А. А. М а р т ы н ю к, А. С. Х о р о ш у н

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: center@inmech.kiev.ua.

Abstract. A technique of study of compressive stability on the finite interval with in advance given settling time is proposed. This technique is based on using the Lyapunov-type function and studying its behavior over the trajectories of system in hand.

Key words: compressive stability, settling time, stability on the finite interval, Lyapunov-type function.

Введение.

Теория устойчивости движения, предложенная и развитая в работах А.М. Ляпунова [1], а в последующем и работах многих других ученых, предполагает, в частности, что интервал функционирования системы неограничен, а начальные и, следовательно, последующие возмущения – достаточно малые величины. Однако, задачи динамики машин и многие прикладные задачи исследуются лишь на конечном промежутке функционирования соответствующей механической системы. Кроме того, при исследовании устойчивости на конечном интервале важно учитывать оценки величин начальных и последующих отклонений, а не только сам факт существования числа δ по заданному ε, поскольку, в силу теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных, всегда можно выбрать настолько малую величину возмущения начальных условий, чтобы удовлетворить условия устойчивости на произвольном, наперед заданном интервале функционирования системы. Также важен вопрос о пригодности величины начальных и последующих отклонений для рассматриваемой задачи. Учет этих замечаний приводит к рассмотрению некоторых новых типов устойчивости движения, как то: «техническая устойчивость», «устойчивость на конечном интервале» и др. [4 – 6, 14]. Рассмотрению указанных типов устойчивости также посвящены работы [2, 3, 10]. Исследованию конкретных задач робототехники с использованием указанных видов устойчивости посвящена работа [13].

В работах Груйича [7, 8] предложено понятие устойчивости на конечном интервале с некоторым наперед заданным моментом становления, что важно во многих задачах автоматического регулирования.

Рассмотрению сжимающей устойчивости на конечном интервале [3] с определенным временем становления посвящена данная работа.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n$, $t \in R_+$, $f(\cdot,\cdot): R^n \times R_+ \to R^n$ – вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица, т.е. для системы (1) выполняются условия существования и единственности решения начальной задачи.

Далее приведем определение сжимающей практической устойчивости на конечном интервале с временем становления T_1 [3, 9].

Определение 1. Система (1) называется сжимающе устойчивой на конечном интервале $[t_0, t_0 + T_2]$ с временем становления $0 < T_1 < T_2$ по отношению к величинам $\lambda, B, A,\ \lambda < B,\ A < B,$ если для любого решения $x(t)$ системы (1), которое начинается в области $\|x_0\| < \lambda,$ выполняются условия: $\|x(t;\, t_0,\, x_0)\| < B$ для всех $t \in [t_0, t_0 + T_1]$ и $\|x(t;\, t_0,\, x_0)\| < A$ для всех $t \in (t_0 + T_1, t_0 + T_2]$.

Заметим, что в данном определении учитывается тот факт, что области $S_0(t_0)$, $S(t)$, относительно которых исследуется устойчивость движения системы (1), выбираются в следующем виде:

$$S_{0_\lambda}(t_0) = \{x_0 \in R^n : \|x_0\| < \lambda\};$$

$$S_A(t) = \{x \in R^n : \|x\| < A\} \quad \left(0 < \lambda \le A < +\infty\right).$$

Здесь и далее применяется евклидова норма для векторов и спектральная норма для соответствующих матриц.

Ниже предложен подход, с помощью которого представляется возможным исследовать устойчивость на конечном интервале относительно заданных областей системы вида (1).

2. Основной результат.

Сформулируем некоторые утверждения, необходимые для последующего изложения.

Лемма 1. *Пусть система уравнений (1) такова, что для вектор-функции $f(x, t)$, входящей в ее состав, существует интегрируемая на отрезке $[t_0, T]$ функция $g(t)$ такая, что $\|f(x, t)\| \le g(t)$ для всех $t \in [t_0, T],\ \ x \in S_A(t)$ и выполняется условие*

$$2\mathrm{A}\int_{t_0}^{t} \mathrm{g(s)\,ds} \le \inf_{x \in \partial S_A(t)} \mathrm{V(x(t))} - \sup_{x_0 \in \partial \overline{S_{0_\lambda}(t_0)}} \mathrm{V(x(t_0))} \tag{2}$$

при всех $t \in [t_0, T]$. Тогда движение, которое задается системой (1), устойчиво на интервале $[t_0, T]$ относительно областей $(S_{0_\lambda}(t_0), S_A(t), t_0)$.

