

Л. П. Хорошун, Л. В. Назаренко

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДЕФОРМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: stochac@inmech.kiev.ua*

Abstract. A model of deformation of composite materials with physically nonlinear components is generalized on the case when the fillers are the unilateral spheroids. The matrix is assumed to be isotropic and nonlinearly deforming. The fillers are assumed to be linearly elastic and having the transversely isotropic symmetry of physical-mechanical properties. The stochastic differential equations of physically nonlinear theory of elasticity are reduced to the integral equations, then the method of conditional moments is used and the problem is transformed into the problem of solving the system of algebraic equations, solution of which is built by the method of simple iteration. As a result, the algorithms of evaluation of effective deformative properties of composites with transversally isotropic components, when nonlinearity is resulted by the nonlinear deformation of the matrix. A dependence of the Poisson ratios on macrodeformations and the diagrams of macrodeformations for different volume fraction of components and parameters characterized the shape of inclusions are studied.

Key words: transversally-isotropic components, non-linear deformation, stochastic structure.

Введение.

Известно, что с увеличением нагрузки многие материалы, в том числе и композитные, проявляют нелинейный характер деформирования. Нелинейность деформирования композитных материалов может быть обусловлена как физической нелинейностью деформирования компонентов [4, 6 – 9, 13, 14, 17], так и микроразрушениями в компонентах [2, 5, 11 – 13], проявляющимися в виде образования микропор или микротрещин в процессе деформирования. Второй вид нелинейности является типичным для материалов с хрупкими компонентами, таких как полимерные композиты при низких температурах, композиты с углеродным связующим, керамические композиты и т.п.

Исследование деформативных свойств композитных материалов с учетом их физической нелинейности является актуальной проблемой как в научном, так и в прикладном аспекте. Особый интерес представляют композитные материалы на основе металлической матрицы, а также на основе полимерных материалов при повышенных температурах. Прогнозирование эффективных свойств таких композитов связано с решением физически нелинейной задачи теории упругости для микронеоднородного тела, математические трудности для которого существенно сложнее по сравнению с линейной задачей, особенно для регулярных структур [1, 3]. В случае стохастической структуры использование свойств эргодичности [10, 15, 16] позволяет заменить усреднение окончательного решения по макрообъему предварительным статистическим усреднением, что существенно упрощает постановку задачи и ее решение. Сингулярное [3] или одноточечное [15] приближение позволяют исследовать эффективные свойства композитов с квазисферическими включениями. Применение метода условных моментов [5, 6, 14], позволяет привести задачу об эффективных свойствах физически нелинейных композитных материалов с произвольной формой структурных элементов к системе нелинейных алгебраических уравнений.

Ниже постановка задачи об эффективных деформативных свойствах композитных материалов [12, 17], компоненты которых следуют закону физической нелинейности, обобщена на случай трансверсально-изотропной симметрии физико-механических свойств компонентов. В качестве численного примера исследованы эффективные свойства композита на основе физически нелинейной изотропной матрицы и трансверсально-изотропных сфероидальных линейно-упругих включений.

Исходными являются стохастические дифференциальные уравнения физически нелинейной теории упругости. Преобразование их к интегральным уравнениям и применение метода условных моментов [10, 16] приводит задачу к системе нелинейных алгебраических уравнений, решение которой строится методом простых итераций. Построены алгоритмы вычисления эффективных деформативных свойств композитов с трансверсально-изотропными компонентами и исследованы диаграммы макродеформирования в зависимости от объемной концентрации компонентов и параметра, характеризующего форму включений.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим представительный объем композитного материала стохастической структуры, компоненты которого следуют физически нелинейному закону деформирования. Задача о напряженно-деформированном состоянии в микроточке такого композитного материала при статическом нагружении сводится к уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j}(x_r) = 0, \quad (1)$$

зависимостям между напряжениями и деформациями

$$\sigma_{ij}(x_r) = \lambda_{ijkl}(\varepsilon_{mn}(x_r))\varepsilon_{kl}(x_r) \quad (2)$$

и соотношениям Коши

$$\varepsilon_{ij}(x_r) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(x_r) + u_{j,i}(x_r)), \quad (3)$$

где $u_i(x_r)$ – неизвестные перемещения, причем тензор модулей упругости $\lambda_{ijkl}(\varepsilon_{mn}(x_r))$, детерминированно зависящий от деформаций $\varepsilon_{mn}(x_r)$, является случайной статистически однородной функцией координат, одноточечная плотность распределения которого имеет вид

$$f(\lambda_{ijmn}\varepsilon_{mn}(x_r)) = \sum_{k=1}^2 c_k \delta(\lambda_{ijmn}(\varepsilon_{kl}(x_r)) - \lambda_{ijmn}^{[k]}(\varepsilon_{kl}(x_r))); \quad c_1 + c_2 = 1, \quad (4)$$

где $\lambda_{ijmn}^{[k]}(\varepsilon_{kl}(x_r))$ – тензор модулей упругости k -компонента; c_k – относительное объемное содержания k -компонента.

