0,3158 + 0,0366i \end{bmatrix}.$$

В [24] приведены значения матриц  $\bar{B}, \bar{K}$ , которые получены путем использования данных (6.8) в алгоритме [24]:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 24,9645 & 29,2042 & -11,8939 & 26,5298 & 0,6375 & -0,1030 & -1,2768 \\ -0,2766 & 57,5298 & -24,6924 & 27,3914 & 0,8943 & 0,2352 & -1,0723 \\ 3,6829 & 5,7496 & 53,6978 & -2,2614 & -14,4658 & 25,2931 & 6,0919 \\ 0,7080 & -6,1856 & 0,4262 & 111,2073 & -28,9776 & 27,3088 & 4,7845 \\ -6,8713 & -2,7243 & 9,4676 & 9,0394 & 63,5510 & 0,2795 & -23,6035 \\ -0,9048 & 3,7768 & 0,4409 & 4,6630 & 2,1289 & 117,3943 & -29,3770 \\ 5,2816 & 1,7301 & -7,3327 & -7,2389 & -2,2031 & 0,3654 & 67,3701 \end{bmatrix};$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 1,2001 & 1,8000 & -1,2003 & 1,8000 & 0,0005 & 0 & -0,0003 \\ 1,8000 & 3,5999 & -1,7998 & 1,8000 & -0,0003 & 0 & 0,0002 \\ -1,2003 & -1,7998 & 2,4004 & 0 & -1,2006 & 1,7999 & 0,0004 \\ 1,8000 & 1,8000 & 0 & 7,2002 & -1,8001 & 1,7999 & 0,0001 \\ 0,0005 & -0,0003 & -1,2006 & 2,4008 & 2,4008 & 0,0002 & -1,2005 \\ 0 & 0 & 1,7999 & 1,7999 & 0,0002 & 7,2001 & -1,8001 \\ -0,0003 & 0,0002 & 0,0004 & 0,0001 & -1,2005 & -1,8001 & 2,4003 \end{bmatrix}.$$

Отличие этих матриц от значений  $B_a, K_a$  характеризуется следующими величинами:

$$\frac{\|\bar{B} - B_a\|}{\|B_a\|} = 0,1926; \quad \frac{\|\bar{K} - K_a\|}{\|K_a\|} = 2 \cdot 10^{-4}. \quad (6.9)$$

Применим алгоритм, описанный в §§4, 5, для решения этой же задачи. Как видно из табл. 3, собственные значения матрицы  $\tilde{\Lambda}_p$  близки к соответствующим собствен-

ным значениям матрицы  $X_-$ . Поэтому в качестве матрицы  $\tilde{\Lambda}$  принимается диагональная матрица, диагональные элементы которой приведены в табл. 4 (столбец  $E_{1-}$ ).

Таблица 4

$\lambda_i$	$10^{-3} \cdot E_{0-}$	$10^{-3} \cdot E_{1-}$	$10^{-3} \cdot E_{2-}$	$10^{-3} \cdot E_{3-}$	$10^{-3} \cdot E_{4-}$
$\lambda_1$	-1,2723	-1,2723	-1,2724	-1,2129	-1,2718
$\lambda_2$	-0,2544	-0,2544	-0,2546	-0,2527	-0,2558
$\lambda_3$	-0,0186 + 0,0373i	-0,0195 + 0,0392i	-0,0195 + 0,0391i	-0,0195 + 0,0392i	-0,0194 + 0,0393i
$\lambda_4$	-0,0186 - 0,0373i	-0,0195 - 0,0392i	-0,0195 - 0,0391i	-0,0195 - 0,0392i	-0,0194 - 0,0393i
$\lambda_5$	-0,0677 + 0,0529i	-0,0711 + 0,0555i	-0,0715 + 0,0556i	-0,0711 + 0,0555i	-0,0710 + 0,0560i
$\lambda_6$	-0,0677 - 0,0529i	-0,0711 - 0,0555i	-0,0715 - 0,0556i	-0,0711 - 0,0555i	-0,0711 - 0,0555i
$\lambda_7$	-0,1017	-0,1017	-0,1007	-0,1002	-0,0999

