Б.И.Коносевич

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСИ СИММЕТРИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Институт прикладной математики и механики НАНУ,
ул. Р. Люксембург, 74, 83114, Донецк, Украина;
e-mail: konos@iamm.ac.donetsk.ua

Abstract. An estimate of error of the Wentzel – Kramers – Brillouin's solution for equations of angular motion of the axis of symmetry of a projectile is obtained. It is established that order of this estimate does not depend on the damping of low-frequency angular vibrations of the axis of symmetry.

Key words: Wentzel – Kramers – Brillouin's approach, axisymmetric projectile, flight dynamics, error estimate.

Введение.

Классическая теория полета вращающегося твердого тела (осесимметричного снаряда) в атмосфере основана на использовании уравнений его движения, линеаризованных при малых углах атаки по переменным, описывающим угловые колебания оси симметрии. Эта теория интенсивно развивалась в период с середины XIX в. до Второй мировой войны и была приведена к математически строгому виду в работе [7]. В послевоенный период получили дальнейшее развитие методы численного интегрирования уравнений движения снаряда [9, 11, 14], было изучено движение тел и снарядов с нелинейной аэродинамикой [15, 16], рассмотрены задачи о влиянии различных параметров на динамику полета тела [10] и задачи об оптимальном выборе конструктивных параметров [13]. Большое внимание уделялось исследованию динамики входа твердого тела в атмосферу Земли [12].

При изучении динамики полета осесимметричного вращающегося снаряда важную роль играет приближенное решение уравнений углового движения его оси симметрии, полученное с помощью асимптотического метода ВКБ. Оценки погрешности этого решения и его модифицированного варианта получены в [7] в виде неравенств, содержащих операции дифференцирования, интегрирования и определения максимума. В [5] такие оценки выражены через O-символы.

Коэффициенты линеаризованных уравнений углового движения оси симметрии снаряда вычислены [5, 7] в зависимости от времени на приближенной траектории центра масс, определяемой по модели снаряда как материальной точки. Вследствие этого при проведении оценок погрешности ВКБ-решения не учитывают, что оцениваемые переменные входят в уравнения движения центра масс. Не определяют также погрешность этого приближенного решения, обусловленную приближенным характером исходной траектории. И наконец, не учитывают существенное уменьшение одной из двух частот собственных колебаний оси симметрии снаряда на среднем участке траектории, включающем ее вершину.

В данной статье получены оценки погрешности ВКБ-решения уравнений углового движения оси симметрии снаряда с учетом перечисленных факторов. Эти оценки выражены через символы порядка $O(\varepsilon^n)$, причем процедуры введения малого параметра ε и вывода оценок построены таким образом, что полученным аналитическим оценкам соответствуют определенные числовые оценки.

Оценки погрешности основного и модифицированных ВКБ-решений уравнений углового движения оси симметрии снаряда уже получены в работах [2, 3]. Однако подход, принятый в этих работах, не позволил объяснить наблюдавшееся в расчетах равенство порядков погрешности основного ВКБ-решения при незатухающих и при затухающих собственных колебаниях оси симметрии. Такое объяснение дано в настоящей работе в результате уточнения некоторых исходных представлений.

1. Исходные соотношения.

Для описания движения снаряда используем следующие переменные: x, y, z – координаты центра масс снаряда в стартовой системе декартовых координат $Oxyz$ (ось Ox направлена горизонтально в сторону стрельбы, а ось Oy – вертикально вверх); v, θ, ψ – компоненты вектора $\mathbf{v}$ скорости центра масс (v – его модуль, θ – угол между осью Ox и проекцией $\mathbf{v}$ на плоскость Oxy, ψ – угол между этой проекцией и $\mathbf{v}$); α, β – проекции единичного вектора оси симметрии снаряда на оси полускоростной системы координат, ортогональные $\mathbf{v}$; p, q, r – проекции вектора ω угловой скорости снаряда на оси полусвязанной системы координат. Через I_1, I_2, m обозначаем осевой и экваториальный центральные моменты инерции снаряда и его массу; g – ускорение свободного падения.

Для действующих на снаряд сил и моментов используем такие обозначения: R_x – сила лобового сопротивления, R_y – подъемная сила, R_z – сила Магнуса, M_y – момент Магнуса, M_z – опрокидывающий момент. Проекцию вектора демпфирующего момента на продольную ось представляем в виде $M_p p$, а его проекции на поперечные оси полусвязанной системы координат равны $M_\Omega q, M_\Omega r$. Как известно, величины R_x, M_p, M_Ω являются четными, а R_y, R_z, M_y, M_z – нечетными функциями угла атаки δ между вектором $\mathbf{v}$ и осью симметрии. Все они зависят от y, v, а R_z, M_y зависят еще и от p. В уравнения движения снаряда эти величины входят через аэродинамические функции

$$K_x = R_x / m, \quad K_y = R_y / (mv\sin\delta); \quad K_z = R_z / (mv\sin\delta); \quad K_p = M_p / I_1; \tag{1.1}$$

$$A_\Omega = M_\Omega / I_2; \quad B_y = M_y / (I_2 \sin\delta); \quad B_z = M_z / (I_2 \sin\delta).$$

В предположении непрерывной дифференцируемости аэродинамических сил и моментов по углу δ функции (1.1) непрерывны. Их значения при $\delta = 0$ отмечаются верхним индексом (0).

В качестве основной примем систему уравнений движения снаряда, линеаризованную при малых углах атаки по переменным $q, r, \alpha, \beta, \psi$. Оценка погрешности ее решения по сравнению с решением нелинейной системы уравнений движения снаряда при таких же начальных условиях дана в [2].

2. Введение малого параметра.

Для введения малого параметра в уравнения движения снаряда используем процедуру нормализации [6]. В настоящей работе применяем числовую нормализацию с использованием десятичной числовой шкалы, т. е. в качестве новых масштабов фазовых переменных и функций, входящих в уравнения движения снаряда, выбираем десятичные числовые порядки модулей их характерных значений. Новые масштабы отмечаем индексом * (звездочка). В табл. 1 приведены масштабы фазовых переменных и времени, а в табл. 2 – масштабы функций $K_x^{(0)}, K_y^{(0)}, K_z^{(0)}, K_p^{(0)}, A_\Omega^{(0)}, B_y^{(0)}, B_z^{(0)}$, $A_g^{(0)} = pI$ ($I = I_1 / I_2$).

Выбор масштабов для переменных $x, y, z, v, \theta, \psi, p$ в табл. 1 достаточно очевиден и определяется техническими данными снарядов и имеющимся опытом расчета их траекторий. В качестве масштабов переменных углового движения q, r, α, β выбираем десятичные порядки модулей их амплитудных значений на начальном участке траектории. Такой выбор корректен только в случае, когда выполняются условия правильности полета снаряда, обеспечивающие ограниченность амплитуд колебаний для этих переменых (см. ниже). За единицу времени принята величина $0{,}01$ с, имеющая порядок периода высокочастотных колебаний оси симметрии. Так как при стрельбе на максимальную дальность время полета снаряда составляет десятки секунд, то в новом масштабе время полета достигает значений порядка 10^3.

