

Н. А. Шульга, В. В. Левченко

О СОБСТВЕННЫХ ФОРМАХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН С ДИАМЕТРАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ ЭЛЕКТРОДОВ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: electr@inmex.kiev.ua*

Abstract. The general solution of a problem on the non-axisymmetric electromechanical vibrations of a piezoceramic ring plate is obtained. For the plates with the radial cuts of electrode covering and the boundary conditions «rigid clamping – free edge», «free-edge – rigid clamping», «free edge – free edge», the spectra of natural vibrations and modes of the first harmonics by circumferential coordinate are numerically determined and analyzed.

Key words: piezoceramic ring plate, radial cuts of electrode covering, non-axisymmetric electromechanical vibrations, spectra of natural vibrations.

Введение.

Тонкие пьезоэлектрические пластинчатые преобразователи с толщиной поляризацией используются в устройствах различного функционального назначения [2 – 4, 6 – 8, 10 – 12]. В дисковых и кольцевых вибраторах со сплошными электродами на лицевых плоскостях возбуждаются осесимметричные колебания [4, 9]. Если же электроды кольцевой пластины имеют диаметрально разрезы и электроупругие сектора возбуждены противофазно, то в ней имеют место неосесимметричные колебания по окружной координате. Формы этих колебаний по указанной координате априори определяются числом диаметральных разрезов электродов [2]. Систематические теоретические исследования частотного спектра, а также форм колебаний по радиальной координате, отсутствуют. Этим вопросам и посвящена настоящая статья.

1. Постановка и общее решение задачи.

Тонкую пьезоэлектрическую пластину толщиной h отнесем к цилиндрическим координатам r, θ, z , причем координатная плоскость $z = 0$ совпадает со срединной плоскостью пластины. Если тонкая пьезокерамическая пластина с толщиной поляризацией и электродированными лицевыми плоскостями $z = \pm h/2$ находится в условиях плоского напряженного состояния ($u_r(r, \theta, t)$, $u_\theta(r, \theta, t)$, $\sigma_{zz} = \sigma_{z\theta} = \sigma_{zr} = 0$, $E_r = E_\theta = 0$, $E_z(r, \theta, t)$), то из общих материальных соотношений [2, 5, 7, 10, 13] получим зависимости

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(r, \theta, t) s_{11}^E} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right]; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E} \left(\nu_E \frac{\partial u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - (1 + \nu_E) d_{31} E_z; \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{2(1 + \nu_E) s_{11}^E} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

в которых учтены формулы для деформаций и $s_{66}^E = 2(s_{11}^E - s_{12}^E)$, $\nu_E = -s_{12}^E/s_{11}^E$. Три уравнения механических колебаний при пренебрежении толщинным ускорением вырождаются в два:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Из формул (1), (2) после несложных преобразований получим уравнения колебаний в перемещениях

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1-\nu_E}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu_E}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} + \\ & + \frac{3-\nu_E}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - (1+\nu_E) d_{31} \frac{\partial E_z}{\partial r} = (1-\nu_E^2) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \\ & \frac{1+\nu_E}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{3-\nu_E}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1-\nu_E}{2} \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - (1+\nu_E) d_{31} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} = (1-\nu_E^2) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение системы (3) аналогично [3] представим в виде

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}; \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (4)$$

Если функции $\Phi(r, \theta, t)$, $\Psi(r, \theta, t)$ определить из волновых уравнений

$$\Delta \Phi - (1+\nu_E) d_{31} E_z = (1-\nu_E^2) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}; \quad \Delta \Psi = 2(1+\nu_E) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad (5)$$

то уравнения (3) будут удовлетворены.

Для пластины со сплошными электродами на лицевых плоскостях $z = \pm h/2$ электрический потенциал (при пренебрежении влиянием краев пластины) – $\varphi = h^{-1} z V_0(t)$. Такому потенциалу соответствуют согласно [2, 5, 6, 9] компоненты напряженности электрического поля $E_r = E_\theta = 0$, $E_z = h^{-1} V_0(t)$, а значит в уравнении (5), учитывая (3), следует пренебречь величиной $(1+\nu_E) d_{31} E_z$.

Из (1), (4) получим следующие выражения для механических напряжений через потенциалы Φ, Ψ в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1-\nu_E^2) s_{11}^E} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right) + \nu_E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right) - (1+\nu_E) d_{13} E_z \right]; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1-\nu_E^2) s_{11}^E} \left[\nu_E \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right) - (1+\nu_E) d_{13} E_z \right]; \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{2(1+\nu_E) s_{11}^E} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Для круглой пьезокерамической пластины радиуса r_1 с отверстием радиуса r_0 однородные граничные условия по механическим перемещениям и напряжениям (по два условия при $r = r_0$ и $r = r_1$) формируем по одному из двух альтернативных пар ($j = 0, 1$):

$$u_r(r_j, \theta, t) = 0 \wedge \sigma_{rr}(r_j, \theta, t) = 0; u_\theta(r_j, \theta, t) = 0 \wedge \sigma_{r\theta}(r_j, \theta, t) = 0. \quad (7)$$

Начальные условия при установившихся гармонических колебаниях не формулируем.

