

А. Н. Гузь, А. П. Жук

**ДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ  
НА СФЕРИЧЕСКУЮ КАПЛЮ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, ул. П.Нестерова, 3,  
03057, Киев, Украина: e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** An action of the radiation force of acoustic field on the drop of ideal liquid, that is placed into the viscous liquid, is studied. The method is used, which is elaborated for the case of rigid particles. The formulas are obtained to calculate the value of radiation force and the direction of its action. In the case, when the external liquid is ideal, a dependence of the value and direction of action of radiation force on frequency, ratio of densities and adiabatic moduli of elasticity of the external liquid and drop liquid is studied numerically.

**Key words:** viscous liquid, ideal liquid, acoustic wave, plane wave, liquid drop, radiation force.

**Введение.**

Исследование движения и взаимодействия в жидкости твердых частиц, а также капель жидкости, находящихся в жидкости с другими свойствами, имеет как теоретическое, так и прикладное значение. Результаты некоторых таких исследований опубликованы в работах [2, 3, 15 и др.]. Следует отметить, что определенный технологический интерес представляет изучение движения капель под действием постоянного во времени радиационного давления, называемого также давлением звукового излучения. В лагранжевых координатах давление звукового излучения определяется как среднее во времени значение звукового давления на поверхность препятствия. Поэтому линейное приближение в случае гармонической волны при вычислении звукового давления оказывается недостаточным, так как в этом приближении звуковое давление является периодической функцией времени [16] и усредненное по времени за период волны равно нулю. В связи с этим при вычислении звукового давления в жидкости необходимо учитывать эффекты второго порядка, обусловленные отклонением профиля волны в окрестности препятствия от гармонического закона изменения во времени. Определение радиационной силы, обусловленной действующим на препятствие давлением акустического излучения, усложняется в случае препятствия конечных размеров. В этом случае необходимо учитывать дифракцию волны на препятствии. Следовательно, давление акустического излучения будет определяться звуковым полем, сформированным в результате интерференции первичной и дифрагированной волн, и, следовательно, будет зависеть от формы препятствия. Для определения отраженной от препятствия волны необходимо решить задачу о дифракции падающей волны на препятствии. В случае препятствия в виде газового пузырька возбуждаемые падающей волной колебательные процессы в пузырьке могут существенно влиять на характер рассеянной на пузырьке волны: при малом отличии частоты волны от частоты собственных колебаний газового пузырька эффективный поперечник рассеяния звука принимает значения, во много раз превосходящие диаметр пузырька [16]. В результате увеличивается вклад в величину радиационной силы волны, отраженной от препятствия. Аналогичный эффект имеет место и в случае препятствия в виде жидкой капли.

Задача вычисления радиационной силы, действующей в звуковом поле на твердую частицу, решена в несколько этапов [1, 10, 11]. На первом из них исследована задача дифракции первичной волны на препятствии. Поскольку определение звукового давления в жидкости с учетом величин второго порядка возможно в линейном приближении [1, 10, 11], при определении отраженной волны можно ограничиться решением линейной задачи дифракции первичной волны на препятствии. На втором этапе на основе результатов первого этапа решения задачи определена результирующая сила воздействия жидкости на препятствие. На третьем этапе осреднением последней по времени была отфильтрована постоянная во времени (радиационная) сила, действующая на препятствие. Разработанный для твердых частиц метод используем в случае жидкой сферической капли.

Различные вопросы, возникающие при исследовании радиационных сил, рассмотрены в работах [4 – 6, 12 – 14, 17 – 21 и др.]. В обзоре [11] детально, как это сделано, например, для других задач в [8, 9], обсуждены результаты исследований действия радиационной силы для случаев одиночных твердых частиц и систем таких частиц в идеальной и вязкой жидкостях. В [20] рассмотрен случай, когда препятствием является капля идеальной жидкости, находящаяся в идеальной жидкости с другими свойствами. В данной статье на основе указанного выше подхода рассмотрен случай, когда препятствием в вязкой жидкости является капля идеальной жидкости.

