Л.В.Мольченко[1], И.И.Лоос[2], Л.Н.Федорченко

О ВЛИЯНИИ СТОРОННЕГО ТОКА НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ С ОРТОТРОПНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬЮ

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко,
пр. Глушкова, 4-е, 03127, Киев, Украина;
e-mail: [1] Mol_lv@univ.kiev.ua, [2] Loiri@ univ.kiev.ua

Abstract. A nonlinear problem of magnetoelasticity is considered for the orthotropic ring plate with orthotropic electroconductivity. The describing the stress-strain state of flexible plates resolving system of nonlinear differential equations is obtained. A numerical example is considered, where the stress state of orthotropic ring plate is analyzed in dependence of the external current.

Key words: orthotropic ring plate, magnetic field, magnetoelasticity.

Введение.

Повышенный интерес к проблемам механики связанных полей, в первую очередь к электро- и магнитоупругости, обусловлен потребностями современного технического прогресса в различных отраслях промышленности и при разработке новых технологий. Однако, предметное раскрытие эффектов взаимодействия полей механических деформаций с электромагнитным полем в настоящее время изучено недостаточно. Это, в первую очередь, относится к исследованию таких эффектов в задачах деформирования тонкостенных элементов при больших перемещениях в сильном магнитном поле, а также в токонесущих тонкостенных элементах [4 – 6, 12, 13, 16, 17]. В результате взаимодействия сторонних и индуцированных токов, протекающих в магнитоупругих системах, и высоких магнитных полей возникают массовые силы электромагнитного происхождения, которые становятся причинами возникновения весьма больших и даже предельных механических напряжений в рассматриваемом упругом теле. Поэтому раскрытие эффектов связанности полей и определение напряженно-деформированного состояния для задач такого класса требуют привлечения нелинейной теории.

В теоретическом аспекте весьма сложны проблемы магнитоупругости тонких оболочек и пластин, изготовленных из реальных, т.е. из конечно-проводимых материалов. Отметим также, что в современной технике используются конструкционные материалы, которые в недеформированном состоянии уже анизотропные или, в частном случае, ортотропные.

Особый интерес вызывают задачи магнитоупругости при действии стороннего тока. В целом задачи, связанные с вопросом учета сторонних токов, достаточно сложны, однако они существенно упрощаются в случае тонких тел.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим ортотропную кольцевую пластину с учетом ортотропной электропроводности; ее срединная поверхность отнесена к полярной системе координат r, θ с переменной толщиной $h = h(r)$.

Предполагаем, что все искомые компоненты индуцированного электромагнитного поля и поля деформаций, которые входят в уравнения задачи магнитоупругости, не зависят от координаты θ .

Пренебрегая влиянием процессов поляризации и намагничивания, а также температурными напряжениями, примем, что к торцу пластины подводится переменный электрический ток от внешнего источника.

Упругие свойства материала пластины являются ортотропными, главные направления упругости которого совпадают с направлениями соответствующих координатных линий. Электромагнитные свойства материала характеризуются тензорами электрической проводимости σ_{ij}, магнитной проницаемости μ_{ij} и диэлектрической проницаемости ε_{ij} $(i, j = 1,\ 2,\ 3)$.

Анализ электромагнитных эффектов исследуем на основании системы уравнений Максвелла в лагранжевой форме совместно с определяющими уравнениями и уравнениями движения. Определяющие уравнения связывают между собой магнитную индукцию $\vec{B}$, электрическую индукцию $\vec{D}$, напряженность магнитного поля $\vec{H}$, электрического поля $\vec{E}$ и плотность электрического тока в теле $\vec{J}$. Связь между этими величинами в случае анизотропной электропроводности имеет вид

$$\vec{D} = \varepsilon_{ij}\vec{E}\ ; \quad \vec{B} = \mu_{ij}\vec{H}\ ; \quad \vec{J} = \sigma_{ij}\vec{E}\ . \tag{1}$$

Исходя из кристаллофизики [2, 3, 15], для рассматриваемого класса проводящих ортотропных тел с ромбической кристаллической структурой принимаем, что тензора σ_{ij}, μ_{ij}, ε_{ij} имеют диагональный вид.