Доказательство. Пусть $x(t;\, t_0,\, x_0)$ решение уравнения (1) с начальным условием $x_0 \in S_{0_\lambda}(t_0)$. Предположим, что существует момент $t_1 \in (t_0, T]$ такой, что $x(t_1;\, t_0,\, x_0) \in \partial S_A(t_1)$ и $x(t;\, t_0,\, x_0) \in int\, S_A(t)$ при $t \in (t_0, t_1)$. Для функции $V(x) = x^T x$ имеем

$$V(x(t_1;\, t_0,\, x_0)) = V(x(t_0;\, t_0,\, x_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \dot V(x(s;\, t_0,\, x_0))\,|_{(1)}\, ds =$$

$$= V(x(t_0;\, t_0,\, x_0)) + \int_{t_0}^{t_1} (f^T(x(s), s)x + x^T f(x(s), s))ds \le$$

$$\le V(x(t_0;\, t_0,\, x_0)) + \int_{t_0}^{t_1} 2\|x\|\|f(x(s), s)\|ds < \sup_{x_0 \in \partial \overline{S_{0_\lambda}(t_0)}} V(x(t_0;\, t_0,\, x_0)) + 2A\int_{t_0}^{t_1} g(s)ds\,,$$

откуда, учитывая (2), получаем неравенство $V(x(t_1;t_0,x_0)) < \inf\limits_{x\in\partial S_A(t_1)} V(x(t_1)),$ из которого следует $x(t_1;t_0,x_0) \notin \partial S_A(t_1),$ что противоречит принятому предположению о достижимости траекторией $x(t;t_0,x_0)$ системы (1) границы области $S_A(t)$ в момент t_1. Следовательно, не существует $t_1 \in (t_0,T],$ при котором движение, которое описывается системой (1), покинет область $S_A(t),$ если оно начинается в области $S_{0_\lambda}(t_0).$ Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Пусть для функции $g(t)$ из Леммы 1 выполняется условие $\int\limits_{t_0}^{T} g(s)ds = M$.*

Тогда для устойчивости движения, которое задается системой (1) на отрезке $[t_0,T]$ относительно $(S_{0_\lambda}(t_0), S_A(t), t_0)$, достаточно выполнения неравенства

$$M \le \frac{A^2-\lambda^2}{2A}. \quad (3)$$

Доказательство. Согласно Лемме 1, для практической устойчивости движения, которое задается системой (1) относительно $(S_{0_\lambda}(t_0), S_A(t), t_0),$ достаточно выполнения неравенства (2) при любом $t \in [t_0,T].$ Оценим величину интеграла в левой его части

$$2A\int\limits_{t_0}^{t} g(s)ds \le 2A\int\limits_{t_0}^{T} g(s)ds = 2AM.$$

Правая часть неравенства (2) при заданных областях и функции $V(x) = x^T x$ имеет вид

$$\inf_{x\in\partial S_A(t)} V(x(t)) - \sup_{x_0\in\partial S_{0_\lambda}(t_0)} V(x(t_0)) = A^2-\lambda^2.$$

Таким образом, если выполняется соотношение (3), то неравенство (2) для системы (1) имеет место и движение, которое задается системой (1), практически устойчиво относительно областей $(S_{0_\lambda}(t_0), S_A(t), t_0).$ Теорема 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть существуют непрерывные функции $g_1(t), g_2(t)$ такие, что $\|f(x,t)\| \le g_1(t)$ для всех $t\in[t_0,t_0+T_1],$ $x\in S_A(t)$ и $\|f(x,t)\| \le g_2(t)$ для значений $t\in[t_0,t_0+T_2],$ $x\in S_B(t),$ $0<\lambda\le A<B,$ $0<T_1<T_2$*, и выполняются неравенства

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T_1} g_1(s)ds \le \frac{A^2-\lambda^2}{2A}; \quad (4)$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T_2} g_2(s)ds \le \frac{B^2-\lambda^2}{2B}, \quad (5)$$

где $g_1(t), g_2(t)$. Тогда все решения системы (1), которые начинаются в области $S_0(t_0),$ при $t\in[t_0,t_0+T_1]$ будут находиться в области $S_A(t),$ а при $t\in(t_0+T_1,t_0+T_2]$ – в области $S_B(t).$