Таблица 1

Масштаб	x_*, y_*	z_*	v_*	θ_*	ψ_*	p_*	α_*, β_*	q_*, r_*	t_*
Значение	10^4	10^2	10^3	1	$0{,}1^2$	10^3	$0{,}1^2$	1	$0{,}1^2$
Ед. измер.	м	м	м/с	-	-	1/с	-	1/с	с

Таблица 2

Масштаб	$K_{x*}^{(0)}$	$K_{y*}^{(0)}, K_{z*}^{(0)}$	$K_{p*}^{(0)}$	$A_{\Omega*}^{(0)}$	$A_{g*}^{(0)}$	$B_{y*}^{(0)}$	$B_{z*}^{(0)}$
Значение	10^2	1	$0{,}1^2$	1	10^2	10^2	10^4
Ед. измер.	м/с ^{2}	1/с	1/с	1/с	1/с	1/с	1/с ^{2}

Коэффициенты уравнений движения снаряда принимают свои максимальные по модулю значения в момент выстрела. Поэтому в табл. 2 в качестве новых масштабов для них приняты десятичные порядки модулей их начальных значений. Сила и момент Магнуса с большой погрешностью определяются как теоретически, так и экпериментально, и поэтому их характеристики обычно не включают в технические данные снаряда. С учетом этого для функции $K_z^{(0)}$ в табл. 2 принят такой же масштаб, как и для функции $K_y^{(0)}$, а для функции $B_y^{(0)}$ принят наибольший масштаб, при котором удается обеспечить ограниченность амплитуд угловых колебаний оси симметрии.

Нормализованные переменные и функции отмечаем чертой сверху. В соответствии с выбором масштабов, все нормализованные коэффициенты уравнений движения снаряда во время его полета принимают значения, которые по модулю близки к 1 либо меньше 1. Чтобы точнее определить порядки этих коэффициентов, заметим, что их изменение связано, в основном, с изменением скорости $\overline{v}$. С учетом этого представим данные коэффициенты в виде произведений множителей вида $\overline{v}^n$ на новые функции, причем степени n таких представлений выберем так, чтобы эти новые функции принимали значения, численно близкие к 1 на среднем участке траектории, который вносит определяющий вклад в формирование погрешности приближенных решений. В результате расчетов определяем требуемые степени n для нормализованных коэффициентов $\overline{K}_x^{(0)}, \overline{K}_y^{(0)}, \overline{K}_p^{(0)}, \overline{A}_\Omega^{(0)}, \overline{B}_z^{(0)}$. Для коэффициентов

$\overline{K}_z^{(0)}, \overline{B}_y^{(0)}$, связанных с силой и моментом Магнуса, выбираем такие же степени, как и для $\overline{K}_y^{(0)}, \overline{B}_z^{(0)}$. В итоге приходим к следующим представлениям коэффициентов нормализованных уравнений:

$$\overline{K}_x^{(0)} = \overline{v}^3 \overline{K}_0(\overline{y}, \overline{v}), \quad \overline{K}_y^{(0)} = \overline{v}^2 \overline{K}_1(\overline{y}, \overline{v}); \quad \overline{K}_z^{(0)} = \overline{v}^2 \overline{K}_2(\overline{y}, \overline{v}); \quad \overline{K}_p^{(0)} = \overline{v} \overline{K}_3(\overline{y}, \overline{v}); \qquad (2.1)$$

$$\overline{A}_\Omega^{(0)} = \overline{v} \overline{A}_1(\overline{y}, \overline{v}); \quad \overline{B}_y^{(0)} = \overline{v}^3 \overline{B}_1(\overline{y}, \overline{v}, \overline{p}); \quad \overline{B}_z^{(0)} = \overline{v}^3 \overline{B}_2(\overline{y}, \overline{v}).$$

Здесь функции $\overline{K}_0, \overline{K}_1, \overline{K}_3, \overline{A}_1, \overline{B}_2$ имеют порядок единица на всей траектории и при этом они численно близки к 1 на среднем ее участке. Функции $\overline{K}_2, \overline{B}_1$ принимают значения порядка единица или более высокого порядка. Частные производные всех этих функций по $\overline{y}, \overline{v}, \overline{p}$ являются величинами порядка единица или более высокого порядка.

Подставляем выражения (2.1) в нормализованные уравнения движения снаряда и вводим малый параметр ε вместо числа $0{,}1$. Опуская черту в обозначениях новых функций и переменных, получаем следующую подсистему уравнений поступательного движения и продольного вращения снаряда:

$$\dot{x} = \varepsilon^3 v \cos\theta; \quad \dot{y} = \varepsilon^3 v \sin\theta; \quad \dot{z} = \varepsilon^3 v \psi; \quad \dot{v} = \varepsilon^3 v^3 K_0(y, v) - \varepsilon^4 g \sin\theta;$$

$$\dot{\theta} = -\varepsilon^4 \frac{g \cos\theta}{v} + \varepsilon^4 v^2 K_1(y, v)\alpha - \varepsilon^4 v^2 K_2(y, v, p)\beta\,; \qquad (2.2)$$

$$\dot{\psi} = \varepsilon^4 \frac{g}{v} \psi \sin\theta + \varepsilon^2 v^2 K_2(y, v, p)\alpha + \varepsilon^2 v^2 K_1(y, v)\beta\,; \quad \dot{p} = \varepsilon^4 p v K_3(y, v)$$

и следующую подсистему уравнений углового движения оси симметрии снаряда:

$$\dot{\Omega} = a(y, v, p, \varepsilon)\Omega + b(y, v, p, \varepsilon)\Delta; \quad \dot{\Delta} = -i\Omega - k(y, v, p, \varepsilon)\Delta + l(v, \theta, \psi, \varepsilon). \qquad (2.3)$$

Здесь $n_2 = -O_+^*(\varepsilon^2)$, функции a, b, k, l выражаются по формулам

$$a(y, v, p, \varepsilon) = \varepsilon^2 v A_1(y, v) + ipI; \quad b(y, v, p) = v^3[\varepsilon^2 B_1(y, v, p) + iB_2(y, v)]; \qquad (2.4)$$

$$k(y, v, p, \varepsilon) = \varepsilon^2 v^2 [K_1(y, v) + iK_2(y, v, p)]; \quad l(v, \theta, \psi, \varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{g}{v}(\cos\theta - i\varepsilon^2 \psi \sin\theta).$$

Пусть $\varphi = \varphi(x, y, z, v, \theta, \psi, p, q, r, \alpha, \beta, t, \varepsilon)$ – действительная или комплексная функция. Равенство $\varphi = O(\varepsilon^n)$ означает, что функция φ имеет при $\varepsilon \to 0$ порядок ε^n или более высокий порядок, а равенство $\varphi = O^*(\varepsilon^n)$ – что φ имеет при $\varepsilon \to 0$ порядок, равный ε^n. Запись $\varphi = O_+^*(\varepsilon^n)$ означает, что φ является действительной положительной функцией порядка ε^n, а запись $\varphi \le O_+^*(\varepsilon^n)$ – что φ является действительной функцией, которая ограничена сверху положительной функцией порядка ε^n.