Рассмотрим круглую пьезокерамическую пластину $r_0 < r < r_1$, электродное покрытие которой на лицевых плоскостях $z = \pm h/2$ разбито на $2N$ секторов с противофазными соседними подключениями, так что $E_{za} = (-1)^{n-1} V_0/h$, $n = 1, \dots, 2N$. Решение уравнений (5) в полярных координатах r, θ , в первом из которых слагаемое $(1 + \nu)d_{31}E_z$ следует принять равным нулю [3], при гармонических колебаниях $f(r, \theta, t) = \text{Re } f^a(r, \theta) \exp i\omega t$ с циклической частотой ω выбираем в виде рядов

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, t) &= R^2 \text{Re} \sum_m \{A_{m,1} J_m(k_1 r) + A_{m,2} Y_m(k_1 r)\} \sin m\theta \exp i\omega t; \\ \Psi(r, \theta, t) &= R^2 \text{Re} \sum_m \{A_{m,3} J_m(k_2 r) + A_{m,4} Y_m(k_2 r)\} \cos m\theta \exp i\omega t. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $J_m(k_j r)$ и $Y_m(k_j r)$ – цилиндрические функции первого и второго рода m -го порядка [1]; $k_1^2 = (1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho \omega^2$, $k_2^2 = 2(1 + \nu_E) s_{11}^E \rho \omega^2$; $A_{m,i}$ – безразмерные постоянные.

Согласно (8), (4) и (6) определяем [5, 12, 13] механические перемещения

$$\begin{aligned} u_r &= R \text{Re} \sum_m [u_{m1}(k_1 r) A_{m,1} + u_{m2}(k_1 r) A_{m,2} - u_{m3}(k_2 r) A_{m,3} - u_{m4}(k_2 r) A_{m,4}] \sin m\theta \exp i\omega t; \\ u_\theta &= R \text{Re} \sum_m [l_{m3}(k_1 r) A_{m,1} + l_{m4}(k_1 r) A_{m,2} + l_{m1}(k_2 r) A_{m,3} + l_{m2}(k_2 r) A_{m,4}] \cos m\theta \exp i\omega t \end{aligned} \quad (9)$$

и механические напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta, t) &= -\text{Re} \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E} \left\{ \sum_m (a_{m1}(k_1 r) A_{m,1} + a_{m2}(k_1 r) A_{m,2} + a_{m3}(k_2 r) A_{m,3} + a_{m4}(k_2 r) A_{m,4}) + \right. \\ &\quad \left. + \sin m\theta + \frac{4}{\pi} V_0 (1 + \nu_E) d_{13} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin N(2n-1)\theta}{2n-1} \right\} \exp i\omega t; \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, t) &= -\text{Re} \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E} \left\{ \sum_m (b_{m1}(k_1 r) A_{m,1} + b_{m2}(k_1 r) A_{m,2} + b_{m3}(k_2 r) A_{m,3} + b_{m4}(k_2 r) A_{m,4}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin m\theta + \frac{4}{\pi} V_0 (1 + \nu_E) d_{13} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin N(2n-1)\theta}{2n-1} \right\} \exp i\omega t; \quad (10) \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta, t) &= \text{Re} \frac{1}{(1 + \nu_E^2) s_{11}^E} \sum_m (c_{m1}(k_1 r) A_{m,1} + c_{m2}(k_1 r) A_{m,2} + c_{m3}(k_2 r) A_{m,3} + \\ &\quad + c_{m4}(k_2 r) A_{m,4}) \cos m\theta \exp i\omega t. \end{aligned}$$

В формулах (9) и (10) использованы обозначения

$$\begin{aligned}
a_{m1}(k_1 r) &= \left[(1 - \nu_E) k_1 r J_{m-1}(k_1 r) + (k_1^2 r^2 - (1 - \nu_E) m(m+1)) J_m(k_1 r) \right] R^2 / r^2; \\
a_{m2}(k_1 r) &= \left[(1 - \nu_E) k_1 r Y_{m-1}(k_1 r) + (k_1^2 r^2 - (1 - \nu_E) m(m+1)) Y_m(k_1 r) \right]; \\
a_{m3}(k_2 r) &= (1 - \nu_E) m [k_2 r J_{m-1}(k_2 r) - (m+1) J_m(k_2 r)] R^2 / r^2 \\
a_{m4}(k_2 r) &= (1 - \nu_E) m [k_2 r Y_m(k_2 r) - (m+1) Y_m(k_2 r)] R^2 / r^2; \\
b_{m1}(k_1 r) &= \left[-(1 - \nu_E) k_1 r J_{m-1}(k_1 r) + (\nu_E k_1^2 r^2 + (1 - \nu_E) m(m+1)) J_m(k_1 r) \right] R^2 / r^2; \\
b_{m2}(k_1 r) &= \left[-(1 - \nu_E) k_1 r Y_{m-1}(k_1 r) + (\nu_E k_1^2 r^2 + (1 - \nu_E) m(m+1)) Y_m(k_1 r) \right] R^2 / r^2; \\
b_{m3}(k_2 r) &= -(1 - \nu_E) m [k_2 r J_{m-1}(k_2 r) - (m+1) J_m(k_2 r)] R^2 / r^2; \\
b_{m4}(k_2 r) &= -(1 - \nu_E) m [k_2 r Y_{m-1}(k_2 r) - (m+1) Y_m(k_2 r)] R^2 / r^2; \\
c_{m1}(k_1 r) &= m [k_1 r J_{m-1}(k_1 r) - (m+1) J_m(k_1 r)] R^2 / r^2; \\
c_{m2}(k_1 r) &= m [k_1 r Y_{m-1}(k_1 r) - (m+1) Y_m(k_1 r)] R^2 / r^2; \\
c_{m3}(k_2 r) &= \left[k_2 r J_{m-1}(k_2 r) + \left(\frac{1}{2} k_2^2 r^2 - m(m+1) \right) J_m(k_2 r) \right] R^2 / r^2; \\
c_{m4}(k_2 r) &= \left[k_2 r Y_{m-1}(k_2 r) + \left(\frac{1}{2} k_2^2 r^2 - m(m+1) \right) Y_m(k_2 r) \right] R^2 / r^2; \quad (11)
\end{aligned}$$