Доказательство. Согласно Теореме 1, при выполнении неравенства (4) движение, которое определяется системой (1), практически устойчиво на интервале $[t_0, t_0+T_1]$ относительно $(S_0(t_0), S_A(t), t_0)$, т.е. все решения системы (1), которые начинаются в области $S_0(t_0)$, при $t\in[t_0, t_0+T_1]$ не покинут области $S_A(t)$. Аналогично, при выполнении неравенства (5) все решения системы (1), которые начинаются в области $S_0(t_0)$, при $t\in[t_0, t_0+T_2]$ не покинут области $S_B(t)$. Принимая во внимание, что $A<B$, получаем утверждение Леммы 2.

Система вида (1), которая удовлетворяет условиям Леммы 2, называется расширяюще устойчивой на конечном интервале $[t_0, t_0+T_2]$ с временем становления $T_1<T_2$ по отношению к величинам λ, A, B, где $0<\lambda\le A<B$.

Сформулируем и докажем теорему, которая содержит достаточные условия сжимающей устойчивости на конечном интервале $[t_0, t_0+T_2]$ с временем становления T_1 по отношению к величинам λ, B, A, $0<\lambda\le A<B$.

Теорема 2. *Пусть система*

$$\frac{dx}{dt}=-f(x, -\tau+2t_0+T_2), \tag{6}$$

полученная из системы (1) заменой $t=-\tau+2t_0+T_2$, *расширяюще устойчива на конечном интервале* $[t_0, t_0+T_2]$ *с временем становления* $t_0-T_1+T_2$, $T_1<T_2$, *по отношению к величинам* λ_1, A, B, $0<\lambda_1\le A<B$. *Тогда существует такая область* $S_{0_\lambda}(t_0)$, $\lambda<B$, *что система (1) будет сжимающе устойчивой на конечном интервале* $[t_0, t_0+T_2]$ *с временем становления* T_1 *по отношению к величинам* λ, B, A.

Доказательство. Пусть система (6) расширяюще устойчива на конечном интервале $[t_0, t_0+T_2]$ с временем становления $t_0-T_1+T_2$, $T_1<T_2$, по отношению к величинам λ_1, A, B, где $0<\lambda_1\le A<B$. Тогда для любого числа $M_0\ge 0$, $M_0<\lambda_1$, решение системы (6), которое начинается в точке x_0, $\|x_0\|=M_0$, при $\tau\in[t_0,t_0-T_1+T_2]$ будет находится в области $S_A(\tau)$, а при $\tau\in(t_0-T_1+T_2,t_0+T_2]$ – в области $S_B(\tau)$. Схематически это показано на графике (рис. 1), где по горизонтали отложено время, а по вертикали – норма решения системы (4), соответствующего начальному значению x_0.