Для рассматриваемой ортотропной пластины с учетом диагонального вида тензоров σ_{ij}, μ_{ij}, ε_{ij} и согласно работам [1, 7 – 11] после соответствующих преобразований получаем связанную систему нелинейных дифференциальных уравнений в лагранжевых координатах в нормальной форме в таком виде:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1-\nu_r\nu_\theta}{e_r h}N_r - \frac{\nu_\theta}{r}u - 0,5\vartheta_r^2\ ; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = -\vartheta_r\ ;$$

$$\frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} = \frac{12(1-\nu_r\nu_\theta)}{e_r h^3}M_r - \frac{\nu_\theta}{r}\vartheta_r\ ; \quad \frac{\partial N_r}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(\nu_\theta - 1\right)N_r + \frac{e_\theta h}{r^2}u - \left(P_r + \rho F_r^{\wedge}\right) + h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ;$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} = -\frac{1}{r}Q_r - \left(P_z + \rho F_\gamma^{\wedge}\right) + h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\ ; \tag{2}$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(\nu_\theta - 1\right)M_r + \frac{e_\theta h^3}{12 r^2}\vartheta_r + Q_r + N_r\vartheta_r\ ;$$

$$\frac{\partial B_\gamma}{\partial r} = -\sigma_2\mu\left[E_\theta + 0,5\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_r^+ + B_r^-\right) - \frac{\partial u}{\partial t}B_\gamma\right] + \frac{B_r^+ - B_r^-}{h}\ ; \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial r} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{1}{r}E_\theta\ ,$$

где для компонентов силы Лоренца имеем равенства

$$\rho F_r^{\wedge} = hJ_{\theta CT}B_\gamma + \sigma_1 h\left[E_\theta B_\gamma - \frac{\partial u}{\partial t}B_\gamma^2 + 0,5\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_s^+ + B_s^-\right)B_\gamma\right];$$

$$\rho F_\gamma^{\wedge} = -0,5hJ_{\theta CT}\left(B_s^+ + B_s^-\right) - \sigma_2 h\left[0,5E_\theta\left(B_s^+ + B_s^-\right) + \right. \tag{3}$$

$$\left. +0,25\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_s^+ + B_s^-\right)^2 + \frac{1}{12}\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_s^+ - B_s^-\right)^2 - 0,5\frac{\partial u}{\partial t}\left(B_s^+ + B_s^-\right)B_\gamma\right].$$

В равенствах (2), (3) принято: u, w – перемещения пластины; N_r – усилие; M_r – изгибающий момент; Q_r – поперечная сила; ϑ_r – угол поворота нормали; B_γ – нормальная составляющая вектора магнитной индукции; E_θ – тангенциальная составляющая напряженности электрического поля; $h = h(r)$ – толщина пластины; B_s^+, B_s^- – известные составляющие магнитной индукции на поверхности пластины, определяемые из решения внешней задачи электростатики; $J_{\theta CT}$ – тангенциальная составляющая плотности стороннего тока; ν_r, ν_θ – коэффициенты Пуассона; e_r, e_θ – модули Юнга.

Приведенные уравнения магнитоупругости отвечают геометрически нелинейной в квадратичном приближении теории тонких ортотропных кольцевых пластин переменной жесткости в радиальном направлении с учетом ортотропной электропроводности. Составляющие силы Лоренца (3) учитывают скорость деформирования пластины, внешнее магнитное поле, величину и напряженность тока проводимости относительно внешнего магнитного поля, учет влияния стороннего тока.

Разрешающая система уравнений (2) является нелинейной смешанной гиперболо-параболической системой восьмого порядка с переменными коэффициентами.