Подставляя зависимости между напряжениями и деформациями (2) в уравнение равновесия (1) и учитывая соотношение Коши (3), приходим к системе физически и статистически нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях [10]

$$[\lambda_{ijmn}(\varepsilon_{kl}(x_r))u_{m,n}(x_r)]_j = 0. \quad (5)$$

Представив случайные поля напряжений, деформаций и перемещений в виде суммы математических ожиданий и флуктуаций

$$\sigma_{ij}(x_r) = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma_{ij}^0(x_r); \quad \varepsilon_{ij}(x_r) = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \varepsilon_{ij}^0(x_r); \quad u_i(x_r) = \langle u_i \rangle x_j + u_i^0(x_r), \quad (6)$$

полученную систему (5) можно преобразовать в систему дифференциальных уравнений относительно флуктуаций перемещений

$$\lambda_{ijkl}^c u_{k,lj}^0(x_r) + \left[(\lambda_{ijkl}(\varepsilon_{mn}(x_r)) - \lambda_{ijkl}^c) \varepsilon_{kl}(x_r) \right]_{,j} = 0 \quad (7)$$

с нулевыми граничными условиями на бесконечно удаленной границе области

$$u_i^0(x_r) \Big|_s = 0, \quad (8)$$

где тензор λ_{ijmn}^c – некоторый детерминированный тензор модулей упругости с независимыми от координат компонентами.

С помощью тензорной функции Грина, удовлетворяющей уравнению

$$\lambda_{ijmn}^c G_{mk,jn}(x_r - y_r) + \delta(x_r - y_r) \delta_{ik} = 0, \quad G_{mk}(x - y) \Big|_\infty = 0, \quad (9)$$

краевую задачу (7), (8) можно привести к интегральному уравнению относительно деформаций

$$\varepsilon_{ij}(x_r) = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + K_{ijkl}(x_r - y_r) * \left[(\lambda_{klmn}(\varepsilon_{pq}(y_r)) - \lambda_{klmn}^c) \varepsilon_{mn}(y_r) \right], \quad (10)$$

где интегральный оператор $K_{ijkl}(x_r - y_r)$ действует в соответствии с правилом

$$K_{ijkl}(x_r - y_r) * \psi(y_r) = \int_{V_y} G_{(ik,j)l}(x_r - y_r) (\psi(y_r) - \langle \psi \rangle) d^3V_y. \quad (11)$$

Если макрообъем композита находится в условиях однородных макронапряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформаций $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$, тогда напряжения $\sigma_{ij}(x_r)$ и деформации $\varepsilon_{ij}(x_r)$ будут статистически однородными случайными функциями, удовлетворяющими свойству эргодичности, т.е. осреднение случайных полей по объему совпадает со статистическим осреднением по ансамблю реализаций. В этом случае макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформации $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ композита связаны соотношениями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ijkl}^* (\langle \varepsilon_{mn} \rangle) \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (12)$$

где $\lambda_{ijkl}^* (\langle \varepsilon_{mn} \rangle)$ – тензор эффективных упругих модулей, зависящий от макродеформаций. Таким образом, для определения эффективных свойств композитного материала необходимо решить систему интегральных уравнений (10), (11).

Нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями (3) относится к произвольной точке тела, которая может находиться в одном из компонентов. Если точка находится в k -компоненте, то тогда с учетом (4) имеем

$$\sigma_{ij}^k(x_r) = \lambda_{ijmn}^{[k]} (\varepsilon_{pq}^k(x_r)) \varepsilon_{mn}^k(x_r) \quad (k = 1, 2). \quad (13)$$

Напряжения $\sigma_{ij}^k(x_r)$ и деформации $\varepsilon_{mn}^k(x_r)$ в k -компоненте можно представить в виде суммы

$$\sigma_{ij}^k(x_r) = \langle \sigma_{ij}^k \rangle + \sigma_{ij}^{k0}(x_r); \quad \varepsilon_{ij}^k(x_r) = \langle \varepsilon_{ij}^k \rangle + \varepsilon_{ij}^{k0}(x_r). \quad (14)$$

Пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонента, нелинейный закон (13) можно записать в виде

$$\langle \sigma_{ij}^k \rangle = \lambda_{ijmn}^{[k]} (\langle \varepsilon_{pq}^k \rangle) \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle. \quad (15)$$

Усредняя (15) по макрообъему, получим соотношение для макронапряжений

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{k=1}^2 c_k \lambda_{ijmn}^{[k]} \left(\langle \varepsilon_{pq}^k \rangle \right) \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle. \quad (16)$$

Сравнивая выражения (16) и (12), видим, что для определения тензора эффективных упругих модулей $\lambda_{ijkl}^* \left(\langle \varepsilon_{mn} \rangle \right)$ достаточно определить соотношения, связывающие средние деформации в компоненте $\langle \varepsilon_{ij}^k \rangle$ и средние деформации в макрообъеме композита $\langle \varepsilon_{mn} \rangle$. Действительно, если такие соотношения имеют вид

$$\langle \varepsilon_{ij}^k \rangle = A_{ijmn}^k \left(\langle \varepsilon_{pq}^k \rangle \right) \langle \varepsilon_{mn} \rangle, \quad (17)$$

то, подставляя (17) в (16) и сравнивая с (12), можно получить следующие выражения для эффективных модулей:

$$\lambda_{ijmn}^* \left(\langle \varepsilon_{pq} \rangle \right) = \sum_{k=1}^2 c_k \lambda_{ijpq}^{[k]} \left(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle \right) A_{pqmn}^k \left(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle \right). \quad (18)$$

Таким образом, задача об определении эффективных деформативных свойствах физически нелинейных композитов сводится к определению тензора $A_{ijmn}^k \left(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle \right)$.

Применяя к уравнению (10), (11) аппарат условного усреднения и пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонентов, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \sum_{k=1}^2 K_{ijpq}^{vk} \left[\lambda_{pqmn}^{[k]} \left(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle \right) - \lambda_{pqmn}^c \right] \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle \quad (k, v=1, 2), \quad (19)$$

где матричный оператор K_{ijpq}^{vk} определяется формулой

$$K_{ijpq}^{vk} = K_{ijpq}(x_r - y_r) * p_{vk}(x_r - y_r), \quad (20)$$

причем $\lambda_{pqmn}^{[k]} \left(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle \right)$ – значение тензора модулей упругости в k -компоненте, $p_{vk}(x_r - y_r)$ – вероятность перехода из v -компонента в точке x_r в k -компонент в точке y_r .

2. Композитный материал, армированный сфероидальными включениями.

Для определения тензора эффективных упругих модулей $\lambda_{ijkl}^* \left(\langle \varepsilon_{mn} \rangle \right)$ необходимо решить систему нелинейных алгебраических уравнений (19) относительно средних деформаций в компонентах и, подставив их в (16), установить нелинейную связь между макронапряжениями и макродеформациями (12).

Рассмотрим композитный материал, представляющий собой матрицу, армированную случайно расположенными однонаправленными сфероидальными включениями. Вероятность перехода из v -компонента в точке x_r в k -компонент в точке y_r , $p_{vk}(x_r - y_r)$ рассматриваемого композитного материала имеет вид [16]

$$p_{vk}(x_r - y_r) = c_k + (\delta_{vk} - c_k) \varphi(x_r - y_r), \quad \varphi(x_r) = \exp \left(-\sqrt{n_1^2 (x_1^2 + x_2^2) + n_3^2 x_3^2} \right) \quad (21)$$

$$(n_1 = \beta/t_1; \quad n_3 = \beta/t_3; \quad \beta = 8/\pi^2 c_2),$$

где t_1, t_2 – размеры полуосей сфероидальных включений в поперечном и продольном направлениях, соответственно.

В этом случае систему нелинейных алгебраических уравнений (19) можно представить в виде

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (-1)^{v+1} c_{3-v} \left(I_{ijmn} - M_{ijpq} \lambda'_{pqmn} (J_2) \right)^{-1} M_{m\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta kl}^{[3]} (J_2) \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (v=1, 2), \quad (22)$$