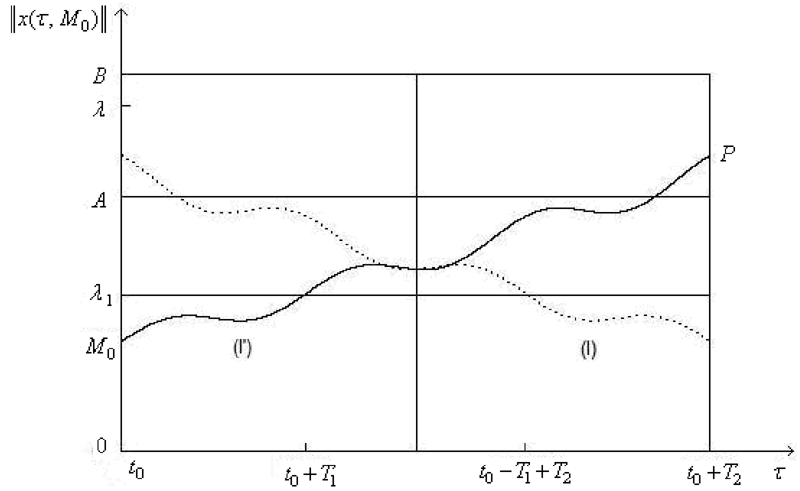

Рис. 1

Заметим, что из точки M_0 (рис. 1) выходит множество кривых, которые определяются условием $\|x_0\| = M_0$, так как существует множество наборов чисел $x_1^0, \dots, x_n^0$ таких, что $\|(x_1^0, \dots, x_n^0)\| = M_0$, и каждому из них соответствует набор функций $x_1(\tau, M_0), \dots, x_n(\tau, M_0)$, которые определяют функцию $\|x(\tau, M_0)\| = \sqrt{x_1^2(\tau, M_0) + \dots + x_n^2(\tau, M_0)}$. Выберем среди всех этих наборов такой: $(M_0, 0, \dots, 0)$. Соответственно, получим набор функций $x_1(\tau, M_0), \dots, x_n(\tau, M_0)$, т.е. функцию $\|x(\tau, M_0)\|$. Эта функция непрерывна по τ, так как все функции $x_i(\tau, M_0)$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны по τ на интервале существования решения и непрерывна по M_0 в силу теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения от начальных условий и правых частей. В силу непрерывности по M_0 получим, что для произвольной точки P, $P < B$, $P \in \left[0, \max\limits_{M \in [0, \lambda_1]} \|x(t_0 + T_2, M)\|\right]$, существует точка $M_0 \in [0, \lambda_1)$ такая, что $\|x(t_0 + T_2, M_0)\| = P$. Пусть для некоторого числа $\overline{M_0} \in [0, \lambda_1)$ получено значение $\|x(t_0 + T_2, \overline{M_0})\|$. Обозначим $\|x(t_0 + T_2, \overline{M_0})\| = \lambda$, $\lambda \le \max\limits_{M \in [0, \lambda_1]} \|x(t_0 + T_2, M)\| < B$. Ясно, что для всех точек $P \in [0, \lambda]$ также будут существовать точки $M_0 \in [0, \lambda_1]$ такие, что $\|x(t_0 + T_2, M_0)\| = P$. Заменой переменной $\tau = -t + 2t_0 + T_2$ систему (6) приведем к системе (1). При этом, очевидно, точка $t_0 + T_2$ перейдет в точку t_0, точка t_0 – в точку $t_0 + T_2$, точка $t_0 - T_1 + T_2$ – в точку $t_0 + T_1$, а кривая (l) – в кривую (l_1), симметричную (l) относительно оси симметрии, которая проходит через середину отрезка $[t_0, t_0 + T_2]$. Поскольку, как было показано, для произвольной точки $P \in [0, \lambda]$ существует точка $M_0 \in [0, \lambda_1)$ такая, что существует решение системы (6), которое, будучи расширяюще устойчивым на интервале $[t_0, t_0 + T_2]$ с временем становления $t_0 - T_1 + T_2$ по отношению к величинам λ_1, A, B, начинаясь в точке $(M_0, 0, \dots, 0)$ при $\tau = t_0 + T_2$, удовлетворяет условию $\|x(t_0 + T_2, M_0)\| = P$, то, учитывая симметрию кривой (l_1) к кривой (l) относительно оси симметрии, проходящей через середину отрезка $[t_0, t_0 + T_2]$, для произвольной точки $P \in [0, \lambda]$ существует вектор $x_0 = (x_1(t_0 + T_2, M_0), \dots, x_n(t_0 + T_2, M_0))^T$ такой, что решение системы (1), начинаясь в точке $P = \|x_0\|$ при $t \in [t_0, t_0 + T_1]$, будет находиться в области $S_B(t)$, а при $t \in [t_0 + T_1, t_0 + T_2]$ – в области $S_A(t)$ и $\|x(t_0 + T_2, P)\| = M_0$. Заметим, что рассуждения для всех других наборов чисел, которые задают начальные значения для решения системы (6), проводятся аналогично. Т.е. система (1) при выполнении условий Теоремы 2, сжимающе устойчива на интервале $[t_0, t_0 + T_2]$ с временем становления T_1 по отношению к величинам $\lambda, B, A.$ Теорема доказана.

Замечание 1. Область $S_{0_\lambda}(t)$ для системы (1) определяется числом λ, которое можно определить, зная величину $\|x(t_0 + T_2, M_0)\|$. Здесь $x(t, M_0)$ – решение системы (6), соответствующее числу M_0, т.е. некоторому набору чисел $x_1^0, \dots, x_n^0$, которые задают начальные значения для функций $x_1(\tau, x_1^0, \dots, x_n^0), \dots, x_n(\tau, x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Значение M_0 выбирается из отрезка $[0,\ \lambda_1)$, где $[0,\ \lambda_1)$ такой отрезок, что система (6) расширяюще устойчива на интервале $[t_0,\ t_0+T_2]$ с временем становления $t_0-T_1+T_2$ относительно величин $\lambda_1,\ A,\ B$.