Обозначая через t_0, t_1 момент выстрела и момент падения снаряда на землю, имеем $t_1 - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$. С целью сокращения записи вводим векторные обозначения

$$\xi = (x, y, \varepsilon^2 z, v, \theta, \varepsilon^2 \psi, p), \quad \xi^{(5)} = (y, v, \theta, \varepsilon^2 \psi, p); \quad \xi^{(4)} = (y, v, \theta, p); \quad \xi^{(3)} = (y, v, p).$$

3. Приближенное решение уравнений углового движения и условия правильности полета снаряда.

Пусть $\xi, \Omega, \Delta(t,\varepsilon)$ – решение системы (2.2), (2.3) при начальных условиях в момент выстрела t_0. Рассматривая зависимость $\xi^{(5)}(t,\varepsilon)$ как известную, определяем коэффициенты системы линейных уравнений (2.3) как функции t,ε. Построим приближенное общее решение системы (2.3), основываясь на идеях метода ВКБ. Приближенное частное решение неоднородной системы (2.3) строится в виде разложения по степеням параметра [5, 7]. Чтобы получить приближенные выражения для двух линейно независимых решений соответствующей однородной системы, воспользуемся способом [8], основанным на переходе к уравнению Рикатти и построению его приближенных решений в виде разложений по степеням параметра.

Пусть функции $e_1, d_1(\xi^{(5)},\varepsilon);\ w, \lambda_j, n_j, \omega_j(\xi^{(4)},\varepsilon);\ \lambda_{j+}(\xi^{(5)},\alpha,\beta,\varepsilon)\ (j=1,2)$ определены равенствами

$$e_1 = \frac{bl}{ib-ak};\quad d_1 = -\frac{al}{b-ak};\qquad w = \frac{(a-k)^2}{4} - ib + ak - \frac{\dot a + \dot k}{2}; \tag{3.1}$$

$$\lambda_j = n_j + i\omega_j = \frac{a-k}{2} \pm \sqrt{w};\quad \lambda_{j+} = \lambda_j - \frac{\dot w}{4w}\quad (j=1,2).$$

Здесь $\dot a, \dot k$ – производные функций a, k по t в силу уравнений движения, $\sqrt{w} = i\sqrt{_+(-w)}$, где $\sqrt{_+}$ – главное значение корня [4], верхний и нижний знаки сответствуют $j=1$ и $j=2$.

Тогда, учитывая два первых члена разложений для решений однородной системы уравнений и один член – для решения неоднородной системы, получаем для общего решения системы уравнений (2.3) приближенные формулы

$$\tilde\Omega_+(t,\varepsilon) = i\sum_{j=1}^{2}[\lambda_{j+}(t,\varepsilon) + k(t,\varepsilon)]\tilde s_{j+}(t,\varepsilon)e^{i\varphi_j(t,\varepsilon)} + e_1(t,\varepsilon); \tag{3.2}$$

$$\tilde\Delta_+(t,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{2}\tilde s_{j+}(t,\varepsilon)e^{i\varphi_j(t,\varepsilon)} + d_1(t,\varepsilon),$$

где

$$\tilde s_{j+}(t,\varepsilon) = C_{j+}\exp\int_{t_0}^{t}[n_j(\tau,\varepsilon) - \frac{\dot w(\tau,\varepsilon)}{4w(\tau,\varepsilon)}]\,d\tau = C_{j+}\frac{w^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w^{1/4}(t,\varepsilon)}\exp\int_{t_0}^{t} n_j(\tau,\varepsilon)\,d\tau; \tag{3.3}$$

$$\varphi_j(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t}\omega_j(\tau,\varepsilon)\,d\tau\quad (j=1,2).$$

В правых частях формул (3.2), (3.3) функции с аргументами t,ε или τ,ε равны соответствующим функциям (2.4), (3.1), принятым на рассматриваемом решении системы (2.2), (2.3). Комплексные постоянные $C_{j+}\ (j=1,2)$ определяются начальными условиями.

В формулу (3.2) для $\tilde\Omega_+(t,\varepsilon)$ входят величины $\lambda_{j+}(t,\varepsilon)\,(j=1,2)$, определения (3.1) которых содержат производную функции $w(y,v,\theta,p)$ по времени в силу уравнений движения снаряда. Так как эта функция через $\dot a, \dot k$ зависит от θ, то в соответствии с пятым уравнением (2.2) ее производная $\dot{w}$ зависит от неизвестных α, β. Поэтому приближенное представление общего решения уравнений (2.3), заданное формулами (3.2), (3.3), уместно назвать приближенным квазирешением этих уравнений. Приняв в первой формуле (3.2) вместо величин λ_{j+} $(j=1,2)$ величины λ_j, получим приближенное решение уравнений (2.3)

$$\tilde{\Omega}(t,\varepsilon) = i\sum_{j=1}^{2}[\lambda_j(t,\varepsilon)+k(t,\varepsilon)]\tilde{s}_j(t,\varepsilon)e^{i\varphi_j(t,\varepsilon)} + e_1(t,\varepsilon); \qquad (3.4)$$

$$\tilde{\Delta}(t,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{2}\tilde{s}_j(t,\varepsilon)e^{i\varphi_j(t,\varepsilon)} + d_1(t,\varepsilon)$$

где

$$\tilde{s}_j(t,\varepsilon) = C_j\frac{w^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w^{1/4}(t,\varepsilon)}\exp\int_{t_0}^{t} n_j(\tau,\varepsilon)d\tau, \quad \varphi_j(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t}\omega_j(\tau,\varepsilon)d\tau \quad (j=1,2). \qquad (3.5)$$

Определение функции $\tilde{\Delta}(t,\varepsilon)$ аналогично соответствующему определению в [8]. Кроме этого основного, в [7, 3] рассмотрены также модифицированные приближенные общие решения системы уравнений (2.3), в которых используются два первых члена e_1+e_2, d_1+d_2 разложения частного решения данной неоднородной системы по степеням параметра.

Формулы (3.2) и (3.4) описывают быстрые двухчастотные колебания с частотами ω_1, ω_2 около средних значений e_1, d_1. Параметры этих колебаний ω_j, n_j $(j=1,2)$ и средние значения e_1, d_1 зависят от времени посредством медленно изменяющихся переменных $\xi^{(5)}$.