Таблица 5

$\lambda_i$	$E_{1+}$	$E_{2+}$	$E_{3+}$	$E_{4+}$
$\lambda_1$	-40,7224	-40,6212	-38,8205	-42,9074
$\lambda_2$	-10,5046 + 16,8844i	-10,5311 + 16,6786i	-9,9811 + 16,3870i	-10,4556 + 16,8874i
$\lambda_3$	-10,5046 - 16,8844i	-10,5311 - 16,6786i	-9,9811 - 16,3870i	-10,4556 - 16,8874i
$\lambda_4$	-0,3269	-0,2467	-0,3278	-0,3549
$\lambda_5$	-9,1423 + 6,8417i	-9,3277 + 6,6526i	-9,3925 + 6,7109i	-9,0401 + 6,8574i
$\lambda_6$	-9,1423 - 6,8417i	-9,3277 - 6,6526i	-9,3925 - 6,7109i	-9,0401 - 6,8574i
$\lambda_7$	-8,7209	-8,6440	-8,4189	-8,6174

В этой же таблице, в столбце  $E_{0-}$  приведены собственные значения матрицы  $X_-$  (эти же значения приведены во втором столбце табл. 3). Как описано в §4, аналогичным образом из собственных векторов матрицы  $X_-$  и столбцов матрицы  $\tilde{X}_p$  составляется матрица  $\tilde{X}$ , которая вместе с матрицей  $\tilde{\Lambda}$ , согласно (4.3), формирует матрицу  $\tilde{X}_1$ . В качестве матрицы  $\tilde{X}_2$  в (4.7) принимается полученная в Примере 3 матрица  $X_+$ , собственные значения которой приведены в первых столбцах табл. 3, 5.

Используя процедуры, определяемые соотношениями (5.1), (5.2), получим матрицы  $B, K$ , отличие которых от матриц  $B_a, K_a$  характеризуют следующие величины:

$$\frac{\|K - K_a\|}{\|K_a\|} = 0,0712; \quad \frac{\|B - B_a\|}{\|B_a\|} = 0,0435. \quad (6.10)$$

Далее, если в (1.1) в качестве матриц  $A_0, A_1, A_2$  принять матрицы  $B, K, M_a$ , соответственно, то корни уравнения (1.1) будут иметь собственные значения, приведенные в табл. 4, 5 в столбцах  $E_{2-}, E_{2+}$ . В этих же таблицах столбцы  $E_{3-}, E_{3+}$  содержат собственные значения решений (1.1) при условии, что в качестве матриц  $A_0, A_1, A_2$  приняты результаты [24], т.е. следующие матрицы:  $A_0 = \bar{K}, A_1 = \bar{B}, A_2 = M_a$ .

Сравнивая результаты использования алгоритмов §§4, 5 и [24] в данном примере, можно констатировать следующее. Согласно (6.9), при использовании алгоритма [24], матрица  $K_a$  подвергалась значительно меньшей «коррекции», чем матрица  $B_a$ . С другой стороны, согласно (6.10), использование алгоритма §§4, 5 приводит к более «равномерной коррекции» матриц  $B_a, K_a$ . Относительно «деформации» спектров решений (1.1), которые соответствуют рассматриваемым подходам, отметим, что они характеризуются следующими величинами:

$$\frac{\|E_{3-} - E_{1-}\|}{\|E_{2-} - E_{1-}\|} = 4,44; \quad \frac{\|E_{3+} - E_{1+}\|}{\|E_{2+} - E_{1+}\|} = 50,6. \quad (6.11)$$

Другими словами, согласно (6.11), в данном примере подход [24] вызывает существенно большие изменения спектра решений (1.1), чем алгоритм, описанный в §§4, 5.

Таким образом, в данном примере, алгоритм §§4, 5 обеспечил более «равномерную коррекцию» матриц  $B_a, K_a$  (соотношение (6.9), (6.10)) и меньшую «деформацию» спектра (соотношение (6.11)).