$$u_{m1}(k_1 r) = -m \frac{R}{r} J_m(k_1 r) + k_1 R J_{m-1}(k_1 r); \quad u_{m2}(k_1 r) = -m \frac{R}{r} Y_m(k_1 r) + k_1 R Y_{m-1}(k_1 r);$$

$$u_{m3}(k_2 r) = m \frac{R}{r} J_m(k_2 r); \quad u_{m4}(k_2 r) = m \frac{R}{r} Y_m(k_2 r);$$

$$l_{m1}(k_1 r) = u_{m3}(k_1 r); \quad l_{m2}(k_1 r) = u_{m2}(k_1 r); \quad l_{m3}(k_2 r) = -u_{m3}(k_2 r); \quad l_{m4}(k_2 r) = -u_{m2}(k_2 r).$$

Поскольку амплитуда $E_z^a = (-1)^{n-1} V_0 h^{-1}$, $n = 1, 2, \dots, 2N$, напряженность электрического поля $E_z = \text{Re} E_z^a \exp i \omega t$ раскладываем в ряд Фурье по угловой координате θ т. е.

$$E_z^a = -\frac{2V_0}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin N(2n-1)\theta}{2n-1}, \quad (12)$$

то в формулах (9) и (10) индекс $m = N(2n-1)$, $n = 1, 2, \dots$.

При резонансных колебаниях следует воспользоваться концепцией комплексных модулей [2, 4], согласно которой материальные постоянные будут комплексными величинами ($\tilde{s}_{ij}^E = s_{ij}^E - i s_{ij}^{E\text{Im}}$, $\tilde{d}_{ij} = d_{ij} - i d_{ij}^{\text{Im}}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^T - i \varepsilon_{ij}^{T\text{Im}}$).

При определении резонансных частот тангенсами малых углов потерь можно пренебречь и пользоваться действительными значениями физико-механических материальных параметров.

При $N = 0$ реализуются электроупругие радиальные колебания

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \quad (13)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right)$$

и азимутальные колебания

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}; \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{2(1 + \nu_E) s_{11}^E} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \quad (14)$$

Собственные частоты электроупругих радиальных колебаний (13) исследованы в статьях [11, 12]; азимутальные колебания (14), которые электрическим путем не возбуждаются, приведены с целью более полного анализа результатов.

При $N > 0$ частоты, которые зарождаются как радиальные (задача (13)) и азимутальные (задача (14)) будем условно называть соответственно квазирадиальными и квазиазимутальными частотами.

2. Количественные результаты и их сравнительный анализ.

Рассмотрим колебания кольцевой пластины при жестко защемленной внутренней границе $r = r_0$ и свободной внешней границе $r = r_1$ т. е.

$$u_r(r_0, \theta, t) = 0; \quad u_\theta(r_0, \theta, t) = 0; \quad \sigma_{rr}(r_1, \theta, t) = 0; \quad \sigma_{r\theta}(r_1, \theta, t) = 0, \quad (15)$$

Из граничных условий (15), используя выражения (9, 10) для перемещений и напряжений, получим блочные системы алгебраических уравнений для определения безразмерных постоянных $A_{N(2n-1),i}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} & u_{N(2n-1),1}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),1} + u_{N(2n-1),2}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),2} + \\ & + u_{N(2n-1),3}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),3} + u_{N(2n-1),4}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),4} = 0; \\ & l_{N(2n-1),1}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),1} + l_{N(2n-1),2}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),2} + \\ & + l_{N(2n-1),3}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),3} + l_{N(2n-1),4}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),4} = 0; \\ & a_{N(2n-1),1}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),1} + a_{N(2n-1),2}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),2} + \\ & + a_{N(2n-1),3}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),3} + a_{N(2n-1),4}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),4} = -\frac{4}{\pi} V_0 \frac{(1 + \nu_E) d_{13}}{2n-1}; \end{aligned}$$

$$c_{N(2n-1),1}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),1} + c_{N(2n-1),2}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),2} + \\ + c_{N(2n-1),3}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),3} + c_{N(2n-1),4}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),4} = 0. \quad (16)$$

Резонансные частоты определяем из условия равенства нулю определителей четвертого порядка однородных (при $V_0 = 0$) систем алгебраических уравнений (16). В соотношениях (16) и последующих азимутный индекс $m = N(2n-1)$, $n = 1, 2, \dots, N$ – число диаметральных разрезов электродного покрытия.

Результаты анализа частотных уравнений, получаемых из условия равенства нуля определителя системы уравнений (16), представлены, соответственно, в табл. 1, r и 1, a . В таблицах введены обозначения для безразмерных резонансных частот $\bar{\omega} = \sqrt{(1-\nu_E^2)s_{11}^E \rho \omega r_1}$. Исследования проведены при различных значениях N для первых мод колебаний (k – номер гармоники). В таблицах с индексом r в номере приведены значения квазирадиальных частот, а с индексом a – соответственно, квазиазимутальных. Такие же правила индексации номеров таблиц и графиков используются и ниже. Расчеты проведены при $r_0/r_1 = 0,4$ и $\rho = 7740 \text{ кг/м}^3$, $s_{11}^E = 15,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$, $s_{12}^E = -5,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$, $d_{31} = -125 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/Н}$, что соответствует пьезокерамике ЦТС-19 [6].