Замечание 2. Согласно доказательству Теоремы 2, все решения системы (1), начиная в области $S_{0_\lambda}(t)$, где λ определено согласно Замечанию 1, при $t=t_0+T_2$ попадают в область $S_{\lambda_1}(t)$.

Приведем план исследования сжимающей устойчивости системы вида (1) с некоторым временем становления T_1 на отрезке $[t_0,\ t_0+T_2]$.

1. Заменой $t=-\tau+2t_0+T_2$ систему (1) преобразуем в систему вида (4).

2. С помощью Леммы 2 устанавливается факт разжимающейся устойчивости системы (4) на интервале $[t_0,\ t_0+T_2]$ с временем становления $t_0-T_1+T_2$ относительно величин $\lambda_1,\ A,\ B$.

3. Для некоторых начальных значений $x_1^0,\ \dots,\ x_n^0$, удовлетворяющих условию $\left\|(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,)\right\| = M_0 < \lambda_1$, находим величину $\|x(t_0+T_2,\ M_0)\| = \lambda$, где $x(t,\ M)$ – решение системы (6).

4. На основании Теоремы 1 делаем вывод о том, что система (1) сжимающе устойчива на интервале $[t_0,\ t_0+T_2]$ с временем становления T_1 относительно величин $\lambda,\ B,\ A$.

3. Числовой пример.

Проиллюстрируем вышеизложенное на конкретном примере. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{200};$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{200} - 0{,}03\cos^2(10-t), \tag{7}$$

где $x_1,\ x_2 \in R$, $t\in[0,\ 10]$. С помощью замены переменной $t=-\tau+2t_0+T_2$, т.е. $t=-\tau+10$, систему (7) приведем к виду

$$\frac{dx_1}{d\tau} = -\frac{x_1}{200};$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -\frac{x_2}{200} + 0{,}03\cos^2(\tau). \tag{8}$$

Выберем области $S_{0\lambda_1}(t_0)=\{x_0\in R^2 : \|x_0\|<0{,}59\}$, $S_A(t)=\{x\in R^2 : \|x\|<0{,}63\}$, $S_B(t)=\{x\in R^2 : \|x\|<0{,}83\}$ и время становления $T_1=8$. Для функции $f(x,\ \tau)=$ $=\left(-\frac{x_1}{200},\ -\frac{x_2}{200}+0{,}03\cos^2(\tau)\right)^T$ справедливы оценки: $\|f(x,\ \tau)\| < \frac{0{,}63}{200}+0{,}03\cos^2(\tau)=$ $=g_1(\tau,\ x)$ для всех $\tau\in[0,\ 2]$, $x\in S_A(\tau)$; $\|f(x,\ \tau)\| < \frac{0{,}83}{200}+0{,}03\cos^2(\tau)=g_2(\tau,\ x)$ для всех $\tau\in[0,\ 10]$, $x\in S_B(\tau)$. Соотношения (4) и (5) из Леммы выполняются, значит система (8) расширяюще устойчива на интервале $[0, 10]$ с временем становления $t = 2$ относительно величин $\lambda_1 = 0,59$, $A = 0,63$, $B = 0,83$. Выбрав $x_0 = (0,5; 0,31)$, $\|x_0\| = 0,5883$, определим $\|x(10, x_0)\| = 0,6534 = \lambda$. Согласно Теореме 2, следует вывод, что система (7) сжимающе устойчива на интервале $[0, 10]$ с временем становления $T_1 = 8$ относительно величин $\lambda = 0,6534$, $A = 0,63$, $B = 0,83$.

