

Ю. В. Скосаренко

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РЕБРИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057 Киев, Украина; string@inmech.kiev.ua*

Abstract. A technique of solving the problem of natural vibrations of the ribbed cylindrical shells, which interact with the axisymmetric elastic foundation by the Winkler's and Paternak's models is expounded. An effect of stiffness of elastic foundation and its location over the shell length on the shell natural frequencies is studied on examples.

Key words: cylindrical shell, stiffening ribs, elastic foundation, natural vibrations.

Введение.

Динамика подкрепленных оболочечных конструкций, как в линейной, так и в геометрически нелинейной постановках, исследована многими авторами [1, 2, 4, 5, 7, 8 – 12, 18 и др.]. Изучению влияния внешней среды на устойчивость и колебания оболочек посвящены работы [6, 10, 13 – 17 и др.]. Как следует из обзора имеющихся публикаций, остается актуальным исследование влияния параметров внешней среды на частоты и формы собственных колебаний ребристых оболочек. В данной работе внешняя среда рассмотрена в виде упругого основания, учитываемого на основе модели типа П.Л. Пастернака [3] и модели Винклера.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Для решения задачи используем классическую теорию оболочек и стержней [1]. Примем, что система продольных подкрепляющих ребер регулярна. На торцах оболочки заданы граничные условия шарнирного опирания. Оболочка взаимодействует с осесимметричным упругим основанием, препятствующим ее нормальным перемещениям и поворотам срединной поверхности относительно окружной координатной линии. Для решения задачи применяем энергетический метод. Полную потенциальную энергию рассматриваемой упругой системы, а также кинетическую энергию, представим в виде

$$U = U_o + U_1 + U_2 + U_f; \quad (1)$$

$$V = V_o + V_1 + V_2 + V_f \quad (2)$$

$$\left(U = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int_0^l \int_0^{2\pi r} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{r} \right) \right]^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{r} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right) dx dy + \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \int_0^l \int_0^{2\pi r} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \right.$$

$$-2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \Bigg\} dx dy; \quad (3)$$

$$U_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{1}{2} \int_0^l \left[E_{1i} F_{1i} \left(\frac{du_{1i}}{dx} \right)^2 + E_{1i} I_{y1i} \left(\frac{d^2 w_{1i}}{dx^2} \right)^2 \right] dx; \quad (4)$$

$$U_2 = \sum_{j=1}^{k_2} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi r} \left[E_{2j} F_{2j} \left(\frac{dv_{2j}}{dy} - \frac{w_{2j}}{r} \right)^2 + E_{2j} I_{x2j} \left(\frac{d^2 w_{2j}}{dy^2} + \frac{w_{2j}}{r^2} \right)^2 \right] dy; \quad (5)$$

$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi r} E_f \int_0^\infty \left(\frac{\partial w_f}{\partial z} \right)^2 dz dy dx; \quad (6)$$

$$V_0 = \frac{\rho_o h}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi r} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy; \quad (7)$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_1} \rho_{1i} F_{1i} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u_{1i}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{1i}}{\partial t} \right)^2 \right] dx; \quad (8)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_2} \rho_{2j} F_{2j} \int_0^{2\pi r} \left[\left(\frac{\partial v_{2j}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{2j}}{\partial t} \right)^2 \right] dy; \quad (9)$$

$$V_f = \frac{\rho_f}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi r} \int_0^\infty \left(\frac{\partial w_f}{\partial t} \right)^2 dz dx dy, \quad (10)$$