Чтобы вывести оценки погрешности приближенных выражений для Ω, Δ, необходимо располагать априорными оценками всех фазовых переменных системы (2.2), (2.3) при $t \in [t_0, t_1]$. Выполнение таких оценок

$$x, y, z, v, \theta, \psi, p(t,\varepsilon) = O(1), \quad t \in [t_0, t_1], \qquad (3.6)$$

для переменных $x, y, z, v, \theta, \psi, p$ обеспечивается правильным выбором их масштабов при нормализации. Что касается переменных углового движения q, r, α, β, то оценки вида

$$\Omega, \Delta(t,\varepsilon) = O(1), \quad t \in [t_0, t_1], \qquad (3.7)$$

выполняются для них при дополнительных условиях, называемых условиями правильности полета снаряда. Чтобы сформулировать эти условия, подставим выражения (2.4) в определения (3.1) величин e_1, d_1, w. Получаем для величин e_1, d_1 представления

$$e_1(\xi^{(5)},\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{v}E(\xi^{(3)},\varepsilon)(\cos\theta - i\varepsilon^2\psi\sin\theta); \qquad (3.8)$$

$$d_1(\xi^{(5)},\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{v^4}D(\xi^{(3)},\varepsilon)(\cos\theta - i\varepsilon^2\psi\sin\theta),$$

а для функции w – формулу

$$w(\xi^{(4)},\varepsilon) = -\frac{p^2 I^2}{4}[1-\frac{4v^3 B_2(y,v)}{p^2 I^2}] + O(\varepsilon^2). \qquad (3.9)$$

Потребуем, чтобы на всех траекториях полета снаряда выполнялось соотношение $d_1 = O(1)$. Поскольку $K_0, K_1, B_2 = O^*(1)$, $p = O^*(1)$ в (2.2), (2.4), то в представлениях (3.8) имеем $E, D = O^*(1)$. Принимая во внимание, что $\cos\theta = O^*(1)$, заключаем, что соотношение $d_1 = O(1)$ выполняется только в том случае, когда минимальное значение нормализованной скорости v вблизи вершины траектории имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$ или более низкий порядок. Учитывая также, что свое максимальное значение $v = O_+^*(1)$ скорость v принимает в момент выстрела, устанавливаем, что на любой траектории скорость изменяется в диапазоне

$$O_+^*(\varepsilon^{1/2}) \le v \le O_+^*(1). \qquad (3.10)$$

Потребуем, чтобы выражение в квадратных скобках в формуле (3.9) было положительным на всех траекториях полета снаряда и обозначим его через $\sigma^2 = \sigma^2(y,v,p)$:

$$\sigma^2 = 1 - \frac{4v^3 B_2(y,v)}{p^2 I^2} > 0. \qquad (3.11)$$

Неравенство $\sigma^2 > 0$ называется условием Маиевского, а величина σ – коэффициентом гироскопической устойчивости. Снаряд и орудие конструируются так, что $0{,}6 < \sigma(t_0,\varepsilon) < 0{,}7$. Таким образом, в момент выстрела условие Маиевского выполняется в усиленной форме $\sigma^2(t_0,\varepsilon) = O_+^*(1)$. После выстрела скорость v убывает, оставаясь в диапазоне (3.10), а продольная угловая скорость p остается равной $O_+^*(1)$. Тогда из определения величины σ^2 следует, что условие Маиевского выполняется на всей траектории полета снаряда, а коэффициент гироскопической устойчивости σ заключен в пределах

$$\sigma(t_0) \le \sigma \le 1 - O_+^*(\varepsilon^{3/2}); \quad \sigma(t_0) = O_+^*(1). \qquad (3.12)$$

Это обеспечивает колебательный характер углового движения оси симметрии снаряда.

Чтобы амплитуды этих колебаний были ограниченными, налагаются условия

$$n_1, n_2 \le O_+^*(\varepsilon^4). \qquad (3.13)$$

В [1] показано, что условия (3.10) – (3.13) обеспечивают выполнение соотношений (3.7) для нелинейной системы уравнений движения осесимметричного снаряда. Очевидно, что при этих условиях соотношения (3.7) справедливы и для системы (2.2), (2.3).

4. Переход к комплексным амплитудам.

Чтобы получить оценку погрешности приближенного квазирешения (3.2), (3.3), перейдем в уравнениях (2.3) от переменных Ω, Δ к новым переменным s_{1+}, s_{2+} по формулам

$$\Omega = i\sum_{j=1}^{2}[\lambda_{j+}(t,\varepsilon) + k(t,\varepsilon)] s_{j+} e^{i\varphi_j(t,\varepsilon)} + e_1(t,\varepsilon); \quad \Delta = \sum_{j=1}^{2} s_{j+} e^{i\varphi_j(t,\varepsilon)} + d_1(t,\varepsilon). \qquad (4.1)$$

Вводя функцию $\rho = \rho(\xi^{(5)}, q, r, \alpha, \beta, \varepsilon)$ по формуле

$$\rho = \frac{1}{8\sqrt{w}}\left(\frac{\ddot{w}}{w} - \frac{5\dot{w}^2}{4w^2}\right), \tag{4.2}$$

получаем для комплексных амплитуд s_{1+}, s_{2+} систему двух дифференциальных уравнений

$$\dot{s}_{j+} = \left(n_j - \frac{\dot{w}}{4w}\right)s_{j+} \pm \rho(s_{1+}e^{i\varphi_1} + s_{2+}e^{i\varphi_2})e^{-i\varphi_j} \pm$$

$$\frac{1}{2w^{1/2}}[i\dot{e}_1 + (\lambda_{3-j,+} + k)\dot{d}_1]e^{-i\varphi_j} \quad (j = 1,2). \tag{4.3}$$

Функции в правых частях этих уравнений приняты на рассматриваемом решении системы (2.2), (2.3); они имеют аргументы t, ε, которые для краткости не указаны.

Умножим уравнения (4.3) на $\exp\int_{t_0}^{t}(n_j - \dot{w}/(4w))\,d\tau_1$ и проинтегрируем обе их части от t_0 до t. Получим систему двух интегральных уравнений, которую запишем в виде

$$s_{j+}(t,\varepsilon) - \tilde{s}_{j+}(t,\varepsilon) = h_{1j}(t,\varepsilon) + h_{2j}(t,\varepsilon) \quad (j = 1,2), \tag{4.4}$$

где

$$h_{1j}(t,\varepsilon) = \pm e^{-i\varphi_j(t,\varepsilon)}\int_{t_0}^{t}\rho(s_{1+}e^{i\varphi_1} + s_{2+}e^{i\varphi_2})(\exp\int_{\tau}^{t}\lambda_{j+}\,d\tau_1)\,d\tau; \tag{4.5}$$

$$h_{2j}(t,\varepsilon) = \pm e^{-i\varphi_j(t,\varepsilon)}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2w^{1/2}}[i\dot{e}_1 + (\lambda_{3-j,+} + k)\dot{d}_1](\exp\int_{\tau}^{t}\lambda_{j+}\,d\tau_1)\,d\tau \quad (j = 1,2).$$

Из (4.4) следует, что для оценки погрешности приближенных комплексных амплитуд $\tilde{s}_{j+}$ в квазирешении (3.2), (3.3), достаточно найти оценки функций (4.5).

5. Подготовительные результаты.