Таблица 1, a

| k | $N=0,$ $\bar{\omega}_{0,k}$ | $N=1,$ $\bar{\omega}_{1,k}$ | $N=2,$ $\bar{\omega}_{2,k}$ | $N=3,$ $\bar{\omega}_{3,k}$ |
|-----|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1 | 0,77405 | 1,2108 | 1,85491 | 2,31119 |
| 2 | 4,24997 | 4,61023 | 5,4193 | 6,40551 |
| 3 | 7,211044 | 8,24799 | 8,85883 | 9,53872 |
| 4 | 10,14251 | 10,15934 | 10,23068 | 10,43583 |
| 5 | 13,06489 | 13,04537 | 13,09362 | 13,22587 |
| 6 | 15,98328 | 16,01617 | 16,11943 | 16,30792 |
| 7 | 18,89954 | 18,97603 | 19,19561 | 19,54078 |

Таблица 1, r

| k | $N=0,$ $\bar{\omega}_{0,k}$ | $N=1,$ $\bar{\omega}_{1,k}$ | $N=2,$ $\bar{\omega}_{2,k}$ | $N=3,$ $\bar{\omega}_{3,k}$ |
|-----|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1 | 2,7658 | 2,70754 | 2,87211 | 3,50261 |
| 2 | 7,93913 | 7,05481 | 6,88761 | 6,87753 |
| 3 | 13,14434 | 13,28651 | 13,59398 | 14,02106 |
| 4 | 18,36553 | 18,37633 | 18,41591 | 18,49402 |
| 5 | 23,59297 | 23,65134 | 23,82034 | 24,08278 |
| 6 | 28,82342 | 28,86298 | 28,9791 | 29,16424 |
| 7 | 34,05554 | 34,10693 | 34,25091 | 33,47553 |

На рис. 1, a приведены формы для квазиазимутальных колебаний на частотах $\bar{\omega}_{0,5} = 13,06489$, $\bar{\omega}_{1,5} = 13,04537$, $\bar{\omega}_{2,5} = 13,09362$, $\bar{\omega}_{3,5} = 13,22587$, а на рис. 1, r квазирадиальных на частотах $\bar{\omega}_{0,3} = 13,14434$, $\bar{\omega}_{1,3} = 13,28651$, $\bar{\omega}_{2,3} = 13,59398$, $\bar{\omega}_{3,3} = 14,02106$. Частоты $\omega_{j,5}$ квазиазимутальных и $\omega_{j,3}$ квазирадиальных колебаний близки, поэтому этот случай был выбран для анализа особенностей форм колебаний. На рис. 1, r и 1, a , а также на последующих рисунках, приведены графические зави-

симости u_r (сплошные линии) и $u_{\theta r}$ (пунктирные линии) от $\bar{r} = r/r_1$ при различных значениях N ($N = 0, \dots, 3$).

В случае свободной внутренней границы $r = r_0$ и жестко заземленной внешней границы $r = r_1$ т.е.

$$\sigma_{rr}(r_0, \theta, t) = 0; \sigma_{r\theta}(r_0, \theta, t) = 0; u_r(r_1, \theta, t) = 0; u_{\theta}(r_1, \theta, t) = 0. \quad (17)$$