Для решения рассматриваемой задачи с использованием системы уравнений (2) необходимо задание граничных условий на контурах пластины. Краевые условия для функций, характеризующих механическую часть задачи, ставим так же, как и в теории пластин. Краевые условия для электромагнитных параметров могут быть заданы через компоненты электрического поля или через комбинацию компонент магнитного и электрического полей. При этом начальные условия задаем в классическом виде.

2. Методика решения нелинейной задачи.

Методика решения задачи магнитоупругости ортотропной кольцевой пластины переменной жесткости в радиальном направлении состоит в последовательном использовании схемы Ньюмарка, метода квазилинеаризации и метода дискретной ортогонализации [1, 7 – 11]. Для разделения переменных по временной координате применяем неявную конечноразностную схему Ньюмарка интегрирования уравнений магнитоупругости [14].

Следующий этап решения нелинейной краевой задачи магнитоупругости основан на применении метода квазилинеаризации, с помощью которого нелинейную краевую задачу сводим к последовательности линейных краевых задач. Далее каждую из линейных краевых задач последовательности на соответствующем временном интервале решаем численно с помощью устойчивого метода дискретной ортогонализации.

3. Числовой пример.

Исследуем напряженно-деформированное состояние ортотропной кольцевой пластины из бериллия внутреннего радиуса r_0, внешнего r_1, постоянной толщины $h = 3\cdot10^{-4}$м под воздействием нормальной составляющей механической нагрузки $P_\gamma = 500\sin\omega t$ н/м^2 (ω – круговая частота). Напряженное состояние ортотропной пластины определим в зависимости от воздействия тангенциальной составляющей стороннего тока $J_{\theta CT} = J_0 \sin\omega t$ А/м^2 с учетом ортотропной электропроводности.

Граничные условия примем в таком виде:

$$u = 0;\quad Q_r = -150;\quad M_s = 0;\quad B_\gamma = 0{,}1\sin\omega t \quad \text{при} \quad r = r_0;$$

$$u = w = 0;\quad M_s = 0;\quad B_\gamma = 0 \quad \text{при} \quad r = r_1.$$

Параметры оболочки и материала приняты следующие:

$r_0 = 0{,}5$м; $r_1 = 0{,}9$м; $h = 3\cdot10^{-4}$м; $\mu = 1{,}256\cdot10^{-6}$Гн/м; $e_s = 28{,}8\cdot10^{10}$Н/м^2;

$$e_\theta = 33{,}53\cdot 10^{10}\,\text{Н/м}^2;\;\; B_s^{\pm} = 0{,}5\text{Т};\;\; \nu_s = 0{,}262;\;\; \nu_\theta = 0{,}32;\;\; \rho = 2300\,\text{кг/м}^3;$$

$$\omega = 314{,}16\,\text{с}^{-1};\;\; \sigma_1 = 0{,}279\cdot 10^8\left(\text{Ом}\cdot\text{м}\right)^{-1};\;\; \sigma_2 = 0{,}321\cdot 10^8\left(\text{Ом}\cdot\text{м}\right)^{-1}.$$

Решение задачи получено на интервале времени $t = 1\cdot 10^{-2}\,\text{с}$, шаг интегрирования по времени $\Delta t = 1\cdot 10^{-3}\,\text{с}$.

Исследуем влияние стороннего тока на напряженно-деформированное состояние гибкой ортотропной кольцевой пластины. При решении краевой задачи магнитоупругости пластины необходимо задание начальной итерации. Она определяется из решения линейной задачи магнитоупругости (линейные уравнения движения пластины и линеаризованные уравнения Максвелла).