где приняты обозначения

$$\lambda'_{pqmn} (J_2) = c_1 \lambda_{ijmn}^{[2]} (J_2) + c_2 \lambda_{ijmn}^{[1]} - \lambda_{ijmn}^c, \quad \lambda_{pqmn}^{[3]} (J_2) = \lambda_{ijmn}^{[1]} - \lambda_{ijmn}^{[2]} (J_2), \quad (23)$$

$$M_{ijpq} = K_{ijpq} (x_r - y_r) \varphi(x_r - y_r).$$

Предполагаем, что включения имеют трансверсально-изотропную симметрию физико-механических свойств, а матрица является изотропной (2 независимых постоянных тензора модулей упругости λ_2 и μ_2). Также примем, что включения являются линейно-упругими (тензор модулей упругости не зависит от деформаций), а матрица следует закону нелинейной связи между напряжениями и деформациями. Для матрицы принимаем, что объемные деформации и напряжения связаны линейно, т.е. модуль объемного сжатия $K_2 = \lambda_2 \left(\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle \right) + 2/3 \mu_2 \left(\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle \right)$ не зависит от деформаций, а для дивергентов напряжений $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle'$ и деформаций $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'$ имеем нелинейный закон

$$\langle \sigma_{ij}^2 \rangle' = 2\mu_2 (J_2) \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'; \quad J_2 = \left(\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle', \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle' \right)^{1/2}. \quad (24)$$

Диаграмму деформирования матрицы будем описывать законом с линейным упрочнением, т.е.

$$\mu_2 (J_2) = \begin{cases} \mu_2^0, & J_2 < \frac{k_2}{2\mu_2^0}; \\ \mu_2^0 + \left(1 - \frac{\mu_2^0}{\mu_2^0} \right) \frac{k_2}{2J_2}, & J_2 \geq \frac{k_2}{2\mu_2^0}, \end{cases} \quad (25)$$

где $\mu_2^0, \mu_2^0, k_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{2T}$ – постоянные материала (σ_{2T} – предел текучести материала матрицы). Тогда тензор модулей упругости матрицы зависит от дивергента деформаций и имеет вид

$$\lambda_{ijkl}^{[2]} = \lambda_2 (J_2) \delta_{ij} \delta_{mn} + 2\mu_2 (J_2) I_{ijmn}. \quad (26)$$

Тензор M_{ijpq} , согласно (23), для рассматриваемого материала имеет трансверсально-изотропную симметрию. Переходя во всех тензорных величинах к матричным соотношениям согласно схеме $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$, получим для матрицы M_{ij} соотношения

$$M_{11} + M_{12} = 4 \left[\lambda_{44}^c A_1 + (\lambda_{33}^c - 2\lambda_{44}^c) A_2 - (\lambda_{33}^c - \lambda_{44}^c) A_3 \right];$$

$$\begin{aligned}\frac{(M_{11}-M_{12})}{2} &= \lambda_{41}^c A_1 - 2(\lambda_{41}^c + \lambda_{43}^c) A_2 + (\lambda_{41}^c + 2\lambda_{43}^c + \lambda_{33}^c) A_3 + A_4; \\ M_{13} &= -4(\lambda_{43}^c + \lambda_{44}^c)(A_2 - A_3), \quad M_{33} = 8[\lambda_{41}^c A_2 - (\lambda_{41}^c - \lambda_{44}^c) A_3]; \\ M_{44} &= \lambda_{44}^c A_1 + (\lambda_{33}^c - 2\lambda_{44}^c) A_2 - (\lambda_{33}^c - \lambda_{44}^c) A_3 + A_4 - A_5\end{aligned}\quad (27)$$

$$\begin{aligned}A_1 &= -\frac{1}{8\lambda_{41}^c \lambda_{44}^c} \left\{ \frac{(t^2-1)^2}{s^4 - 2ft^2 + q} + [1 + 2f(f-1) - q] I_1 + 2(f-1) I_2 \right\}; \\ A_2 &= -\frac{1}{8\lambda_{41}^c \lambda_{44}^c} \left[-\frac{t^2-1}{t^4 - 2ft^2 + q} - (f-1) I_1 - I_2 \right]; \\ A_3 &= -\frac{1}{8\lambda_{41}^c \lambda_{44}^c} \left[\frac{2}{t^4 - 2ft^2 + q} + I_1 \right].\end{aligned}\quad (28)$$

При этом величины I_1 и I_2 , входящие в выражения (28), имеют различный вид в зависимости от знака параметра Q , определяемого выражением

$$Q = f^2 - q. \quad (29)$$

Если $Q > 0$, тогда имеем равенства

$$I_1 = \frac{D_1 - D_2}{2t^2 \sqrt{Q}}, \quad I_2 = \frac{D_1 + D_2}{2t^2}, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned}D_i &= \begin{cases} \frac{1}{z_i^{3/2}} \operatorname{arctg} \sqrt{z_i}, & z_i > 0; \\ -\frac{1}{2(-z_i)^{3/2}} \ln \frac{1 + \sqrt{-z_i}}{1 - \sqrt{-z_i}}, & z_i < 0; \end{cases} \quad (i = 1, 2); \\ z_1 &= \frac{f - t^2 + \sqrt{Q}}{t^2}, \quad z_2 = \frac{f - t^2 - \sqrt{Q}}{t^2}.\end{aligned}\quad (31)$$