Согласно (3.9), (3.11) имеем $\sqrt{w} = ip\sigma I/2 + O(\varepsilon^2)$. Поэтому

$$\omega_j = \frac{pI}{2}(1 \pm \sigma) + O(\varepsilon^2); \quad n_j = O(\varepsilon^2) \quad (j = 1,2). \tag{5.1}$$

Из (3.11) с учетом оценки $p = O^*(1)$ получим $1 - \sigma = 4v^3 B_2/[p^2(1+\sigma)] = v^3 O_+^*(1)$, а из (3.12) получаем $1 + \sigma = O^*(1)$. Поэтому из (5.1) следует, что величины ω_j, n_j $(j = 1,2)$ представляются в виде $\omega_1 = \Omega_1$, $\omega_2 = v^3\Omega_2$, $n_1 = \varepsilon^2 v N_1$, $n_2 = \varepsilon^2 v N_2$, где $\Omega_1, \Omega_2 = O^*(1)$, $N_1, N_2 = O(1)$.

Таким образом, частота ω_1 имеет порядок единица на всей траектории, а частота ω_2 имеет более высокий порядок $\varepsilon^{3/2}$ на среднем участке траектории при $v = O_+^*(\varepsilon^{1/2})$. Отсюда с учетом определения (3.1) функций λ_j $(j = 1,2)$ для этих функций вытекают представления

$$\lambda_1(\xi^{(4)},\varepsilon)=\Lambda_1(\xi^{(4)},\varepsilon);\quad \lambda_2(\xi^{(4)},\varepsilon)=v^3\Lambda_2(\xi^{(4)},\varepsilon), \tag{5.2}$$

в которых величины $\Lambda_j(\xi^{(4)},\varepsilon)$ $(j=1,2)$ при условиях (3.6) имеют порядок единица, а их частные производные по компонентам вектора $\xi^{(4)}$ имеют порядок единица или более высокий порядок. Выполнение условий (3.13) гарантирует справедливость оценок

$$\exp\int_\tau^t \lambda_j(\tau_1,\varepsilon)\,d\tau_1=O(1);\quad \exp\int_\tau^t \lambda_{j+}(\tau_1,\varepsilon)\,d\tau_1=O(1)\quad (j=1,2;\, t_0\le\tau\le t\le t_1). \tag{5.3}$$

Определим порядки функций $w,\dot{w},\ddot{w},\rho$ по ε. Так как $\sigma^2=O_+^*(1)$ согласно (3.12), то из (3.9) следует, что $w(\xi^{(4)},\varepsilon)=O^*(1)$. Поскольку частные производные функции w по компонентам вектора $\xi^{(4)}$ равны $O(1)$, то при дифференцировании этой функции по t в силу уравнений (2.2) происходит повышение порядка на 3, т. е. $\dot{w}(\xi^{(4)},\alpha,\beta,\varepsilon)=O(\varepsilon^3)$. В выражении $\dot{w}$ ведущие члены порядка ε^3 зависят от $\xi^{(4)}$, а члены, содержащие α,β, имеют порядок ε^9. Поэтому при дифференцировании $\dot{w}$ снова происходит повышение порядка на 3. Таким образом, имеем

$$w(\xi^{(4)},\varepsilon)=O^*(1);\quad \dot{w}(\xi^{(4)},\alpha,\beta,\varepsilon)=O(\varepsilon^3);\quad \ddot{w}(\xi^{(5)},q,r,\alpha,\beta,\varepsilon)=O(\varepsilon^6). \tag{5.4}$$

Отсюда для функции (4.2) следует оценка

$$\rho(\xi^{(5)},q,r,\alpha,\beta,\varepsilon)=O(\varepsilon^6). \tag{5.5}$$

В заключение этого пункта продифференцируем выражения (3.8) функций e_1,d_1 по t в силу уравнений (2.2). При этом примем во внимание, что входящие в эти выражения функции $E,D(\xi^{(3)},\varepsilon)$ равны $O^*(1)$, а их частные производные по компонентам вектора $\xi^{(3)}$ равны $O(1)$. В результате для производных $\dot{e}_1,\dot{d}_1$ получаем представления

$$\dot{e}_1(\xi^{(5)},\alpha,\beta,\varepsilon)=\dot{e}_1^{(0)}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\dot{e}_1^{(1)}(\xi^{(5)},\alpha,\beta,\varepsilon); \tag{5.6}$$

$$\dot{d}_1(\xi^{(5)},\alpha,\beta,\varepsilon)=\dot{d}_1^{(0)}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\dot{d}_1^{(1)}(\xi^{(5)},\alpha,\beta,\varepsilon),$$

в которых члены, не зависящие от α,β, равны

$$\dot{e}_1^{(0)}(\xi^{(5)},\varepsilon)=\varepsilon^5\dot{E}_{5,0}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\varepsilon^6v^{-2}\dot{E}_{6,-2}(\xi^{(5)},\varepsilon); \tag{5.7}$$

$$\dot{d}_1^{(0)}(\xi^{(5)},\varepsilon)=\varepsilon^5v^{-3}\dot{D}_{5,-3}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\varepsilon^6v^{-5}\dot{D}_{6,-5}(\xi^{(5)},\varepsilon),$$

а члены, зависящие от α,β, выражаются по формулам

$$\dot{e}_1^{(1)}(\xi^{(5)},\alpha,\beta,\varepsilon)=\varepsilon^6v\dot{E}_{6,1}^{\alpha}(\xi^{(5)},\varepsilon)\alpha+\varepsilon^6v\dot{E}_{6,1}^{\beta}(\xi^{(5)},\varepsilon)\beta; \tag{5.8}$$

$$\dot{d}_1^{(1)}(\xi^{(5)},\alpha,\beta,\varepsilon)=\varepsilon^6v^{-2}\dot{D}_{6,-2}^{\alpha}(\xi^{(5)},\varepsilon)\alpha+\varepsilon^6v^{-2}\dot{D}_{6,-2}^{\beta}(\xi^{(5)},\varepsilon)\beta.$$

Здесь функции, обозначенные через $\dot{E},\dot{D}$ с индексами, равны $O(1)$.

Из представлений (3.8), (5.2), (5.6)-(5.8) следует, что при изменении скорости v в диапазоне (3.10) справедливы оценки

$$\lambda_j,\lambda_{j+}=O(1)\ (j=1,2),\quad e_1=O(\varepsilon^{3/2}),\ d_1=O(1),\quad \dot{e}_1=O(\varepsilon^5),\ \dot{d}_1=O(\varepsilon^{7/2}). \tag{5.9}$$

6. Оценки функций h_{1j} $(j=1,2)$.

Разрешив формулы замены (4.1) относительно переменных s_{j+} $(j=1,2)$, имеем

$$s_{j+} = \mp \frac{i(\Omega - e_1) + (\lambda_{3-j,+} + k)(\Delta - d_1)}{2\sqrt{w}} e^{-i\varphi_j} \quad (j=1,2). \tag{6.1}$$

Отсюда в соответствии с (3.7), (5.4), (5.9) следует, что $s_{j+} = O(1)$ $(j=1,2)$. Воспользовавшись оценками (5.3), (5.5), устанавливаем, что подынтегральные функции в определении (4.5) величин h_{1j} $(j=1,2)$ равны $O(\varepsilon^6)$. Поэтому при $t_1 - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ получаем

$$h_{1j}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3) \quad (j=1,2;\, t \in [t_0, t_1]). \tag{6.2}$$

7. Оценки функций h_{2j} $(j=1,2)$.