где U_o, U_1, U_2, U_f – потенциальная энергия обшивки, продольных, кольцевых ребер и упругого основания; V_0, V_1, V_2, V_f – кинетическая энергия обшивки, продольных, кольцевых ребер и упругого основания; E, ρ_o, μ – модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона материала обшивки; u, v, w – осевое, окружное и нормальное перемещения срединной поверхности обшивки; $x = r\xi, y = r\theta, z = r\zeta$ – продольная, окружная и нормальная координаты; t – время; h, r, l – толщина обшивки, радиус срединной поверхности оболочки и ее длина, соответственно; k_1, k_2 – число продольных и кольцевых ребер; $E_{1i}, \rho_{1i}, F_{1i}, I_{y1i}, u_{1i}, w_{1i}$ – модуль упругости, плотность материала, площадь и момент инерции поперечного сечения относительно окружной координатной линии, продольное и нормальное перемещения i -го продольного ребра; $E_{2j}, \rho_{2j}, F_{2j}, I_{x2j}, v_{2j}, w_{2j}$ – модуль упругости, плотность материала, площадь и момент инерции поперечного сечения относительно продольной координатной линии, окружное и нормальное перемещения j -го кольцевого ребра; E_f, ρ_f, w_f – модуль упругости, плотность материала и перемещения точек упругого основания, окружающего оболочку с внешней стороны ее боковой поверхности.

Перемещения продольных и кольцевых ребер связаны с перемещениями срединной поверхности оболочки следующими зависимостями [1, 2]:

$$\begin{aligned} u_{1i} &= \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{1i})(u + h_{1i}\varphi_1)d\theta; & w_{1i} &= \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{1i})wd\theta; \\ v_{2j} &= \int_0^{1/r} \delta(\xi - \xi_{2j})(v + h_{2j}\varphi_2)d\xi; & w_{2j} &= \int_0^{1/r} \delta(\xi - \xi_{2j})wd\xi, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\delta(\theta - \theta_{1i}), \delta(\xi - \xi_{2j})$ – функции Дирака; θ_{1i}, ξ_{2j} – координаты линий контакта i -го продольного и j -го кольцевого ребер с оболочкой; h_{1i}, h_{2j} – соответствующие эксцентриситеты поперечного сечения продольных и кольцевых ребер; $\varphi_1 = -\partial w / \partial x$; $\varphi_2 = -\partial w / \partial y + v / r$.

Зависимость между величиной w_f и перемещениями оболочки принимаем в виде

$$w_f = \frac{r}{r+z} \left(C_1 w + r C_2 \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (12)$$

Безразмерные коэффициенты C_1, C_2 характеризуют свойство упругого основания препятствовать нормальным перемещениям и поворотам срединной поверхности оболочки. В выражении (12) учтено также затухающее воздействие упругого основания на оболочку при удалении от ее поверхности. Выполнив интегрирование в выражениях (6), (10) по координате z , получим следующие выражения для потенциальной и кинетической энергий упругого основания:

$$U_f = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int_0^{1/r} \int_0^{2\pi} \left[\delta_{1f} w^2 + 2\delta_{3f} \frac{\partial w}{\partial \xi} w + \delta_{2f} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\theta d\xi; \quad (13)$$

$$V_f = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \sigma_o \int_0^{1/r} \int_0^{2\pi} \left[\delta_{1f}^* \sigma_{1f} \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} \right)^2 + 2\delta_{3f}^* \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} \frac{\partial w}{\partial \tau} + \delta_{2f}^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} \right)^2 \right] d\theta d\xi \quad (14)$$

$$(\delta_{1f} = (1-\mu^2)rE_f C_1^2 / 3Eh, \quad \delta_{1f} = (1-\mu^2)rE_f C_2^2 / 3Eh, \quad \delta_{1f} = (1-\mu^2)rE_f C_1 C_2 / 3Eh;$$

$$\delta_{1f}^* = \rho_f r C_1^2 / \rho_o h, \quad \delta_{1f}^* = \rho_f r C_2^2 / \rho_o h, \quad \delta_{1f}^* = \rho_f r C_1 C_2 / \rho_o h$$

$$\tau = t / T, \quad \sigma_o = (1-\mu^2)\rho_o r^2 / ET^2,$$

$T = t_2 - t_1$ – заданный промежуток времени, t_1, t_2 – фиксированные моменты времени).