Если $Q < 0$, тогда получим формулы

$$\begin{aligned}I_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{t^2 z_3^3 \sqrt{-Q}} \left[\sqrt{z_3 - a} (z_3 + 2a) \operatorname{arctg} \alpha + \frac{1}{2} \sqrt{z_3 + a} (z_3 - 2a) \ln \beta \right]; \\ I_2 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{t^2 z_3^3} \left[\sqrt{z_3 + a} (z_3 - 2a) \operatorname{arctg} \alpha - \frac{1}{2} \sqrt{z_3 - a} (z_3 + 2a) \ln \beta \right],\end{aligned}\quad (32)$$

где

$$z_3 = \sqrt{z_1 z_2}; \quad \alpha = \frac{1 - z_3}{\sqrt{2(z_3 + a)}};$$

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{2(z_3 - a) + z_3}}{1 - \sqrt{2(z_3 - a) + z_3}}; \quad a = \frac{f - t^2}{t^2}. \quad (33)$$

Если $Q = 0$, тогда имеем формулы

$$I_1 = \frac{t^2 - 3fD}{2fz_4^2}; \quad I_2 = \frac{D}{z_4}; \quad z_4 = f - t^2, \quad (34)$$

где

$$D = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{z_4}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{z_4}}{t}, & z_4 > 0 \\ -\frac{t}{\sqrt{-z_4}} \ln \frac{t + \sqrt{-z_4}}{\sqrt{|f|}}, & z_4 < 0 \end{cases}. \quad (35)$$

Величины A_4 и A_5 из (27) определяются формулами

$$A_4 = -\frac{1}{8\lambda_{66}^c} \frac{1 - t^2 + (1 - \mu)E}{\mu - t^2}, \quad A_5 = -\frac{1}{8\lambda_{66}^c} \frac{1 - E}{\mu - t^2}, \quad (36)$$

где

$$E = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{\mu - t^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\mu - t^2}}{t}; & \mu - t^2 > 0 \\ -\frac{t}{\sqrt{t^2 - \mu}} \ln \frac{t + \sqrt{t^2 - \mu}}{\sqrt{\mu}}; & \mu - t^2 < 0. \end{cases} \quad (37)$$

При этом параметры f , q , и μ , в уравнениях (29) – (37) определяются выражениями

$$f = \frac{\lambda_{11}^c \lambda_{33}^c - \lambda_{13}^c (\lambda_{13}^c + 2\lambda_{44}^c)}{2\lambda_{11}^c \lambda_{44}^c}; \quad q = \frac{\lambda_{33}^c}{\lambda_{11}^c}; \quad \mu = \frac{\lambda_{44}^c}{\lambda_{66}^c}; \quad t = t_2 / t_1, \quad (38)$$

где постоянные λ_{ij}^c принимают вид

$$\lambda_{ij}^c = \begin{cases} \langle \lambda_{ij} \rangle, & \lambda_{ij}^{[1]} \leq \lambda_{ij}^{[2]}; \\ \langle \lambda_{ij}^{-1} \rangle^{-1}, & \lambda_{ij}^{[1]} > \lambda_{ij}^{[2]}; \end{cases} \quad (39)$$

$$\langle \lambda_{ii} \rangle = c_1 \lambda_{ii}^{[1]} + c_2 \left(K_2 + \frac{4}{3} \mu_0^2 \right) \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$\langle \lambda_{ij} \rangle = c_1 \lambda_{ij}^{[1]} + c_2 \left(K_2 - \frac{2}{3} \mu_0^2 \right) \quad (i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j);$$

$$\langle \lambda_{ii} \rangle = c_1 \lambda_{ii}^{[1]} + c_2 \mu_0^2 \quad (i = 4, 5, 6),$$

причем суммирование по повторяющемуся индексу не производится.