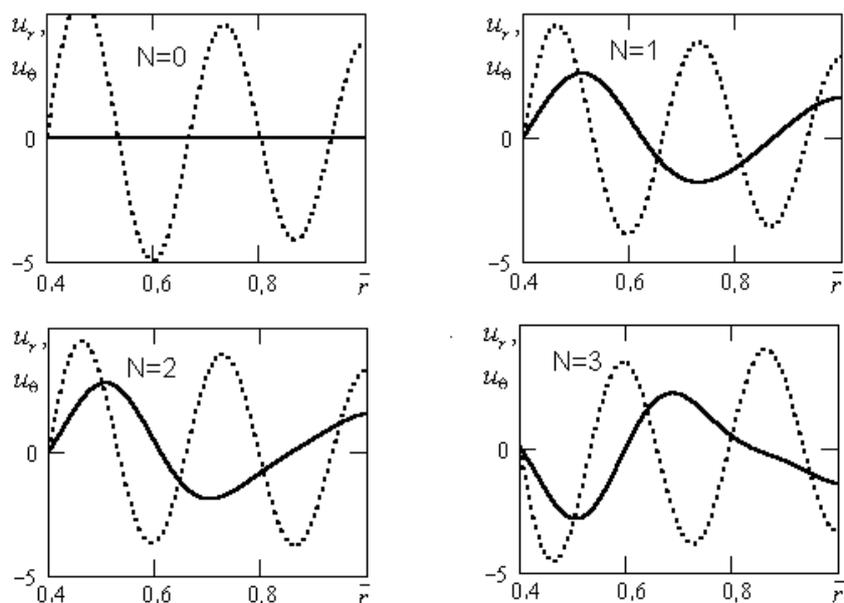


Рис. 1, а

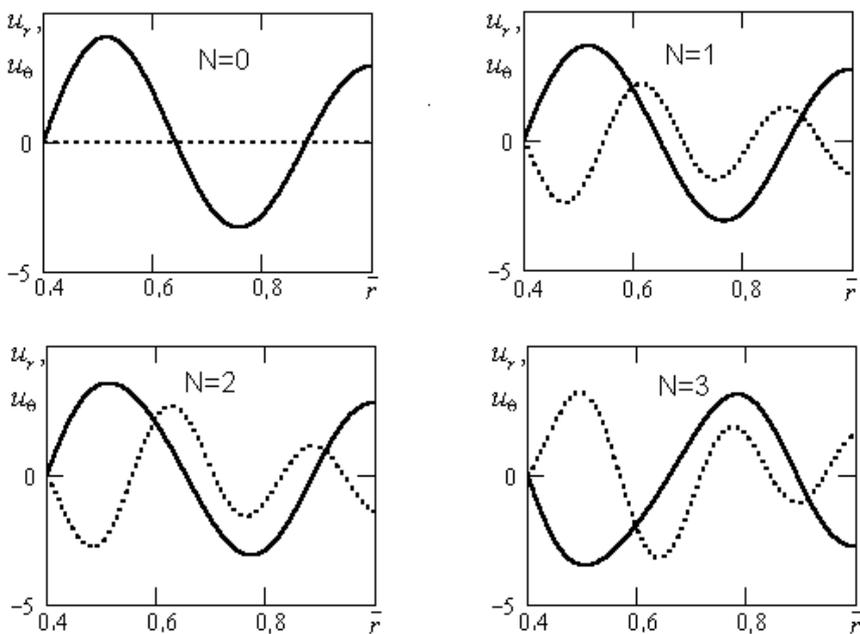


Рис. 1, р

Используя выражения для перемещений и напряжений (9), (10), получим такие системы алгебраических уравнений относительно постоянных $A_{N(2n-1),i}$, ($n = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned}
 & a_{N(2n-1),1}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),1} + a_{N(2n-1),2}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),2} + \\
 & + a_{N(2n-1),3}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),3} + a_{N(2n-1),4}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),4} = -\frac{4}{\pi} V_0 \frac{(1+\nu_E) d_{13}}{2n-1}; \\
 & c_{N(2n-1),1}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),1} + c_{N(2n-1),2}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),2} + \\
 & + c_{N(2n-1),3}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),3} + c_{N(2n-1),4}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),4} = 0; \\
 & u_{N(2n-1),1}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),1} + u_{N(2n-1),2}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),2} + \\
 & + u_{N(2n-1),3}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),3} + u_{N(2n-1),4}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),4} = 0; \\
 & l_{N(2n-1),1}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),1} + l_{N(2n-1),2}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),2} + \\
 & + l_{N(2n-1),3}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),3} + l_{N(2n-1),4}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),4} = 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Собственные частоты в этом случае определяем из условия равенства нулю определителей четвертого порядка однородных систем алгебраических уравнений (18). Результаты численного анализа приведены в таб. 2, r и таб. 2, a ,

Таблица 2, a

| k | $N = 0,$ $\bar{\omega}_{0,k}$ | $N = 1,$ $\bar{\omega}_{1,k}$ | $N = 2,$ $\bar{\omega}_{2,k}$ | $N = 3,$ $\bar{\omega}_{3,k}$ |
|-----|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1 | 2,31583 | 2,46586 | 2,70391 | 3,14207 |
| 2 | 4,81907 | 5,20747 | 6,05161 | 6,74316 |
| 3 | 7,56991 | 7,37752 | 7,27896 | 7,74701 |
| 4 | 10,40329 | 10,43448 | 10,56156 | 10,88514 |
| 5 | 13,26914 | 13,42252 | 13,72799 | 14,13504 |
| 6 | 16,15099 | 16,18638 | 16,29824 | 16,50383 |
| 7 | 19,04174 | 18,41827 | 18,46417 | 18,55208 |

Таблица 2, r

| k | $N = 0,$ $\bar{\omega}_{0,k}$ | $N = 1,$ $\bar{\omega}_{1,k}$ | $N = 2,$ $\bar{\omega}_{2,k}$ | $N = 3,$ $\bar{\omega}_{3,k}$ |
|-----|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1 | 3,20884 | 3,3252 | 3,93292 | 4,80765 |
| 2 | 8,043868 | 8,39152 | 8,97637 | 9,55813 |
| 3 | 13,20124 | 13,1704 | 13,22125 | 13,38097 |
| 4 | 18,40479 | 19,11545 | 19,32803 | 19,66145 |
| 5 | 23,62303 | 23,68015 | 23,84421 | 24,09559 |
| 6 | 28,84782 | 28,88754 | 29,00366 | 29,18763 |
| 7 | 34,07609 | 34,13 | 34,27815 | 34,49971 |

На рис 2, a приведены формы для квазиазимутальных колебаний на частотах $\bar{\omega}_{0,5} = 13,29614$, $\bar{\omega}_{1,5} = 13,42252$, $\bar{\omega}_{2,5} = 13,72799$, $\bar{\omega}_{3,5} = 14,13504$, а на рис. 2, r – квазирадиальных на частотах $\bar{\omega}_{0,3} = 13,20124$, $\bar{\omega}_{1,3} = 13,1704$, $\bar{\omega}_{2,3} = 13,22125$, $\bar{\omega}_{3,3} = 13,38097$.