Уравнения движения рассматриваемой упругой системы получим, исходя из принципа стационарности действия [1], согласно которому

$$\delta W = 0 \quad (W = \int_{t_1}^{t_2} (V - U)dt - \text{действие по Гамильтону}). \quad (15)$$

Подставив в (15) выражения (1) – (5), (7) – (9), (13), (14) с учетом (11) и принятых граничных условий, получим вариационное уравнение свободных колебаний оболочки. На основе независимости и произвольности вариаций перемещений точек срединной поверхности оболочки получена следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta} - \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} + \sum_{i=1}^{k_1} \delta(\theta - \theta_{1i}) \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{1i}) + \left(\delta_{11i} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \right. \\ & \left. - \delta_{21i} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} \right) d\theta - \sigma_0 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \sum_{i=1}^{k_1} \delta(\theta - \theta_{1i}) \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{1i}) \left(\delta_{11i}^* \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \delta_{21i}^* \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \tau^2} \right) d\theta + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{k_2} \delta(\xi - \xi_{2j}) \int_0^{l/r} \delta(\xi - \xi_{2j}) \delta_{12j}^* \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} d\xi \right] = 0 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + (1+a^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\mu}{2} (1+4a^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial \theta} + a^2 \left[(2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right] + \\ & + \sum_{j=1}^{k_2} \delta(\xi - \xi_{2j}) \int_0^{l/r} \delta(\xi - \xi_{2j}) \left(-\delta_{12j} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \delta_{12j} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \delta_{22j} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) d\xi - \\ & - \sigma_0 \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \sum_{i=1}^{k_1} \delta(\theta - \theta_{1i}) \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{1i}) \delta_{11i}^* \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} d\theta + \sum_{j=1}^{k_2} \delta(\xi - \xi_{2j}) \int_0^{l/r} \delta(\xi - \xi_{2j}) \times \right. \\ & \left. \times \left[\delta_{12j}^* \left(1 + \frac{h_{2j}}{r} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \delta_{22j}^* \left(1 + \frac{h_{2j}}{r} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial \tau^2} \right] d\xi \right\} = 0 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - a^2 \left[(2-\mu) \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right] - w - a^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^{k_1} \delta(\theta - \theta_{1i}) \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{1i}) \left(\delta_{21i} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - \eta_{1i} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} \right) d\theta + \sum_{j=1}^{k_2} \delta(\xi - \xi_{2j}) \int_0^{l/r} \delta(\xi - \xi_{2j}) \left[\delta_{12j} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. + \delta_{22j} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - \eta_{2j} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - 2(\eta_{12j} + \delta_{22j}) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - (\delta_{12j} + \eta_{12j}) w \right] d\xi - \delta_{1f} w + \delta_{2f} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \\ & - \sigma_0 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \sum_{i=1}^{k_1} \delta(\theta - \theta_{1i}) \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{1i}) \left(\delta_{21i}^* \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \tau^2} + \delta_{11i}^* \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \delta_{31i}^* \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} \right) d\theta + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{k_2} \delta(\xi - \xi_{2j}) \int_0^{l/r} \delta(\xi - \xi_{2j}) \left[\delta_{12j}^* \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \delta_{22j}^* \left(1 + \frac{h_{2j}}{r} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial \tau^2} - \delta_{32j}^* \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \tau^2} \right] d\xi + \right. \\ & \left. + \delta_{1f}^* \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \delta_{2f}^* \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} \right\} = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\left(a^2 = h^2 / (12r^2) \right), \quad \delta_{11i} = \frac{E_{1i} F_{1i} (1 - \mu^2)}{E h r}, \quad \delta_{21i} = \frac{h_{1i}}{r} \delta_{11i},$$