В формулах (4.5) для h_{2j} заменим величины λ_{j+} их выражениями (3.1) через λ_j, а величины $\dot{e}_1, \dot{d}_1$ выразим по формулам (5.6). Получаем формулы

$$h_{2j}(t,\varepsilon) = h_{2j}^{(0)}(t,\varepsilon) + h_{2j}^{(1)}(t,\varepsilon) + h_{2j}^{(2)}(t,\varepsilon) \quad (j=1,2), \tag{7.1}$$

в которых

$$h_{2j}^{(0)}(t,\varepsilon) = \pm e^{i\varphi_j(t,\varepsilon)} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2w^{1/2}} [i\dot{e}_1^{(0)} + (\lambda_{3-j} + k)\dot{d}_1^{(0)}] (\exp \int_{\tau}^{t} \lambda_{j+}\, d\tau_1)\, d\tau,$$

$$h_{2j}^{(1)}(t,\varepsilon) = \pm e^{i\varphi_j(t,\varepsilon)} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2w^{1/2}} [i\dot{e}_1^{(1)} + (\lambda_{3-j} + k)\dot{d}_1^{(1)}] (\exp \int_{\tau}^{t} \lambda_{j+}\, d\tau_1)\, d\tau, \tag{7.2}$$

$$h_{2j}^{(2)}(t,\varepsilon) = \mp e^{i\varphi_j(t,\varepsilon)} \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{w}\dot{d}_1}{8w^{3/2}} (\exp \int_{\tau}^{t} \lambda_{j+}\, d\tau_1)\, d\tau \quad (j=1,2).$$

7.1. Определим порядки функций (7.2). Наиболее просто оценивается последняя из них. В соответствии с (5.3), (5.4), (5.9) подынтегральная функция в формуле (7.2) для $h_{2j}^{(2)}$ равна $O(\varepsilon^{13/2})$. Поэтому при $t_1 - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ имеем

$$h_{2j}^{(2)}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{7/2}) \quad (j=1,2;\, t \in [t_0, t_1]). \tag{7.3}$$

7.2. Найдем оценки функций $h_{2j}^{(1)}$ $(j=1,2)$. Из формул (3.7), (5.8) следует, что $\dot{e}_1^{(1)} = \varepsilon^6 \dot{E}_{60}$, $\dot{d}_1^{(1)} = \varepsilon^6 v^{-2} \dot{D}_{6,-2}$ $(\dot{E}_{60}, \dot{D}_{6,-2} = O^*(1))$. Далее, в соответствии с (2.4) имеем $k = \varepsilon^2 v^2 K$ $(K = O^*(1))$ и с помощью соотношений (5.2) получаем представления

$$\lambda_1 + k = L_1; \quad \lambda_2 + k = v^3 L_2 \quad (L_1, L_2 = O^*(1)). \tag{7.4}$$

Следовательно, с учетом оценки $v^{-1} = O(\varepsilon^{-1/2})$ в формуле (7.2) для $h_{2j}^{(1)}$ имеем

$$i\dot{e}_1^{(1)} + (\lambda_{3-j} + k)\dot{d}_1^{(1)} = O(\varepsilon^{7-j}) \quad (j = 1,2). \tag{7.5}$$

Рассмотрим случай, когда низкочастотные (с частотой ω_2) колебания оси симметрии снаряда не затухают. Тогда для n_1, n_2 выполнены условия (3.13), из которых следуют оценки (5.3). Воспользовавшись соотношениями (5.3), (7.5), заключаем, что подынтегральная функция в формуле (7.2) для $h_{2j}^{(1)}$ равна $O(\varepsilon^{7-j})$ $(j = 1,2)$. Поэтому при $t_1 - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ имеем

$$h_{2j}^{(1)}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{4-j}) \quad (j = 1,2; t \in [t_0, t_1]). \tag{7.6}$$

Рассмотрим случай, когда $n_2 = -O_+^*(\varepsilon^2)$, а для n_1, по-прежнему, выполняется условие (3.13). Таким образом, низкочастотные колебания затухают, а колебания с высокой частотой ω_1, в общем случае, не затухают. Тогда при $j = 1$ для экспоненты под знаком интеграла в формуле для $h_{21}^{(1)}$ сохраняется оценка (5.3) и поэтому остается верной оценка (7.6). При $j = 2$, по предположению, выполнено неравенство $n_2(t,\varepsilon) \le -\varepsilon^2 N_2 \quad (t \in [t_0, t_1])$, где $N_2 > 0$ – постоянная порядка единицы. Поэтому, с учетом определений (3.1) функций λ_2, λ_{2+}, экспонента под знаком интеграла в формуле (7.2) для $h_{22}^{(1)}$ принимает вид

$$E_{\lambda_{2+}}(\tau,t,\varepsilon) = \frac{w^{1/4}(\tau,\varepsilon)}{w^{1/4}(t,\varepsilon)} E_{n_2}(\tau,t,\varepsilon)(\exp\int_\tau^t i\omega_2(\tau_1,\varepsilon)d\tau_1),$$

где

$$E_{n_2}(\tau,t,\varepsilon) = \exp\int_\tau^t n_2(\tau_1,\varepsilon)d\tau_1 \le \exp[-\varepsilon^2 N_2(t-\tau)] \quad (t_0 \le \tau \le t \le t_1).$$

Согласно (5.4), (7.5), справедливо неравенство $|[i\dot{e}_1^{(1)} + (\lambda_1 + k)\dot{d}_1^{(1)}]/(2w^{1/2})| \le \varepsilon^5 F$, где $F > 0$ – постоянная порядка единицы. Следовательно, получаем

$$|h_{22}^{(1)}(t,\varepsilon)| \le \varepsilon^3 \frac{F}{N_2}\{1 - \exp[-\varepsilon^2 N_2(t - t_0)]\} = O(\varepsilon^3).$$

Таким образом, в случае затухающих низкочастотных колебаний вместо (7.6) имеем

$$h_{2j}^{(1)}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3) \quad (j = 1,2; t \in [t_0, t_1]). \tag{7.7}$$

7.3. Переходя к оценке функций $h_{2j}^{(0)}$, запишем их определение (7.2) в виде

$$h_{2j}^{(0)}(t,\varepsilon) = \pm\frac{1}{2w^{1/4}(t,\varepsilon)} e^{i\varphi_j(t,\varepsilon)} \int_{t_0}^t g_j(\tau,\varepsilon)[\exp\int_\tau^t \lambda_j(\tau_1,\varepsilon)d\tau_1]d\tau \quad (j = 1,2), \tag{7.8}$$

где $g_j(\tau,\varepsilon) = g_j(\xi^{(5)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$, $g_j = [i\dot{e}_1^{(0)} + (\lambda_{3-j} + k)\dot{d}_1^{(0)}]/w^{1/4}$.