Величина стороннего тока и его направление выбраны следующим образом:

$$1)\; J_0 = 0;\;\; 2)\; J_0 = -5\cdot 10^5;\;\; 3)\; J_0 = -10\cdot 10^5;\;\; 4)\; J_0 = 5\cdot 10^5;\;\; 5)\; J_0 = 10\cdot 10^5\;\; \left(\text{А/м}^2\right). \quad (4)$$

На рис. 1 приведено распределение прогиба $w(r)$ при $t = 5\cdot 10^{-3}\,\text{с}$ в зависимости от тангенциальной составляющей стороннего тока $J_{\theta CT}$. Линии *1 – 5* соответствуют значениям стороннего тока (4).

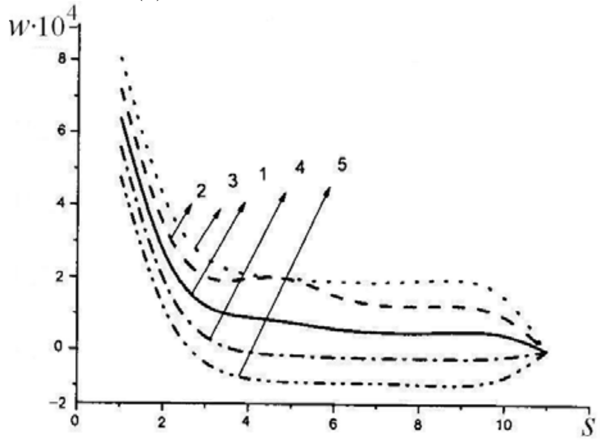

Рис. 1

Как видно из представленных результатов, прогиб зависит как от величины значений стороннего тока, так и от его направления. При отрицательном значении стороннего тока прогиб возрастает по сравнению с его отсутствием, при положительном – прогиб уменьшается. Это объясняется тем, что сила Лоренца, при наличии стороннего тока, состоит из двух частей, зависящих от индуцированного электромагнитного поля внешним магнитным полем и сторонним током. В одном случае эти части действуют в одном направлении, в другом – в противоположном.

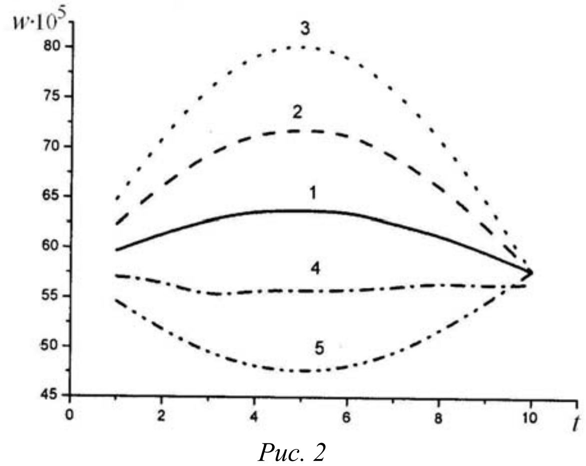

Рис. 2

На рис. 2 дано распределение прогиба $w(t)$ на внутреннем контуре пластины $r_0 = 0,5\,\text{м}$. Видим, что прогиб, как и на рис. 1, зависит от величины значений стороннего тока и его направления. При положительном значении стороннего тока прогиб уменьшается, а при отрицательном – увеличивается.