$$\begin{aligned}
\delta_{31i} &= \delta_{21i} \frac{h_{1i}}{r}, \quad \eta_{1i} = \delta_{31i} + \eta_{11i}, \\
\eta_{11i} &= \frac{E_{1i} I_{y1i} (1 - \mu^2)}{Ehr^3}, \quad \delta_{11i}^* = \frac{\rho_{1i}}{\rho_o} \frac{F_{1i}}{hr}, \quad \delta_{21i}^* = \frac{h_{1i}}{r} \delta_{11i}^*, \quad \delta_{31i}^* = \frac{h_{1i}}{r} \delta_{21i}^* \\
\delta_{12j} &= \frac{E_{2j} F_{2j} (1 - \mu^2)}{Ehr}, \quad \delta_{22j} = \frac{h_{2j}}{r} \delta_{12j}, \quad \delta_{32j} = \delta_{22j} \frac{h_{2j}}{r}, \quad \eta_{2j} = \delta_{32j} + \eta_{12j}, \\
\eta_{12j} &= \frac{E_{2j} I_{x2j} (1 - \mu^2)}{Ehr^3}, \quad \delta_{12j}^* = \frac{\rho_{2j}}{\rho_o} \frac{F_{2j}}{hr}, \quad \delta_{22j}^* = \frac{h_{2j}}{r} \delta_{12j}^*, \quad \delta_{32j}^* = \frac{h_{2j}}{r} \delta_{22j}^* \Big). \quad (17)
\end{aligned}$$

2. Методика решения задачи.

Представим перемещения точек срединной поверхности оболочки в виде двойных тригонометрических рядов по пространственным координатам, умноженных на гармоническую функцию времени, т.е.

$$\begin{aligned}
u &= \cos \bar{\omega} \tau \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N (u_{1mn}^1 \cos n\theta + u_{1mn}^2 \sin n\theta) \cos d_m \xi; \\
v &= \cos \bar{\omega} \tau \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N (u_{2mn}^1 \sin n\theta + u_{2mn}^2 \cos n\theta) \sin d_m \xi; \\
w &= \cos \bar{\omega} \tau \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N (u_{3mn}^1 \cos n\theta + u_{3mn}^2 \sin n\theta) \sin d_m \xi, \quad (18)
\end{aligned}$$

где $u_{1mn}^1, u_{1mn}^2, \dots, u_{3mn}^2$ – искомые коэффициенты форм собственных колебаний; $\bar{\omega} = \omega T$; $d_m = m\pi r / l$.

Подставив (18) в (16), выполнив дифференцирование и интегрирование по координатам ξ, θ , получим систему однородных алгебраических уравнений, из условия нетривиальности решения которой определяем частоты и формы собственных колебаний.

Данная система уравнений в случае неосесимметричного упругого основания является связанной однородной системой алгебраических уравнений порядка $p = 6 \times M \times N$. Если упругое основание осесимметричное, получаем две независимые системы уравнений порядка $p = 3 \times M \times N$ относительно искомых коэффициентов форм с верхним индексом 1 и с верхним индексом 2. Последние в силу регулярности продольных ребер, распадаются на системы уравнений еще меньшего порядка [2, 16], что облегчает вычислительный процесс.

3. Числовые результаты.

На основании изложенного подхода изучено влияние параметров упругого основания на низшие частоты и формы колебаний оболочки, подкрепленной шестнадцатью продольными и четырьмя кольцевыми ребрами. Плотность материала оболочки и ребер принята равной: $\rho_o = \rho_{1i} = \rho_{2j} = 8,23 \cdot 10^3$ кг/м³. Их модули упругости – $E = E_{1i} = E_{2j} = 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м²; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; толщина обшивки $h = 0,44 \cdot 10^{-3}$ м; длина образующей $l = 0,43$ м; радиус оболочки $r = 0,16$ м.