Рассмотрим вариант задачи, когда фиксированной является матрица  $K_a$ , а матрицы  $M_a$  и  $B_a$  подлежат «уточнению». Используя соотношения (5.4), (5.5), получены матрицы  $\tilde{M}, \tilde{B}$ , отличие которых от матриц  $M_a, B_a$  характеризуется следующими величинами:

$$\frac{\|\tilde{M} - M_a\|}{\|M_a\|} = 0,0614; \quad \frac{\|\tilde{B} - B_a\|}{\|B_a\|} = 0,047.$$

Собственные значения решений уравнений (1.1), когда в качестве матриц  $A_0, A_1, A_2$  приняты матрицы  $A_0 = K_a, A_1 = \tilde{B}, A_2 = \tilde{M}$ , приведены в столбцах  $E_{4-}, E_{4+}$  табл. 4, 5. Им соответствуют значения:

$$\frac{\|E_{4-} - E_{1-}\|}{\|E_{2-} - E_{1-}\|} = 4,4; \quad \frac{\|E_{4+} - E_{1+}\|}{\|E_{2+} - E_{1+}\|} = 2,06.$$

Приняв во внимание, что согласно (6.9) матрица  $\bar{K}$  мало отличается от матрицы  $K_a$ , в заключение этого примера рассмотрим «упрощенную» постановку задачи, когда фиксированными являются матрицы  $M_a, K_a$  и требуется определить матрицу  $B$ . Используя соотношение (4.8), определим значение матрицы  $B$ , отличие которой от матрицы  $B_a$  характеризует следующая величина:

$$\frac{\|B - B_a\|}{\|B_a\|} = 0,0462. \quad (6.12)$$

Сравнивая (6.12) и (6.9), можно констатировать, что матрица  $B$  в меньшей степени отличается от  $B_a$ , чем приведенная в [24] матрица  $\bar{B}$ . Продолжим рассмотрение задачи в «упрощенной» постановке. Сравним отличие собственных значений решений (1.1) в случае «упрощенной» постановки и в случае, когда в (1.1) матрицы  $A_0, A_1, A_2$  совпадают с матрицами  $\bar{K}, \bar{B}, M_a$ . Итак, обозначим  $X_{5+}, X_{5-}$  корни уравнения (1.1), если в качестве матриц  $A_0, A_1, A_2$  приняты матрицы  $K_a, B, M_a$ . Пусть  $E_{5\pm}$  обозначают векторы, компонентами которых являются собственные значения матриц  $X_{5\pm}$ , соответственно. В этом случае, соотношение между векторами  $E_{1\pm}, E_{3\pm}$  и  $E_{5\pm}$  (векторы  $E_{1\pm}$  и  $E_{3\pm}$  приведены в табл. 4, 5) характеризуется следующими величинами:

$$\frac{\|E_{3-} - E_{1-}\|}{\|E_{5-} - E_{1-}\|} = 6; \quad \frac{\|E_{3+} - E_{1+}\|}{\|E_{5+} - E_{1+}\|} = 2,87. \quad (6.13)$$

Из сравнения (6.13) и (6.11) следует, что даже при «упрощенной» постановке задачи, «деформация» спектров решений (1.1) получается меньшей, чем при использовании алгоритма [24].

### §7. Заключение.

Обычно используемые для получения решений алгебраического уравнения Риккати метод удвоения интервала и метод Шура обобщены на случай одностороннего квадратного матричного уравнения. На примерах показана эффективность предложенных алгоритмов решения указанных матричных уравнений. Проведено сравнение этих алгоритмов с известным методом решения одностороннего квадратного матричного уравнения. На примерах показано, что решения одностороннего квадратного матричного уравнения могут быть использованы в задаче уточнения параметров модели.

Р Е З Ю М Е. Метод подвоєння інтервалу і метод Шура, які використовуються для отримання розв'язків алгебраїчного рівняння Ріккати, узагальнено на випадок одностороннього квадратного матричного рівняння. На прикладах показано ефективність запропонованих алгоритмів розв'язання одностороннього квадратного матричного рівняння. Проведено порівняння цих алгоритмів з відомими. Показано, що розв'язки одностороннього квадратного матричного рівняння можуть бути використані в задачі уточнення параметрів моделі.