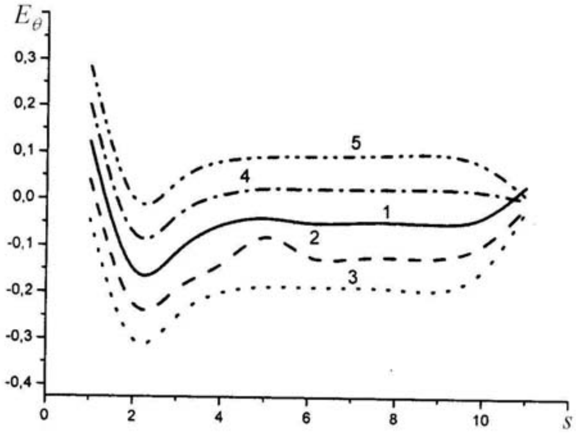

Рис. 3

На рис. 3 показано изменение тангенциальной составляющей электрического тока $E_\theta(r)$ В/м при $t = 5\cdot10^{-3}\,\text{c}$. Из результатов, представленных на рис. 3, следует, что напряженность электрического поля принимает в целом отрицательные значения при отрицательных значениях стороннего тока и положительные значения – при его положительных значениях. Заметим, что тангенциальное значение напряженности электрического тока пластины при действии на нее стороннего тока состоит из напряженности стороннего электрического тока и напряженности электрического тока от внешнего магнитного поля, т.е. для ортотропной пластины имеем

$$E_\theta = \frac{J_{\theta CT}}{\sigma_2} + \frac{J_\theta}{\sigma_2} + \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma - 0,5\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_r^+ + B_r^-\right).$$

Исходя из приведенных на рис. 3 результатов, можно судить о влиянии стороннего тока по сравнению с его отсутствием (линия *1* на графике) на напряженность электрического тока.

На рис. 4 представлено распределение тангенциальной составляющей напряженности электрического тока пластины $E_\theta(t)$ на ее внутреннем контуре $r_0 = 0,5$ м. Анализ напряженности электрического поля пластины в этом случае соответствует выводам рис. 3.

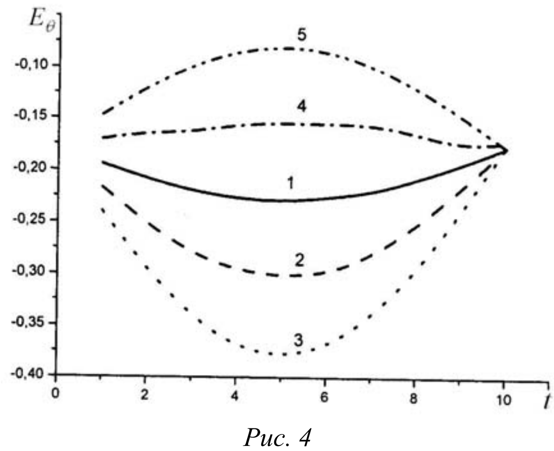

Рис. 4

Результаты, представленные на рис. 5, показывают распределение нормальной составляющей силы Лоренца $\rho F_{\gamma}^{\wedge}(t)$ Н/м^2 на внутреннем контуре пластины. Как видно из графиков, максимальные значения силы Лоренца по абсолютной величине имеют место при отрицательных значениях стороннего тока. Сравнивая с данными рис. 2, видим, что максимальный прогиб возникает именно при этих значениях стороннего тока.

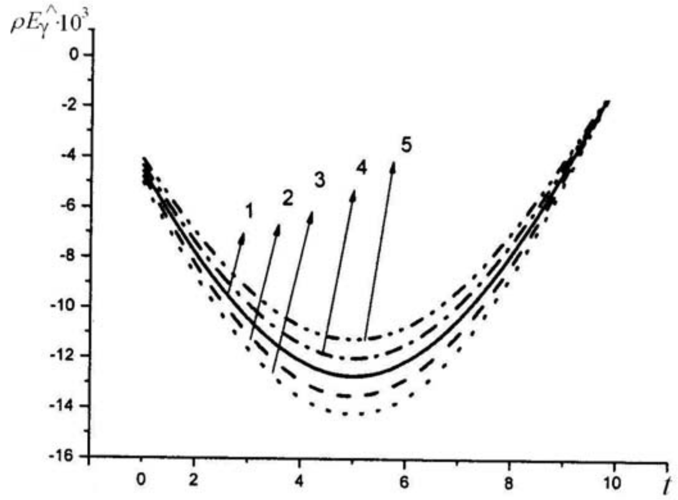

Рис. 5

Из полученных результатов также следует, что для рассмотренных значений стороннего тока его воздействие на напряженное состояние пластины преобладает над воздействием электрического тока от внешнего магнитного поля.