Продольные ребра, как и кольцевые, располагались на одинаковом расстоянии друг от друга и имели одинаковые размеры поперечного сечения

$$(F_{1i} = 3,40 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2; h_{1i} = 1,39 \cdot 10^{-3} \text{ м}; I_{1i} = 5,27 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4; \\ F_{2j} = 5,20 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2; h_{2j} = 1,89 \cdot 10^{-3} \text{ м}; I_{2j} = 18,38 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4).$$

Жесткость упругого основания и его положение по длине оболочки варьировались. При вычислениях в решении (18) удерживали члены ряда по продольной координате до $M = 21$, а по окружной координате – пять членов ряда (определяемые как в [2, 16]).

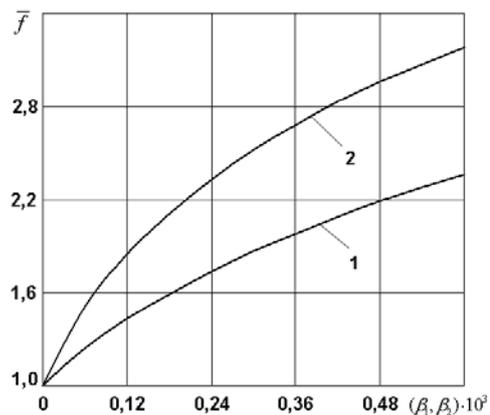


Рис. 1

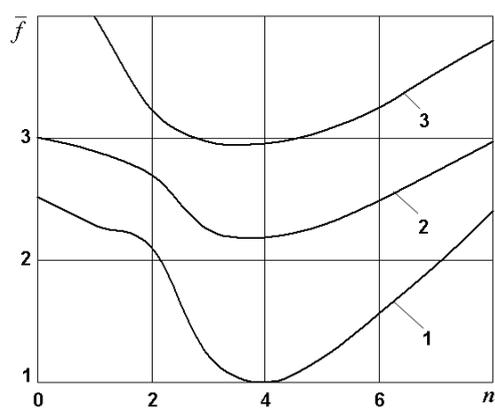


Рис. 2

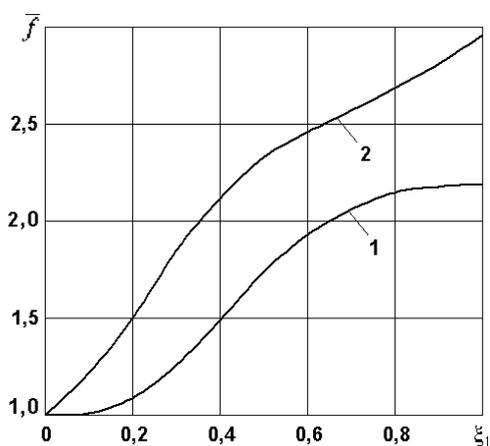


Рис. 3

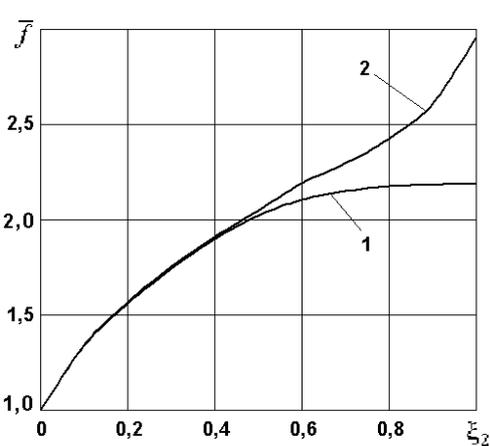


Рис. 4

Из числовых результатов следует, что увеличение жесткости упругого основания приводит (рис. 1) к возрастанию минимальной частоты собственных колебаний, где кривая 1 получена при $\beta_2 = 0$ (упругое основание типа Винклера – модель 1), кривая 2 – при $\beta_1 = 0,48 \cdot 10^{-3}$ (упругое основание типа Пастернака – модель 2). На рис. 1 и др. по оси ординат представлены значения относительных частот \bar{f} (отнесенных к минимальной собственной частоте оболочки без упругого основания). Зависимость нескольких низших частот от параметра n (число волн по окружности оболочки) приведены на рис. 2. Здесь, кривая 1 получена для оболочки без упругого основания, кривая 2 – упругое основание учитывается по модели 1 ($\beta_1 = 0,48 \cdot 10^{-3}$, $\beta_2 = 0$); кривая 3