Определив из уравнений (19) средние деформации в компонентах $\langle \varepsilon_{mn}^k \rangle$ и подставив их в (16), найдем выражения для эффективных упругих модулей композитного материала

$$\begin{aligned}
\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^* &= \langle \lambda_{11} \rangle + \langle \lambda_{12} \rangle + \frac{c_1 c_2}{\Delta} \left[4\lambda_{13}^{[3]}(J_2)(\lambda_{11}^{[3]}(J_2) + \lambda_{12}^{[3]}(J_2))(M_{13} - z\lambda'_{13}(J_2)) + \right. \\
&\quad \left. + (\lambda_{11}^{[3]}(J_2) + \lambda_{12}^{[3]}(J_2))^2 \times \right. \\
&\quad \left. \times ((M_{11} + M_{12}) + z\lambda'_{33}(J_2)) + 2\lambda_{13}^{[3]2}(J_2)(M_{33} + z(\lambda'_{11}(J_2) + \lambda'_{12}(J_2))) \right]; \\
\frac{(\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*)}{2} &= \frac{1}{2}(\langle \lambda_{11} \rangle - \langle \lambda_{12} \rangle) + \frac{1}{2} \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^{[3]}(J_2) - \lambda_{12}^{[3]}(J_2))^2 (M_{11} - M_{12})}{1 - (\lambda'_{11}(J_2) - \lambda'_{12}(J_2))(M_{11} - M_{12})}; \\
\lambda_{13}^* &= \langle \lambda_{13} \rangle + \frac{c_1 c_2}{\Delta} \left[(2\lambda_{13}^{[3]2}(J_2) + (\lambda_{11}^{[3]}(J_2) + \lambda_{12}^{[3]}(J_2))\lambda_{33}^{[3]}(J_2))(M_{13} - z\lambda'_{13}(J_2)) + \right. \\
&\quad \left. + \lambda_{13}^{[3]}(J_2)(\lambda_{11}^{[3]}(J_2) + \lambda_{12}^{[3]}(J_2)) \times \right. \\
&\quad \left. \times ((M_{11} + M_{12}) + z\lambda'_{13}(J_2)) + \lambda_{13}^{[3]}(J_2)\lambda_{33}^{[3]}(J_2)(M_{33} + z(\lambda'_{11}(J_2) + \lambda'_{12}(J_2))) \right]; \\
\lambda_{33}^* &= \langle \lambda_{33} \rangle + \frac{c_1 c_2}{\Delta} \left[4\lambda_{13}^{[3]}(J_2)\lambda_{33}^{[3]}(J_2)(M_{13} - z\lambda'_{13}(J_2)) + \right. \\
&\quad \left. + 2\lambda_{13}^{[3]2}(J_2)((M_{11} + M_{12}) + z\lambda'_{33}(J_2)) + \lambda_{33}^{[3]2}(J_2)(M_{33} + z(\lambda'_{11}(J_2) + \lambda'_{12}(J_2))) \right]; \\
\lambda_{44}^* &= \langle \lambda_{44} \rangle + \frac{4c_1 c_2 \lambda_{44}^{[3]2}(J_2) M_{44}}{1 - 4\lambda'_{44}(J_2) M_{44}};
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= 1 - 4M_{13}\lambda'_{13}(J_2) - (M_{11} + M_{12})(\lambda'_{11}(J_2) + \lambda'_{12}(J_2)) - M_{33}\lambda'_{44}(J_2) + \\
&\quad + z \left[2\lambda_{13}'^2(J_2) - (\lambda'_{11}(J_2) + \lambda'_{12}(J_2))\lambda'_{33}(J_2) \right];
\end{aligned} \tag{41}$$

$$z = 2M_{13}^2 - (M_{11} + M_{12})M_{33},$$

где матрицы $\lambda'_{mn}(J_2)$, $\lambda_{mn}^{[3]}(J_2)$ определяются соотношениями (23).

3. Композитный материал стохастической структуры.

Решение нелинейной системы алгебраических уравнений (22) строится методом простых итераций, где в качестве нулевого приближения примем решение линейной задачи $\lambda_2^{(0)} = \lambda_2(0)$, $\mu_2^{(0)} = \mu_2(0)$.

Для композитного материала стохастической структуры с трансверсально-изотропными компонентами (включения – сфероидальные) решение линейной задачи

получено в работе [16]. Если задан тензор макродеформаций $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$, то можно определить средние деформации в компонентах в нулевом приближении на основе соотношений (22)

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(0)} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (-1)^{\nu+1} c_{3-\nu} \left(I_{ijmn} - M_{ijpq} \lambda_{pqmn}^{(0)} \right)^{-1} M_{mna\beta} \lambda_{\alpha\beta kl}^{[3](0)} \langle \varepsilon_{kl} \rangle. \quad (42)$$

Здесь $\lambda_{ijkl}^{[2](0)} = \lambda_2(0) \delta_{ij} \delta_{mn} + 2\mu_2(0) I_{ijmn}$.