Заключение.

Дана постановка и получено решение задачи магнитоупругости ортотропной кольцевой пластины из бериллия с ортотропной электропроводностью при действии на нее стороннего тока в геометрически нелинейной постановке. Приведена разрешающая система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние гибкой ортотропной кольцевой пластины переменной жесткости в радиальном направлении с учетом ортотропной электропроводности. Рассмотрен числовой пример. Проведен анализ напряженного состояния гибкой кольцевой пластины в зависимости от воздействия стороннего тока.

Р Е З Ю М Е : Отримано розв'язок нелінійної задачі магнітопружності ортотропної кільцевої пластини з ортотропною електропровідністю. Наведено розв'язувальну систему нелінійних диференціальних рівнянь, яка описує напружено-деформований стан гнучких ортотропних кільцевих пластин. Розглянуто числовий приклад. Проведено аналіз напруженого стану гнучкої кільцевої пластини в залежності від стороннього струму.

1. *Григоренко Я.М., Мольченко Л.В.* Основы теории пластин и оболочек с элементами магнитоупругости. Учебник. – К.: ИПЦ «Киевский университет», 2010. – 403с. (укр.)
2. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. – М.: Наука, 1979. – 639 с.
3. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. – М.: Мир, 1967. – 385 с.
4. *Flugge W.* Stresses in shells. – Berlin: Springer-Verlag., 1973. – 525 p.
5. *Hussain M.A., Pu S.L.* Dynamic stress intensity factors for an unbounded plate having collinear cracks // Eng. Fract. Mech. – 1972. – **4**, N 4. – P. 865 – 876.

6. *Lippmann H.G.* Principle de la conservation de l'electricite // Ann. Chim. – 1976. – N 2. – P. 17 – 35.
7. *Mol'chenko L. V., Loos I. I., Plyas I.V.* Effect of the Tangential Components of Magnetic-Flux Density on the Stress State of a Flexible Circular Cylinder with Variable Stiffness // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 3. – P. 313 – 319.
8. *Mol'chenko L. V., Narol'skii M.V.* A Method to Solve Boundary-value Problems of Magnetoelasticity for Flexible Ring Plates of Variable Stiffness // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 5. – P. 567 – 572.
9. *Mol'chenko L. V., Loos I. I.* Influence of the Boundary Conditions on the Stress State of a Flexible Cylindrical Shell of Variable Stiffness in a Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 1. – P. 94 – 100.
10. *Mol'chenko L. V., Loos I. I., Fedorchenko L. M.* Axisymmetric Magnetoelastic Deformation of a Flexible Orthotropic Ring with Orthotropic Conductivity // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 3. – P. 322 – 327.
11. *Mol'chenko L. V., Loos I. I.* The Stress State of a Flexible Orthotropic Spherical Shell Subject to External Current and Mechanical Force in a Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 5. – P. 528 – 533.
12. *Moon F. C.* Magneto-solid mechanics. – N.-Y.: John Wiley & Sons Inc., 1984. – 448 p.
13. *Moon F. C., Chatto Padhyay S.* Magnetically induced stress waves in a conducting solid-theory and experiment // Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E. – 1974. – **41**, N 3. – P. 641 – 646.
14. *Newmark N.M.* A Method of Computation for Structural Dynamics // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. – 1959. – **85**, N 7. – P. 67 – 97.
15. *Nye J. F.* Physical properties of crystals. – Oxford: Clarendon Press, 1964. – 329 p.
16. *Pao Y.-H., Hutter K.* Electrodynamis for moving elastic solids and viscous fluids // Proc. IEEE. – 1975. – **63.** – N 7. – P. 1011–1021.
17. *Truesdeil C., Noll W.* The nonlinear field theorie // Handbuch der Physic, Ed. S. Flugge. – 1960. – **3/3**. – P. 1 – 602.

Поступила 18.09.2012 Утверждена в печать 29.05.2014