Воспользовавшись формулами (5.7), (7.4), получим для функций g_1, g_2 представления, которые после объединения однотипных слагаемых записываем в виде

$$g_1(\xi^{(5)},\varepsilon)=\varepsilon^5 G_{50}^{(1)}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\varepsilon^6 v^{-2} G_{6,-2}^{(1)}(\xi^{(5)},\varepsilon); \tag{7.9}$$

$$g_2(\xi^{(5)},\varepsilon)=\varepsilon^5 v^{-3} G_{5,-3}^{(2)}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\varepsilon^6 v^{-5} G_{6,-5}^{(2)}(\xi^{(5)},\varepsilon).$$

Здесь функции, обозначенные буквой G с индексами, равны $O(1)$ вместе со своими частными производными по компонентам вектора $\xi^{(5)}$. Так как $v^{-1}=O(\varepsilon^{-1/2})$, из (7.9) следуют оценки

$$g_1(\xi^{(5)},\varepsilon)=O(\varepsilon^5), \quad g_2(\xi^{(5)},\varepsilon)=O(\varepsilon^{7/2}). \tag{7.10}$$

Чтобы вывести для функций $h_{2j}^{(0)}$ оценки, точные по порядку, заметим, что функции λ_j, g_j $(j=1,2)$ в формуле (7.8) зависят от τ,ε посредством медленно изменяющихся переменных $\xi^{(3)},\xi^{(5)}$, и воспользуемся правилом интегрирования по частям:

$$h_{2j}^{(0)}(t,\varepsilon)=\mp\frac{1}{2w^{1/4}(t,\varepsilon)}e^{i\varphi_j(t,\varepsilon)}\left[r_j(\tau,\varepsilon)\exp\int_\tau^t \lambda_j(\tau_1,\varepsilon)\,d\tau_1\right]\Bigg|_{\tau=t_0}^{\tau=t} \pm \tag{7.11}$$

$$\pm\frac{1}{2w^{1/4}(t,\varepsilon)}e^{i\varphi_j(t,\varepsilon)}\int_{t_0}^t \dot r_j(\tau,\varepsilon)[\exp\int_\tau^t \lambda_j(\tau_1,\varepsilon)d\tau_1]\,d\tau \quad (j=1,2).$$

Здесь $r_j(\tau,\varepsilon)=r_j(\xi^{(5)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$, $r_j=g_j/\lambda_j$ $(j=1,2)$.

Для функций r_j с помощью формул (5.2), (7.9) получаем представления

$$r_1(\xi^{(5)},\varepsilon)=\varepsilon^5 R_{50}^{(1)}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\varepsilon^6 v^{-2} R_{6,-2}^{(1)}(\xi^{(5)},\varepsilon); \tag{7.12}$$

$$r_2(\xi^{(5)},\varepsilon)=\varepsilon^5 v^{-6} R_{5,-6}^{(2)}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\varepsilon^6 v^{-8} R_{6,-8}^{(2)}(\xi^{(5)},\varepsilon),$$

в которых функции, обозначенные буквой R с индексами, равны $O(1)$ вместе со своими частными производными. Так как $v^{-1}=O(\varepsilon^{-1/2})$, имеем

$$r_1(\xi^{(5)},\varepsilon)=O(\varepsilon^5), \quad r_2(\xi^{(5)},\varepsilon)=O(\varepsilon^2). \tag{7.13}$$

Дифференцирование выражений (7.12) по времени в силу уравнений (2.2) приводит к представлениям, из которых следует, что

$$\dot r_1(\xi^{(5)},\alpha,\beta,\varepsilon)=O(\varepsilon^8), \quad \dot r_2(\xi^{(5)},\alpha,\beta,\varepsilon)=O(\varepsilon^{11/2}). \tag{7.14}$$

Воспользовавшись соотношениями (7.13), (7.14), получаем из (7.11) искомые оценки

$$h_{21}^{(0)}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^5), \quad h_{22}^{(0)}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^2) \quad (t\in[t_0,t_1]). \tag{7.15}$$

Отметим, что порядок оценки (7.15) для $h_{22}^{(0)}$ определяется только порядком второй оценки (7.13) и не зависит от того, являются ли колебания затухающими или нет.

7.4. В соответствии с (7.1), (7.3), (7.6), (7.7), (7.15) заключаем, что как при затухающих, так и при незатухающих колебаниях оси симметрии снаряда справедливы оценки

$$h_{21}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^3), \quad h_{22}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^2) \quad (t\in[t_0,t_1]). \tag{7.16}$$

8. Погрешность приближенного квазирешения.

Из формул (4.4), (6.2), (7.16) следуют оценки погрешности комплексных амплитуд

$$s_{j+}(t,\varepsilon)-\tilde{s}_{j+}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{4-j}) \quad (j=1,2;\, t\in[t_0,t_1]). \qquad (8.1)$$

Вычтем из равенств (4.1) соответствующие равенства (3.2) и воспользуемся соотношениями (8.1). В результате для погрешности приближенного квазирешения (3.2), (3.3) уравнений (2.3) углового движения оси симметрии снаряда находим оценку

$$\Omega(t,\varepsilon)-\tilde{\Omega}_{+}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^2), \quad \Delta(t,\varepsilon)-\tilde{\Delta}_{+}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^2) \quad (t\in[t_0,t_1]). \qquad (8.2)$$

9. Погрешность приближенного решения.

Введем новые комплексные переменные s_1, s_2 по формулам

$$\Omega=i\sum_{j=1}^{2}[\lambda_j(t,\varepsilon)+k(t,\varepsilon)]s_j e^{i\varphi_j(t,\varepsilon)}+e_1(t,\varepsilon); \quad \Delta=\sum_{j=1}^{2}s_j e^{i\varphi_j(t,\varepsilon)}+d_1(t,\varepsilon). \qquad (9.1)$$

Покажем, что переменные s_j и их аппроксимации $\tilde{s}_j$ для приближенного решения (3.4), (3.5) отличаются от соответствующих функций $s_{j+}, \tilde{s}_{j+}$ $(j=1,2)$ в приближенном квазирешении (3.2), (3.3) величинами порядка не ниже ε^3, т. е.

$$s_j=s_{j+}+O(\varepsilon^3); \quad \tilde{s}_j=\tilde{s}_{j+}+O(\varepsilon^3) \quad (j=1,2). \qquad (9.2)$$

Разрешив формулы (9.1) относительно переменных s_j $(j=1,2)$, получаем равенства, которые отличаются от равенств (6.1) тем, что вместо функций λ_{j+} содержат функции λ_j. После вычитания этих равенств из (6.1) приходим к формулам, из которых с учетом оценок $\lambda_{j+}-\lambda_j=O(\varepsilon^3)$, $\Delta-d_1=O(1)$ следует первая пара соотношений (9.2).