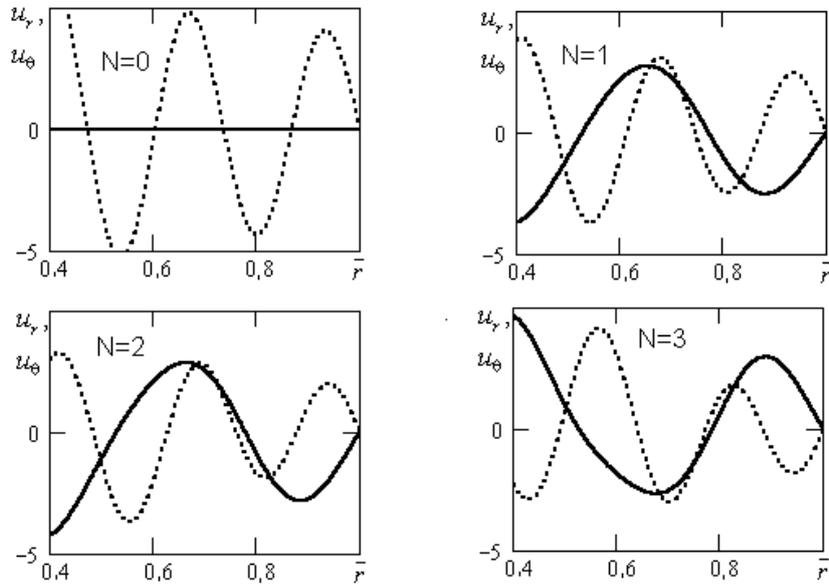


Рис. 2, а

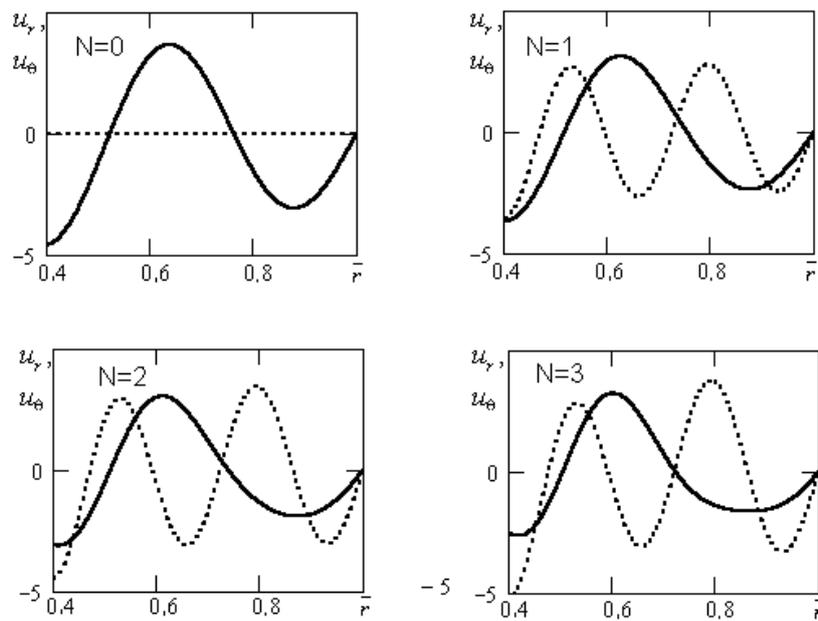


Рис. 2, r

Из условия существования нетривиальных решений однородных (при $V_0 = 0$) систем уравнений (18) получим зависимости для определения резонансных частот при граничных условиях (14).

При свободной внутренней границе $r = r_0$ и свободной внешней границе $r = r_1$ имеем

$$\sigma_{rr}(r_0, \theta, t) = 0; \quad \sigma_{r\theta}(r_0, \theta, t) = 0; \quad \sigma_{rr}(r_1, \theta, t) = 0; \quad \sigma_{r\theta}(r_1, \theta, t) = 0. \quad (19)$$

Из граничных условий (15), используя выражения (9, 10) для перемещений и напряжений, получены блочные системы алгебраических уравнений для определения безразмерных постоянных $A_{N(2n-1),i}$, ($n = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned}
 & a_{N(2n-1),1}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),1} + a_{N(2n-1),2}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),2} + \\
 & + a_{N(2n-1),3}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),3} + a_{N(2n-1),4}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),4} = -\frac{4}{\pi} V_0 \frac{(1 + \nu_E) d_{13}}{2n-1}; \\
 & c_{N(2n-1),1}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),1} + c_{N(2n-1),2}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),2} + \\
 & + c_{N(2n-1),3}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),3} + c_{N(2n-1),4}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),4} = 0; \\
 & a_{N(2n-1),1}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),1} + a_{N(2n-1),2}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),2} + \\
 & + a_{N(2n-1),3}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),3} + a_{N(2n-1),4}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),4} = -\frac{4}{\pi} V_0 \frac{(1 + \nu_E) d_{13}}{2n-1}; \\
 & c_{N(2n-1),1}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),1} + c_{N(2n-1),2}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),2} + \\
 & + c_{N(2n-1),3}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),3} + c_{N(2n-1),4}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),4} = 0.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Из условия существования нетривиальных решений однородных (при $V_0 = 0$) систем уравнений (20) получим зависимости для определения резонансных частот при граничных условиях (19).

Результаты анализа приведены в табл. 3, r и табл. 3, a ,

Таблица 3, a

| k | $N = 0,$ $\bar{\omega}_{0,k}$ | $N = 1,$ $\bar{\omega}_{1,k}$ | $N = 2,$ $\bar{\omega}_{2,k}$ | $N = 3,$ $\bar{\omega}_{3,k}$ |
|-----|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1 | 3,31746 | 3,85103 | 2,34721 | 3,18735 |
| 2 | 6,05804 | 6,53165 | 5,05288 | 6,17078 |
| 3 | 8,89634 | 8,82278 | 7,29402 | 7,983204 |
| 4 | 11,76887 | 11,81621 | 11,04868 | 11,42551 |
| 5 | 14,65643 | 14,68479 | 14,77914 | 14,96509 |
| 6 | 17,5518 | 17,59723 | 17,73907 | 17,99138 |
| 7 | 20,45171 | 20,42391 | 20,3894 | 20,39869 |