– упругое основание учитывается по модели 2 ($\beta_1 = 0,48 \cdot 10^{-3}$; $\beta_2 = 0,48 \cdot 10^{-3}$). Анализ кривых показывает, что учет упругого основания по модели 2 наиболее сильно влияет на низшие частоты собственных колебаний оболочки.

На рис. 3, 4 показана зависимость минимальной частоты от места приложения упругого основания по длине оболочки. На рис. 3 параметром ξ_1 задано расстояние от торца оболочки до сечения, в котором упругое основание «обрывается», а на рис. 4 – ξ_2 – это ширина упругого основания, которое расположено от среднего сечения оболочки до ее торцов.

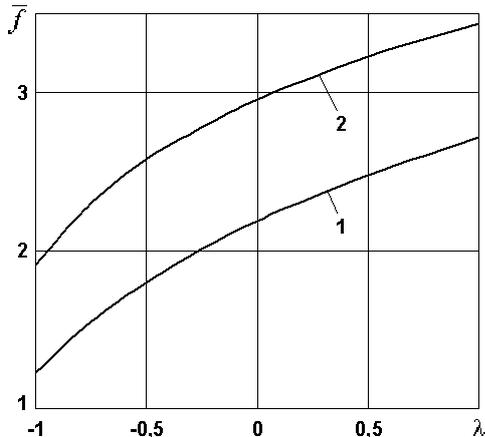


Рис. 5

Как видно из графиков, в случае, если упругое основание приложено у края оболочки (рис. 3), различие между значениями минимальных частот, полученных по модели 1 (кривая 1) и модели 2 (кривая 2), существенно отличаются при всех значениях ξ_1 . Если же упругое основание приложено в средней части оболочки (рис. 4), то при $\xi_2 \leq 0,5$ минимальные частоты, полученные по обеим моделям, примерно равны между собой, а далее при $\xi_2 > 0,5$ различие между ними возрастает.

Такой эффект обусловлен тем, что изгибные деформации в средней части оболочки, когда она колеблется по форме колебаний, соответствующей минимальной частоте, невелики.

На рис. 5 приведены результаты расчета для случая, когда жесткость упругого основания изменяется по длине оболочки по параболическому закону

$$\beta_1(\xi) = \beta_1 \cdot [1 + 4\lambda\xi(1 - \xi)], \quad \beta_2(\xi) = \beta_2 \cdot [1 + 4\lambda\xi(1 - \xi)],$$

где $\beta_1 = \beta_2 = 0,48 \cdot 10^{-3}$. Параметр λ варьируется от -1 до 1, при этом жесткость упругого основания в среднем сечении оболочки ($\xi = 0,5l/r$) возрастает от нуля до $0,96 \cdot 10^{-3}$.

Из графиков видно, что зависимости минимальной собственной частоты от параметра λ , полученные по первой и второй моделям упругого основания, имеют одинаковый характер.

Выводы.

В работе предложена методика решения задачи о собственных колебаниях ребристых цилиндрических оболочек, взаимодействующих с упругим основанием, приложенном как на всей длине оболочки, так и на ее части. Рассмотрен случай, когда жесткость упругого основания изменяется по длине оболочки по параболическому закону. Методика решения задачи реализована в виде вычислительного программного комплекса. Исследовано влияние параметров упругого основания на минимальную и низшие частоты собственных колебаний оболочки. Проведено сравнение результатов, полученных на основе модели упругого основания Винклера и модели Пастернака.