Чтобы получить вторую пару соотношений (9.2), оценим разности $C_{j+}-C_j$ $(j=1,2)$. Постоянные C_{j+}, C_j $(j=1,2)$ определяются из условий, что начальные данные в момент t_0 для приближенного квазирешения (3.2) и приближенного решения (3.4) совпадают с начальными даными для точного решенния уравнений (2.3). Так как $C_{j+}=\tilde{s}_{j+}(t_0,\varepsilon)$ $(j=1,2)$ согласно (3.3), то постоянные C_{j+} выражаются через $\Omega,\Delta(t_0,\varepsilon)$ по формулам (6.1), в которых принято $t=t_0$. Из (3.4), (3.5) следует, что постоянные C_j выражаются через $\Omega,\Delta(t_0,\varepsilon)$ по формулам, которые отличаются от предыдущих заменой $\lambda_{j+}(t_0,\varepsilon)$ на $\lambda_j(t_0,\varepsilon)$. Поэтому так же, как и при выводе первой пары соотношений (9.2), получаем оценку $C_{j+}-C_j=O(\varepsilon^3)$ $(j=1,2)$. Вычитая равенства (3.3) из (3.5), с учетом этой оценки приходим ко второй паре соотношений (9.2).

Из соотношений (9.2) следует, что $s_j-\tilde{s}_j=s_{j+}-\tilde{s}_{j+}+O(\varepsilon^3)$ $(j=1,2)$. Отсюда с учетом соотношений (8.1) получаем следующие оценки погрешности комплексных амплитуд:

$$s_j(t,\varepsilon) - \tilde{s}_j(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{4-j}) \quad (j = 1,2;\, t \in [t_0, t_1]). \tag{9.3}$$

Вычитая равенства (3.4) из (9.1), при помощи (9.3) получим оценку погрешности основного ВКБ-решения (3.4), (3.5) уравнений (2.3) углового движения оси симметрии снаряда

$$\Omega(t,\varepsilon) - \tilde{\Omega}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta(t,\varepsilon) - \tilde{\Delta}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2) \quad (t \in [t_0, t_1]). \tag{9.4}$$

Данная оценка справедлива как при затухающих, так и при незатухающих низкочастотных угловых колебаниях оси симметрии снаряда. В отличие от этого, модифицированные ВКБ-решения уравнений (2.3) в случае затухающих низкочастотных колебаний имеют погрешности меньше, чем при незатухающих колебаниях [3].

10. **Числовые оценки.**

Пусть φ – действительная или комплексная функция нормализованных фазовых переменных, времени и малого параметра ε. Согласно определению, оценка $\varphi = O(\varepsilon^n)$ означает, что при малых $\varepsilon > 0$ в рассматриваемой области изменения фазовых переменных и времени выполнено неравенство $|\varphi| \le \varepsilon^n C$, где $C = \mathrm{const} > 0$. Так как в данной работе параметр ε введен вместо числа $0{,}1$, то каждой оценке вида $\varphi = O(\varepsilon^n)$ можно сопоставить десятичную числовую оценку $\varphi = O(0{,}1^n)$, т. е. неравенство $|\varphi| \le 0{,}1^n C$. Однако постоянная C здесь в общем случае не является близкой к 1, т. е. нет соответствия между аналитическими и числовыми оценками погрешности. Тем не менее в данной работе оценки погрешности полученных приближений построены так, чтобы обеспечить это соответствие. Достигается это вследствие того, что функции $\overline{K}_0, \overline{K}_1, \overline{K}_3, \overline{A}_1, \overline{B}_2$ в представлениях (2.1) численно близки к единице на среднем участке траектории, включающем ее вершину. Таким образом, если для некоторой величины φ установлена аналитическая оценка $\varphi = O(\varepsilon^n)$, то данная величина имеет числовой порядок $0{,}1^n$ или выше, т. е. $|\varphi| \le 0{,}1^n C$, где $C < 10$.

В частности, с учетом выбора масштабов для переменных q, r, α, β, из оценок (9.4) следует, что приближенное решение (3.4), (3.5) определяет исходные (ненормализованные) переменные q, r с погрешностью меньше, чем $0{,}1\,c^{-1}$, а переменные α, β – с погрешностью меньше, чем $0{,}1^3$. Проведенные вычислительные эксперименты показывают, что при стрельбе на большую дальность такие погрешности действительно достигаются в некоторые моменты времени.

Заключение.

Дана оценка погрешности основного ВКБ-решения уравнений угловых колебаний оси симметрии вращающегося твердого тела (снаряда). Процедура вывода этой аналитической оценки построена таким образом, что ей соответствует определенная числовая оценка.

Р Е З Ю М Е . Отримано оцінку похибки розв’язку Вентцель – Крамерса – Бріллюена рівнянь кутового руху осі симетрії обертання твердого тіла (снаряда). Встановлено, що порядок цієї оцінки не залежить від згасання низькочастотних коливань осі симетрії снаряда.

1. *Коносевич Б.И.* Исследование динамики полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – Донецк: Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины. – 2000. – Вып. 30. – С. 109-119.
2. *Коносевич Б.И.* Оценка погрешности линеаризованных уравнений движения осесимметричного снаряда // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, №. 6. – С. 930 – 941.
3. *Коносевич Б.И.* Асимптотические представления угловых колебаний оси симметрии снаряда // Доп. НАН України. – 2010. – № 7. – С. 54 – 61.
4. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т.1. – М.: Наука, 1967. – 486 с.
5. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – 2-е изд. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
6. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 190 с.
7. *Пугачев В.С.* Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе // Тр. ВВИА им. Жуковского. – 1940. – Вып. 70. – 90 с.
8. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 350 с.
9. *Hainz L.C., Costello M.* Modified Projectile Linear Theory for Rapid Trajectory Prediction // J. of Guidance, Control, and Dynamics. – 2005. – **28**, N 5. – P.1006 – 1014.
10. *Kiforenko B.N.* Problems of the Mathematical Description of Rocket Engines as Plants // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 5. – P. 608 – 612.
11. *La Farge R.A., Petzold L.R.* EFAM (Exponentially fitted Adams methods) a numerical integrator for artillery shells // AIAA Papers. – 1982. – N 1342.
12. *Lokshin B.Ya., Okunev Yu.M., Samsonov V.A., Sadovnichy V.A.* On bolide flight modelling // J. of Mathematical Sciences. – 2007. – **146**, N 3. – P. 5840 – 5845.
13. *Makeev V.I., Strelnikova E.A., Trofimenko P.E., Bondar A.V.* On Choice of Design Parameters for an Aircraft // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 5. – P. 588 – 596.
14. *McCoy R.L.* Modern Exterior Ballistics. – Aighon, PA: Schiffer Publishing Ltd, 2012.– 328 p.
15. *Murphy C.H.* Symmetric Missile Dynamic Instabilities // J. Guidance and Control. – 1981. – **4**, N 5. – P. 464 – 471.
16. *Shamolin M.V.* On Integrability in Problems of Dynamics of a Rigid Body Interacting with a Medium // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 665 – 674.

Поступила 17.08.2011 Утверждена в печать 03.12.2013