Таблица 3, r

| k | $N = 0,$ $\bar{\omega}_{0,k}$ | $N = 1,$ $\bar{\omega}_{1,k}$ | $N = 2,$ $\bar{\omega}_{2,k}$ | $N = 3,$ $\bar{\omega}_{3,k}$ |
|-----|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1 | 1,42346 | 1,6265 | 0,69281 | 1,54389 |
| 2 | 5,49151 | 5,20302 | 4,85053 | 4,97488 |
| 3 | 10,59329 | 10,72654 | 8,93175 | 9,28126 |
| 4 | 15,78762 | 15,85037 | 16,02459 | 16,2763 |
| 5 | 21,00334 | 21,10521 | 21,36017 | 21,7125 |
| 6 | 26,22731 | 26,21529 | 26,24087 | 26,30856 |
| 7 | 31,45534 | 31,47436 | 31,52862 | 31,61186 |

На рис. 3, *a* приведены формы для квазиазимутальных колебаний на частотах $\bar{\omega}_{0,5} = 14,65643$, $\bar{\omega}_{1,5} = 14,68479$, $\bar{\omega}_{2,5} = 14,77914$, $\bar{\omega}_{3,5} = 14,96509$, а на рис. 3, *r* квазирадиальных на частотах $\bar{\omega}_{0,3} = 10,59329$, $\bar{\omega}_{1,3} = 10,72654$, $\bar{\omega}_{2,3} = 8,93175$, $\bar{\omega}_{3,3} = 9,28126$.

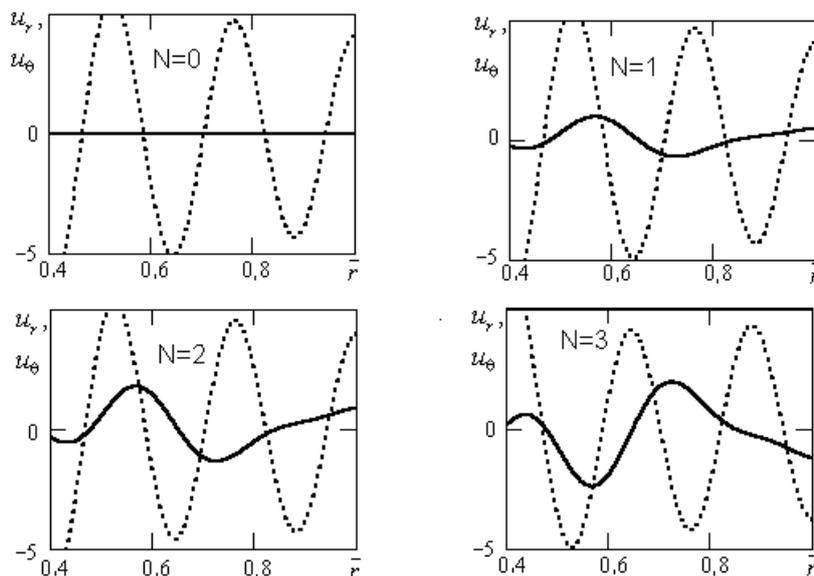


Рис 3, *a*

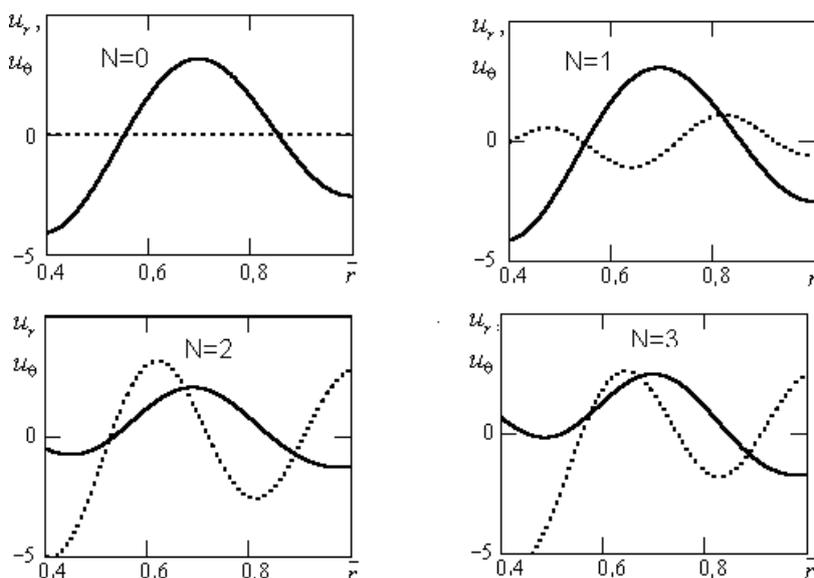


Рис. 3, *r*

Из граничных условий (15), (17), (19), формул (9), (10) для механических перемещений и напряжений и частотных уравнений, получаемых из систем (16), (18) и (20), следуют следующие общие свойства теоретического частотного спектра.

При колебаниях пластины с одним диаметральной разрезом ($N = 1$, два электрода) возникают резонансы на частотах $f_{1,k}$, $f_{3,k}$, $f_{5,k}$, ...; с двумя диаметральной

разрезами ($N = 2$, четыре электрода) – резонансы на частотах $f_{2,k}, f_{6,k}, f_{10,k}, \dots$; с тремя диаметрными разрезами ($N = 3$, шесть электродов) – резонансы на частотах $f_{3,k}, f_{9,k}, f_{15,k}, \dots$; с четырьмя диаметрными разрезами ($N = 4$, восемь электродов) – резонансы на частотах $f_{4,k}, f_{12,k}, f_{20,k}, \dots$; с пятью диаметрными разрезами ($N = 5$, десять электродов) – резонансы на частотах $f_{5,k}, f_{15,k}, f_{25,k}, \dots$; с шестью диаметрными разрезами ($N = 6$, двенадцать электродов) – резонансы на частотах $f_{6,k}, f_{18,k}, f_{30,k}, \dots$; с семью диаметрными разрезами ($N = 7$, четырнадцать электродов) – резонансы на частотах $f_{7,k}, f_{21,k}, f_{35,k}, \dots$; с восемью диаметрными разрезами ($N = 8$, шестнадцать электродов) – резонансы на частотах $f_{8,k}, f_{24,k}, f_{40,k}, \dots$. В принятой нумерации частот $f_{m,k}$ первый индекс отвечает номеру гармоники по азимутальному углу θ (номер формы по азимуту), а второй индекс k является порядковым номером корня соответствующего частотного уравнения.