1. Голубенцев О. М., Дроговоз О.М. Про критерії аперіодичної стійкості руху // Прикл. механіка. – 1962. – 8, № 4. – С. 17 – 23.
2. Крейн М.Г. Введение в геометрию indefinitных  $J$ -пространств и теорию операторов в этих пространствах // 2-ая летняя матем. школа. – К.: Наук. думка, 1965. – Вып. I. – С. 15 – 92.
3. Ларин В. Б. Выбор параметров оптимального демпфера // Тр. I Респ. конф. молодых математиков Украины. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1965. – С. 395 – 405.
4. Ларин В. Б. Статистические задачи виброзащиты. – К.: Наук. думка, 1974. – 127 с.
5. Ларин В.Б. Об обращении проблемы аналитического конструирования регуляторов // Проблемы управления и информатики. – 2004. – № 2. – С. 17 – 25.
6. Ларин В.Б. Алгоритмы отыскания стабилизирующего и антистабилизирующего решений дискретного алгебраического уравнений Риккати // Проблемы управления и информатики – 2006. – № 6. – С. 5 – 16.
7. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Comments on A Stability-enhancing Scaling Procedure for Schur-Riccati Solvers" // Systems & Control Letters. – 1990. – 14. – 453 p.
8. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms. – Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1998. – 261 p.
9. Bessalova E.I., Urusova G.P. Vibrations of Statically Loaded Shells of Revolution of Positive or Negative Gaussian Curvature // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 3. – P. 279 – 286.
10. Bini D.A., Meini B., Poloni F. Transforming Algebraic Riccati Equations into Unilateral Quadratic Matrix Equations // Numer. Math. – 2010. – 116. – P. 553 – 578.
11. Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia: SIAM, 1994. – 193 p.
12. Barsegyai V.P., Movsisyan L.A. Optimal Control of the Vibration of Elastic Systems Described by the Wave Equation // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 2. – С. 234 – 240.
13. Chu TK-W, Fan H-Y, Lin W-W, Wang C.S. Structure-preserving algorithms for periodic discrete-time algebraic Riccati equation // Int. J. Control. – 2004. – 77, N 8. – P. 767 – 788.
14. Datta B. N., Sokolov V. Quadratic Inverse Eigenvalue Problems, Active Vibration Control and Model Updating // Appl. and Comp. Math. – 2009. – 8, N 2. – P. 170 – 191
15. Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M. LMI Control Toolbox Users Guide. The MathWorks Inc., 1995. – 321 p.

16. *Gulyaev V.I., Lugovou P.Z. Zayets Yu.A.* Shielding of Elastic Nonstationary Waves by Interfaces // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 4. – С. 414 – 422.
17. *Kirichok I.F.* Forced Resonant Vibrations and Self-Heating of a Flexible Circular Plate with Piezoactuators // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 5. – С. 583 – 591.
18. *Larin V.B.* Optimization of Periodic Systems with Singular Weight Matrix which Defines the Quadratic Form of Control Actions // *J. Automat. Inform Sci.* – 1999. – **31**, N 6. – P. 27 – 38.
19. *Larin V.B.* LMI Approach to the Inverse Problem of Optimal Control // *System Science.* – 2001. – **26**, N 3. – P. 61 – 68.
20. *Larin V.B.* Some Optimization Problems for Vibriprotective Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 4. – P. 456 – 483.
21. *Larin V.B.* Determination both as stabilizing and antistabilizing solutions of the discrete-time algebraic Riccati equation // *Int. J. Appl. Math. and Mech.* – 2007. – **3**, N 1. – P. 42 – 60.
22. *Larin V.B.* Solution of Matrix Equations in Problems of the Mechanics and Control // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N8. – P. 847 – 872.
23. *Laub A.J.* A Schur method for solving algebraic Riccati equations // *IEEE Trans. Automat. Contr.* – 1979. – **24**. – P 913 – 921.
24. *Yuan Y.* An iterative updating method for damped gyroscopic systems // *Int. J. Comput. and Math. Sci.* – 2010. – 4:2. – P. 63 – 71.

Поступила 11.05.2011

Утверждена в печать 03.12.2013