Алгоритм последовательных приближений для решения системы нелинейных алгебраических уравнений можно представить следующим образом: средние деформации в компонентах в n -ом приближении связаны с девиатором средних деформаций в компонентах в $(n-1)$ -ом приближении

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (-1)^{\nu+1} c_{3-\nu} \left(I_{ijmn} - M_{ijpq} \lambda_{pqmn}^{(n-1)} \right)^{-1} M_{mna\beta} \lambda_{\alpha\beta kl}^{[3](n-1)} \langle \varepsilon_{kl} \rangle. \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{ijkl}^{[2](n-1)} &= \lambda_2^{(n-1)}(J_2) \delta_{ij} \delta_{mn} + 2\mu_2^{(n-1)}(J_2) I_{ijmn}; \\ \mu_2^{(n-1)}(J_2) &= \begin{cases} \mu_2^0; & J_2^{(n-1)} < \frac{k_2}{2\mu_2^0}; \\ \mu_2^0 + \left(1 - \frac{\mu_2^0}{\mu_2^0}\right) \frac{k_2}{2J_2^{(n-1)}}; & J_2^{(n-1)} \geq \frac{k_2}{2\mu_2^0}; \end{cases} \\ \lambda_2^{(n-1)}(J_2) &= K_2 - \frac{2}{3} \mu_2^{(n-1)}(J_2); \\ J_2^{(n-1)} &= \left(\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n-1)}, \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n-1)} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Таким образом, уравнения (27) – (39), (42) – (44) позволяют определить средние деформации в компонентах композитного материала с трансверсально-изотропными компонентами с учетом физической нелинейности матрицы как функцию макродеформаций

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} (\langle \varepsilon_{mn} \rangle). \quad (45)$$

Определив средние деформации в компонентах как функции макродеформаций, на основании соотношений (40), получим матрицу λ_{ij}^* эффективных модулей упругости рассматриваемого композита как функцию модулей упругости компонентов, объёмного содержания включений c_1 в матрице и параметров формы включений t :

$$\lambda_{ij}^* = \lambda_{ij}^* \left(\lambda_{kl}^{[1]}, \lambda_2(J_2), \mu_2(J_2), c_1, t \right); \quad t = t_2/t_1. \quad (46)$$

4. Дискретно-волокнистый композит.

На основе соотношений (27) – (44) определены деформативные свойства дискретно-волокнистого композита с трансверсально-изотропными включениями и напряженно-деформированное состояние при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{mn} \rangle$. Вычис-

ления были проведены для композитного материала (с угольными волокнами с постоянными

$$\lambda_{11}^{[1]} = 263 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{33}^{[1]} = 283 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{13}^{[1]} = 133 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{12}^{[1]} = 152 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{44}^{[1]} = 52 \text{ ГПа}$$

и алюминиевой матрицей с характеристиками $K_2 = 70,3 \text{ ГПа}$; $\mu_2^0 = 26,09 \text{ ГПа}$; $\mu_2 = 10 \text{ ГПа}$; $\sigma_T = 0,45 \text{ ГПа}$) для различной объемной концентрации включений $c_1 = 0; 0,25; 0,5; 0,75$ и параметра, характеризующего форму дискретных волокон, $t = 8$.

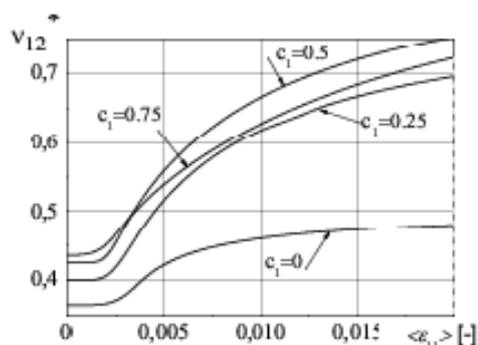


Рис. 1

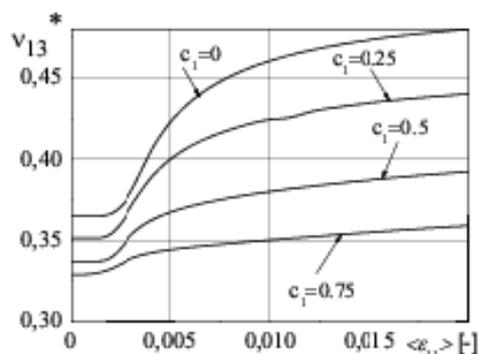


Рис. 2

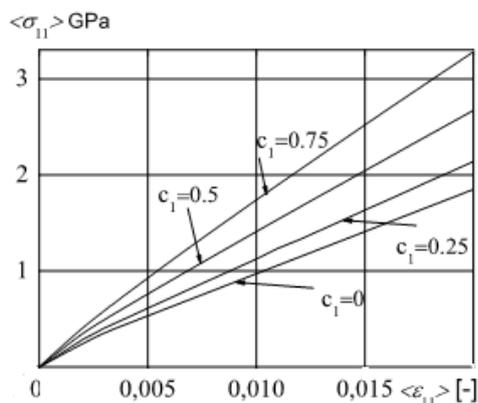


Рис. 3

На рис. 1, 2 представлены зависимости коэффициентов Пуассона ν_{12}^* и ν_{13}^* от макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для различного объемного содержания включений c_1 . На рис. 3 показаны кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ от макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для различного объемного содержания включений c_1 .