РЕЗЮМЕ. Викладено методику розв'язання задачі про власні коливання ребристих циліндричних оболонок, які взаємодіють з осесиметричною пружною основою, що розглядається за моделями Вінклера та Пастернака. На числових прикладах досліджено вплив жорсткості пружної основи та її положення по довжині оболонки на частоти власних коливань оболонки.

1. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А.* Теория ребристых оболочек.– К.: Наук.думка, 1980. –368 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.2).
2. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Ревуцкий В.Н., Скосаренко Ю.В. и др.* Колебания ребристых оболочек вращения. – К.: Наук. думка, 1988. – 172 с.
3. *Пастернак П.Л.* Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.: Госстройиздат, 1954. – 56 с.
4. *Bray F.M., Egle D.M.* An Experimental Investigation of the Free Vibration of Thin Cylindrical Shells with Discrete Longitudinal Stiffening // *J. Sound and Vibration.* – 1970. – **12**, N 2. – P. 153 – 164.
5. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya.* Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 2. – P. 123 – 193.
6. *Gulyaev V. I., Lugovoi P. Z., Zayets Yu. A.* Shielding of Elastic Nonstationary Waves by Interfaces // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 4. – P. 414 – 422.
7. *Harari A., Baron M. L.* Analysis for the Dynamic Response of Stiffened Shells // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1973. – **E40**, N 4. – P. 1085 – 1090.
8. *Jain R. K., Kirk C. L.* Axisymmetric Vibrations of Ring-Stiffened Shallow Spherical Shells // *Aeronaut. J.* – 1974. – **78**, N 757. – P. 32 – 36.
9. *Kubenko V. D., Yanchevskii I. V.* Vibrations of a Nonclosed Two – Layer Spherical Electroelastic Shell under Impulsive Electromechanical Loading // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 3. – P. 303 – 314.
10. *Lugovoi P. Z., Prokopenko N. Ya.* Influence of Reinforcement and Elastic Foundation on the Vibrations of Shallow Shells With Rectangular Planform // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 6. – P. 714 – 719.
11. *McDaniel T. J.* Dynamics of Non-Circular Stiffened Cylindrical Shells // *J. Sound and Vibration.* – 1972. – **23**, N 2. – P. 217 – 227.
12. *Rinehart S. A., Wang J. T. S.* Vibration of Simply Supported Cylindrical Shells with Longitudinal Stiffeners // *J. Sound and Vibration.* – 1972. – **24**, N 2. – P. 151 – 163.
13. *Paliwad D.N., Pandey Rajesh K.* The free vibrations of a cylindrical shell on an elastic foundation // *Trans. ASME. J. Vibr. and Acoust.* – 1998. – **120**, N1. – P. 63 – 71.
14. *Rosen A., Singer J.* Vibrations and Buckling of Eccentrically Loaded Stiffened Cylindrical Shells with Elastic Restraints // *Exp. Mech.* – 1976. – **16**, N 3. – P. 88 – 94.
15. *Rosen A., Singer J.* Vibrations and Buckling of Axially Loaded Stiffened Cylindrical Shells with Elastic Restraints // *Int. J. Solid and Struct.* – 1976. – **12**, N 8. – P. 577 – 588.
16. *Skosarenko Yu. V.* Stability of a Ribbed Cylindrical Shell Interacting with an Elastic Foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 5. – P. 556 – 561.
17. *Vasilenko A. T., Golub G. P.* Asymmetric Deformation of Orthotropic Shells of Revolution on a Nonlinear Elastic Foundation // *Int. Appl. Mech.* – 1995. – **31**, N 9. – P. 738 – 741.
18. *Wang J. T. S., Rinehart S. A.* Free Vibrations of Longitudinally Stiffened Cylindrical Shells // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1974. – **E41**, N 4. – P. 1087 – 1093.

Поступила 15.05.2012

Утверждена в печать 29.05.2014