Заключение.

Выполненные расчеты, частично приведенные в таблицах и на графиках, позволяют сделать следующие выводы.

С ростом числа разрезов электродного покрытия при закреплении одного из краев пластины значения квазирадиальных и квазиазимутальных частот колебаний, соответствующих малым k , сдвигаются в высокочастотную область, а при свободных внешних краях этот вывод не справедлив.

В колебаниях при граничных условиях (15) и (17) с ростом k отличие значений частот как квазирадиальных так и квазиазимутальных колебаний для одинаковых k и разных N стремится к нулю.

Сопоставляя результаты при разных значениях k и различных граничных условиях, можно сделать заключение, что при $k \leq 2$ отличие частот рассматриваемых колебаний, соответствующих разным N , может быть в разы, а с ростом значения k относительное отличие частот, соответствующее разным значениям N , уменьшается до долей процентов уже при $k \geq 6$ независимо от природы колебаний.

Для рассматриваемых диапазонов частот справедлив также вывод, что при закреплении одной из границ (граничные условия (15), (17)) между частотами ω_k и ω_{k+1} квазирадиальных колебаний расположены две частоты квазиазимутальных колебаний; в случае незакрепленных границ этот вывод справедлив, начиная с $k = 2$.

С ростом k одна из частот квазиазимутальных колебаний становится близкой частоте квазирадиальных, а формы колебаний качественно и количественно различны. Наиболее явно это прослеживается для частот $\omega_{j,5}$ и $\omega_{j,3}$, соответственно, квазиазимутальных и квазирадиальных колебаний.

Частоты квазиазимутальных колебаний при незакрепленных обеих границах выше соответствующих частот при закреплении одной из границ. Для квазирадиальных колебаний имеет место обратный эффект.

Приведенные графические зависимости позволяют заключить, что несмотря на близость соответствующих квазиазимутальных и квазирадиальных частот с ростом числа разрезов, формы колебаний становятся все более различными. При одинаковом числе разрезов количество нулей функций u_r совпадает для граничных условий (15) и (17). Этот вывод справедлив и для колебаний, описываемых функцией u_θ . Каждая квазирадиальная частота имеет близкую к ней по значению квазиазимутальную частоту и независимо от разных значения k количество узловых точек, отвечающих им колебаний, одинаково. Количество разрезов не влияет на число узловых точек

колебаний. Как правило рост значения N приводит к возрастанию частоты колебаний, причем для первых мод отличие частот существенно, а с возрастанием k становится незначительным.

РЕЗЮМЕ. Одержано загальний розв'язок задачі про неосесиметричні електромеханічні коливання п'єзокерамічної кільцевої пластини. Для пластин з радіальними розрізами електродного покриття при граничних умовах (жорстке закріплення – вільний край, вільний край – жорстке закріплення, вільний край – вільний край) чисельно визначено і проаналізовано спектри власних частот і форми коливань для перших гармонік по окружній координаті.

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
2. Шульга Н.А., Болжисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.
3. Шульга М.О. До теорії електромеханічних неосесиметричних коливань п'єзокерамічних пластин з товщиною поляризацією // Системні технології. – 2007. – Вип. 7. – С. 63 – 68.
4. Шульга М.О., Левченко В.В. До теорії неосесиметричних електропружних коливань п'єзокерамічних пластин // Доп. НАН України. – 2012. – № 6. – С. 61 – 68.
5. Dieulesant E., Royer D. On dea elastiques dans les solides. Application au raiment du signal. – Paris : Masson et C. – 1974. – 424 p.
6. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulha N.A. The mechanics of connected fields in structural elements. Vol. 5. Electroelasticity. – Kyiv: Naukova dumka, 1989. – 280 p. (In Russian).
7. Huang C.H., Ma C.C., Lin Y.C. Theoretical, numerical, and experimental investigation on resonant vibrations of piezoceramic annular disks // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2005. – 52, N 8. – P. 1204 – 1216.
8. Huang C.H. Resonant vibration investigations for piezoceramic disks and annuli by using the equivalent constant method // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2005. – 52, N 8. – P. 1217 – 1228.
9. Mason W.P. Piezoelectricity, its history and applications // J. Acoust. Soc. Am. – 1981. – 70, N 6. – P. 1561 – 1566.
10. Shul'ga N.A. Mixed Systems of Equations in Kirchhoff's Theory of the Transverse Vibrations of Plates // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 2. – P. 203 – 210.
11. Shul'ga N.A., Levchenko V.V., Mekievskii O.I. Nonaxisymmetric Electroelastic Vibrations of Piezoceramic of Ring Plates with Radial Cuts of Electrodes // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 4. – P. 438 – 446.
12. Shul'ga N.A., Levchenko V.V., Mekievskii O.I. Influence of Boundary Conditions on the Natural Frequencies of Nonaxisymmetric Electroelstic Vibrations of Piezoceramic Plates // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 5. – P. 592 – 601.
13. Tiersten H. F. Linear theory of piezoelectric plate vibrations. – NY.: Plenum Press, 1969. – 206 p.

Поступила 05.06.2012

Утверждена в печать 29.05.2014