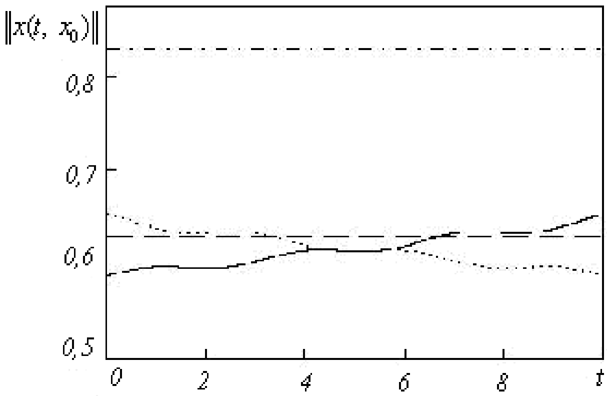

Рис. 2

На рис. 2 пунктиром представлено поведение абсолютной величины траектории системы (7) с начальным значением $\|x_0\| = 0,6534$ на отрезке $[0, 10]$. Видно, что система сжимающе устойчива относительно указанных величин. Также, для наглядности, сплошной линией показано поведение решения системы (8), которая расширяюще устойчива.

4. Заключение.

В данной работе предложена методика исследования сжимающей устойчивости на конечном интервале с определенным, наперед заданным временем становления. Методика основана на применении вспомогательной функции типа Ляпунова и исследовании ее поведения вдоль траектории рассматриваемой системы [2, 15, 16]. Используя переход в системе от обычного времени t к некоторому обобщенному времени τ, с помощью соответствующей замены переменной получаем возможность исследовать систему на сжимающую устойчивость с наперед заданным временем становления. Рассмотрен иллюстративный пример, который поясняет предложенную методику. Отметим, что представляет интерес рассмотрение данной задачи с учетом параметрических неточностей [11, 12].

Р Е З Ю М Е. Запропоновано методику дослідження стискаючої стійкості на скінченному інтервалі з певним наперед заданим часом становлення. Методику основано на використанні функції типу Ляпунова і дослідженні її поведінки уздовж траекторій системи, що розглядається.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Собрание сочинений. Т. 2. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 481 с.
2. *Мартынюк А.А.* Практическая устойчивость движения. – К.: Наук. думка, 1983. – 247 с.
3. *Мартынюк А.А.* Техническая устойчивость в динамике. – К.: Техніка, 1973. – 188 с.
4. *Моисеев Н.Д.* О некоторых методах теории технической устойчивости // Труды ВВИА им. Жуковского. – 1945, вып. 135. – С. 1 – 27.

5. *Четаев Н.Г.* О некоторых вопросах, относящихся к задаче об устойчивости неустановившихся движений. – Прикл. матем. и механика – 1960. – **24**, вып. 1. – С. 6 – 19.
6. *Bernfeld S.R., Lakshmikantham V.* Practical stability and Lyapunov functions // Tohocu Math. J. – 1980. – **32**, N 4. – P. 607 – 613.
7. *Grujic Lj. T.* On Practical Stability // Proc. of 5th Asilomar Conf. on Circuits and Systems, 1971. – P. 174 – 178.
8. *Grujic, Lj. T.* Practical Stability with Settling Time on Composite Systems // Automatika (Yu) – 1975. – **9. –** P. 1 – 11.
9. *Grujic, Lj. T.* Non-Lyapunov stability analysis of large scale systems on time-varying sets // Int. J. Control. – 1975. – **21**, N 3. – P. 401 – 415.
10. *Gunderson R.W.* On stability over a finite interval // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1967. – **12**, N 5. – P. 634 – 635.
11. *Khoroshun A.S.* On Using the Multi-Component Lyapunov Functions in Analysis of Absolute Parametric Stability of Out-of-True Singularly Disturbed Systems // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 115 – 133.
12. *Martynyuk A.A., Khoroshun A.S.* Parametric Stability of Singularly Perturbed Nonlinear Uncertain Systems // Int. Appl. Mech. – 2011. – **46**, N 10. – P. 1177 – 1189.
13. *Martynyuk A.A., Khoroshun A.S., Chernienko A.N.* Practical Stability of a Moving Robot to Given Domains // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 1. – P 79 – 86.
14. *Michel A.N., Heinen J.A.* Quantitative and practical stability of systems // Automat. Contr. Theory and Appl. – 1972. – **1**, N 3. – P. 9 – 15.
15. *Weiss L., Infante E.F.* On the Stability Of Systems Defined Over a Finite Time Interval // Proc. Nath. Acad. Sci. – 1965. – **54.** – P. 44 – 48.
16. *Weiss L., Infante E.F.* Finite time stability under perturbing forses on product spaces // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1967. – **AC-12**, N 1. – P. 54 – 59.

Поступила 23.05.2011 Утверждена в печать 03.12.2013