Из приведенных графиков виден характер влияния объемного содержания волокон на эффективные деформативные свойства композита. Увеличение объемного содержания волокон приводит к увеличению жесткости, а также уменьшению коэффициента Пуассона ν_{13}^* . Коэффициент Пуассона ν_{12}^* увеличивается с увеличением объемного содержания волокон, а при высоком объемном содержании волокон имеет место более сложная зависимость, что обусловлено влиянием анизотропии волокон.

РЕЗЮМЕ. Модель деформування композитних матеріалів з фізично-нелінійними компонентами узагальнено на випадок матеріалів, які армовані односпрямованими сфероїдальними включеннями. Прийнято, що матриця є ізотропною і деформується нелінійно, а включення є лінійно-пружними і мають трансверсально-ізотропну симетрію фізико-механічних властивостей. Базовими є стохастичні диференціальні рівняння фізично-нелінійної теорії пружності. Зведення їх до інтегральних рівнянь і застосування методу умовних моментів приводить задачу до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої будується методом простих ітерацій. На основі запропонованого підходу побудовано алгоритми обчислення ефективних деформативних властивостей композитів з трансверсально-ізотропними компонентами, де нелінійність обумовлена нелінійним деформуванням матриці. Досліджено залежності коефіцієнтів Пуассона від макродеформацій і діаграми макродеформування для різного об'ємного вмісту компонентів і параметрів, які характеризують форму включень.

1. Ванін Г.А. Микромеханика композиционных материалов. – К.: Наук. думка, 1985. – 302 с.
2. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
3. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
4. Castaneda P. P. Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations: I-theory // J. Mechanics and Physics of Solids, – 2002. – **50**. – P. 737 – 757.
5. Desruaux F., Meraghni F., Benzeggagh M. L. Generalised Mori–Tanaka scheme to model anisotropic damage using numerical Eshelby tensor // J. Compos. Mater. – 2001. – **35** (7). – P. 603 – 624.
6. Gonzalez C., LLorca J., A self-consistent approach to the elasto-plastic behaviour of two-phase materials including damage // J. of the Mechanics and Physics of Solids. – 2000. – **48**. – P. 675 – 692.
7. Hill R. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals // J. Mechanics and Physics of Solids. – 1965. – **13**. – P. 89 – 101.
8. Huang J., Schmauder S., Weber U., Geier S. Micromechanical modeling of the elastoplastic behavior of nanodispersed elastomer particle-modified PA 6 // Comput. Mater. Sci. – 2012. – **52**. – P. 107 – 111.
9. Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. – Berlin: Springer, 1958. – 777 p.
10. Khoroshun L.P. Conditional-Moment Method in Problems on the Mechanics of Composite Materials // Int. Appl. Mech. – 1987. – **23**, N10. – P. 989 – 995.
11. Khoroshun L.P., Nazarenko L.V. Deformation and Damage of Composite Materials with Anisotropic Components (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 4. – P. 388 – 455.
12. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and Damage of Composite Materials of Stochastic Structure: Physically Nonlinear Problems (Review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 4. – P. 359 – 413.
13. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Coupled Processes of Deformation and Long-Term Damage of Physically Nonlinear Laminated Materials // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 650 – 657.
14. Moulinec H., Suquet P. A fast numerical method for computing the linear and nonlinear mechanical properties of composites // Comptes Rendus de l'Academie des sciences. Série II, Mécanique, Physique, Chimie, Astronomie. – 1994. – **318**. – P. 1417 – 1423.
15. Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. – Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers. 1987. – 587 p.
16. Nazarenko L.V., Khoroshun L.P., Müller W.H., Wille R. Effective Thermoelastic Properties of Discrete-Fiber Reinforced Materials with Transversally-Isotropic Components // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2009. – **20**. – P. 429 – 458.
17. Nazarenko L., Bargmann S., Khoroshun L. Non-linear deformation properties of materials with stochastically distributed anisotropic inclusions // PAMM Proc. Appl. Math. Mech. – 2013. – **13** (1). – P. 253 – 254.

Поступила 20.04.2011

Утверждена в печать 03.12.2013