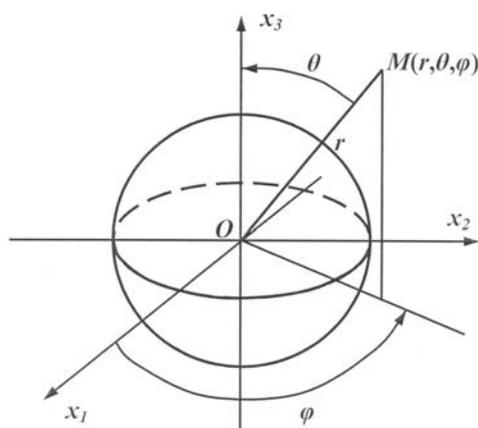


Рис. 1

в начале системы координат  $Ox_1x_2x_3$  (рис.1) и пусть в положительном направлении оси  $Ox_3$  распространяется плоская акустическая волна, потенциал скорости которой

$$\Phi_0 = A \exp[i(\kappa x_3 - \omega t)], \quad (1.1)$$

где  $A$  – амплитуда;  $\kappa$  – комплексное волновое число;  $\omega$  – угловая частота;  $t$  – время.

Наличие в вязкой жидкости капли жидкости с другими свойствами является причиной появления дополнительного (отраженного от капли) волнового поля, которое имеет потенциальную и вихревую компоненты. Первый этап предполагает для определения потенциалов скорости дополнительного волнового поля решение линейной задачи дифракции волны (1.1) на жидкой сфере. Введем сферическую систему координат  $r, \theta, \varphi$ , в которой угол  $\theta$  будем отсчитывать от оси  $Ox_3$ , и воспользуемся линеаризованной теорией течения сжимаемой вязкой жидкости [7]. Для осесимметричной задачи в соответствии с линеаризованной теорией потенциалы скорости потенциальной  $\Phi_d$  и вихревой  $\Psi_d$  компонент дополнительного волнового поля удовлетворяют уравнениям

### §1. Постановка и решение задачи дифракции.

Пусть в сжимаемой вязкой жидкости, заполняющей все пространство, находится капля идеальной жидкости, которую представляем жидкой сферой радиуса  $a$ . Предполагаем, что плотность вязкой жидкости  $\rho_0$  и  $a_0$  – скорость звука в ней, а  $\lambda'$ ,  $\mu'$  – соответственно динамический и второй коэффициенты вязкости. Идеальная жидкость капли имеет плотность  $\bar{\rho}_0$  и скорость звука  $\bar{a}_0$ . Здесь и в дальнейшем черта над символом указывает, что величина, обозначенная символом, относится к жидкой сфере. Пусть капля находится в

$$\left[ \left( 1 + \frac{\lambda' + 2\mu'}{\rho_0 a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi_d = 0; \quad (1.2)$$

$$\left( \nu' \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi_d = 0, \quad \nu' = \frac{\mu'}{\rho_0}, \quad (1.3)$$

где  $\nu'$  – кинематический коэффициент вязкости.

Потенциал скорости жидкости в капле  $\bar{\Phi}$  удовлетворяет уравнению (акустическое приближение)

$$\Delta \bar{\Phi} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.4)$$

Под действием падающей волны жидкая сфера испытывает периодические сжатия и разрежения. При формулировке граничных условий на поверхности сферы предполагаем, что амплитуда колебаний поверхности капли очень мала, поэтому можно принять радиус капли  $a = \text{const}$  (для жидкой сферы такое предположение оправдано). Также не будем учитывать влияние на сферу давления поверхностного натяжения. Тогда граничные условия на поверхности жидкой сферы можно сформулировать следующим образом. При переходе через поверхность жидкой сферы нормальные составляющие скорости жидкости и нормальные напряжения являются непрерывными величинами

$$v_r|_{r=a} = \bar{v}_r|_{r=a}; \quad (1.5)$$

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = \bar{p}|_{r=a}. \quad (1.6)$$

На поверхности сферической капли касательные напряжения равны нулю

$$\sigma_{r\theta}|_{r=a} = 0. \quad (1.7)$$

Потенциалы скоростей рассеянных волн удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности. Волновые возмущения жидкости внутри капли должны быть ограничены

$$\bar{\Phi} \rightarrow \text{const} \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Для осесимметрической задачи вектор скорости суммарного волнового поля в вязкой жидкости выражается через два скалярных потенциала [7]

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_r \Psi_d) \quad (\Phi = \Phi_0 + \Phi_d). \quad (1.8)$$

Тензор напряжений  $\sigma$  в вязкой жидкости равен [1, 7]

$$\sigma = (-p + \lambda' \nabla \cdot \mathbf{v}) \hat{E} + 2\mu' \hat{e}; \quad 2\hat{e} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T. \quad (1.9)$$

В (1.9) обозначено:  $\hat{E}$  – единичный тензор;  $\hat{e}$  – тензор скоростей деформации; давление  $p$  в вязкой жидкости при использовании линеаризированной теории равно [7]:

$$p = \rho_0 \left( \frac{\lambda' + 2\mu'}{\rho_0} \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi. \quad (1.10)$$

Для идеальной жидкости в капле давление  $\bar{p}$  и скорость  $\bar{\mathbf{v}}$  имеют следующий вид:

$$\bar{p} = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}; \quad \bar{\mathbf{v}} = \nabla \bar{\Phi}. \quad (1.11)$$

Определение потенциалов полей скорости во внешней вязкой жидкости  $\Phi_d$ ,  $\Psi_d$  и  $\bar{\Phi}$  в идеальной жидкости капли состоит в решении многосвязной задачи для уравнений (1.2) – (1.4) с граничными условиями (1.5) – (1.7), заданными на поверхности жидкой сферы, на бесконечности и в центре сферы. Потенциалы  $\Phi_d$ ,  $\Psi_d$  и  $\bar{\Phi}$  построим методом разделения переменных в сферической системе координат. В связи с этим множество решений определим в виде обобщенных рядов Фурье по сферическим волновым функциям

$$\Phi_d = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(\kappa r) P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t); \quad (1.12)$$

$$\Psi_d = \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_n^{(1)}(\beta r) P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t); \quad (1.13)$$

$$\bar{\Phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n j_n(\bar{k}r) P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t). \quad (1.14)$$

В (1.12) – (1.14) обозначено:  $\kappa = k + ik_1$ ;  $k = \omega/a_0$ ;  $k_1 = (\lambda' + \mu)\omega^2 / (2\rho_0 a_0^3)$  – коэффициент затухания;  $\beta = (i\omega/\nu')^{0,5}$ ;  $\bar{k} = \omega/\bar{a}_0$ ;  $h_n^{(1)}(z) = j_n(z) + iy_n(z)$ .

Выбор необходимого решения из множества решений (1.12) – (1.14) осуществляем путем удовлетворения граничным условиям (1.5) – (1.7). Укажем, решения (1.12) и (1.13) выбраны так, что удовлетворяют условиям излучения на бесконечности, а (1.14) – ограничены внутри жидкой сферы. Представим выражение (1.1) в сферической системе координат

$$\Phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A(2n+1) i^n j_n(\kappa r) P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t). \quad (1.15)$$

Проектируя выражение (1.8) на орт  $e_r$  и принимая во внимание соотношения (1.12), (1.13) и (1.15) при условии  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_d$ , получаем для компоненты  $v_r$  вектора скорости  $\mathbf{v}$

$$v_r = r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (A\beta_{1n} + A_n\beta_{2n} + B_n\beta_{3n}) P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t) \quad (1.16)$$

$$\left( \beta_{1n} = (2n+1) i^n [nj_n(\kappa r) - (\kappa r)j_{n+1}(\kappa r)]; \beta_{2n} = nh_n^{(1)}(\kappa r) - (\kappa r)h_{n+1}^{(1)}(\kappa r); \right. \\ \left. \beta_{3n} = n(n+1)h_n^{(1)}(\kappa r) \right). \quad (1.17)$$

Выражения для компонент  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{r\theta}$  тензора напряжений  $\hat{\sigma}$  получаем из (1.9), учитывая (1.8), (1.10), (1.12), (1.13) и (1.15):

$$\sigma_{rr} = \mathbf{e}_r \cdot \hat{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r = 2\mu' r^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (A\alpha_{1n} + A_n\alpha_{2n} + B_n\alpha_{3n}) P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t); \quad (1.18)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mathbf{e}_r \cdot \hat{\sigma} \cdot \mathbf{e}_\theta = 2\mu' r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (A\varepsilon_{1n} + A_n\varepsilon_{2n} + B_n\varepsilon_{3n}) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \exp(-i\omega t) \quad (1.19)$$

$$\left\{ \alpha_{1n} = (2n+1) i^n \left[ \left( n^2 - n - \frac{\beta^2 r^2}{2} \right) j_n(\kappa r) + 2(\kappa r) j_{n+1}(\kappa r) \right]; \right.$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{2n} &= \left( n^2 - n - \frac{\beta^2 r^2}{2} \right) h_n^{(1)}(\kappa r) + 2(\kappa r) h_{n+1}^{(1)}(\kappa r); \\
\alpha_{3n} &= n(n+1) \left[ (n-1) h_n^{(1)}(\beta r) - (\beta r) h_{n+1}^{(1)}(\beta r) \right]; \\
\varepsilon_{1n} &= (2n+1) i^n \left[ (n-1) j_n(\kappa r) - (\kappa r) j_{n+1}(\kappa r) \right]; \\
\varepsilon_{2n} &= (n-1) h_n^{(1)}(\kappa r) - (\kappa r) h_{n+1}^{(1)}(\kappa r); \\
\varepsilon_{3n} &= \left( n^2 - 1 - \frac{\beta^2 r^2}{2} \right) h_n^{(1)}(\beta r) + (\beta r) h_{n+1}^{(1)}(\beta r) \Big\}.
\end{aligned}$$

Аналогично из (1.11) с учетом (1.14) получаем для идеальной жидкости в капле

$$\bar{p} = i\omega\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n j_n(\bar{\kappa}r) P_n(\cos\theta) \exp(-i\omega t); \quad (1.20)$$

$$\bar{v}_r = \bar{k} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n j_n'(\bar{\kappa}r) P_n(\cos\theta) \exp(-i\omega t). \quad (1.21)$$

Принимая во внимание (1.16), (1.18) – (1.21), из граничных условий (1.5) – (1.7) при  $r = a$  получаем бесконечную систему алгебраических уравнений относительно  $A_n$ ,  $\bar{A}_n$  и  $B_n$ :

$$\alpha_{2n} A_n - \delta_{2n} \bar{A}_n + \alpha_{3n} B_n = -A\alpha_{1n}; \quad \beta_{2n} A_n - \delta_{1n} \bar{A}_n + \beta_{3n} B_n = -A\beta_{1n}; \quad (1.22)$$

$$\varepsilon_{2n} A_n + \varepsilon_{3n} B_n = -A\varepsilon_{1n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где  $\delta_{1n} = \bar{k} a j_n'(\bar{\kappa}a)$ ;  $\delta_{2n} = i\rho_0 \omega a^2 j_n(\bar{\kappa}a) / (2\mu')$ .

Для вычисления коэффициентов  $A_n$ ,  $\bar{A}_n$  и  $B_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) имеем бесконечную систему уравнений (1.22), для решения которой может быть применен метод редукции. В результате получаем

$$A_n = A \frac{\alpha_{1n} \delta_{1n} \varepsilon_{3n} + \delta_{2n} \beta_{3n} \varepsilon_{1n} - \varepsilon_{1n} \delta_{1n} \alpha_{3n} - \delta_{2n} \beta_{1n} \varepsilon_{3n}}{\alpha_{3n} \delta_{1n} \varepsilon_{2n} + \delta_{2n} \beta_{2n} \varepsilon_{3n} - \alpha_{2n} \delta_{1n} \varepsilon_{3n} - \delta_{2n} \beta_{3n} \varepsilon_{2n}}; \quad (1.23)$$

$$B_n = A \frac{\alpha_{2n} \delta_{1n} \varepsilon_{1n} + \delta_{2n} \beta_{1n} \varepsilon_{2n} - \alpha_{1n} \delta_{1n} \varepsilon_{2n} - \delta_{2n} \beta_{2n} \varepsilon_{1n}}{\alpha_{3n} \delta_{1n} \varepsilon_{2n} + \delta_{2n} \beta_{2n} \varepsilon_{3n} - \alpha_{2n} \delta_{1n} \varepsilon_{3n} - \delta_{2n} \beta_{3n} \varepsilon_{2n}}. \quad (1.24)$$

Вычислением коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  завершается определение потенциалов скорости  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_d$  (1.12) и  $\Psi_d$  (1.13), позволяющие вычислить тензор напряжений на поверхности жидкой сферы (1.9).

## §2. Определение гидродинамической и радиационной сил, действующих на жидкую сферу.

На втором и третьем этапе решения задачи рассматриваем случай жидкости малой вязкости. Для этого введем малый параметр

$$\varepsilon = \left( \nu' / (a^2 \omega) \right)^{1/2}, \quad (2.1)$$

учитывая который, получаем  $ka \approx ka + O(\varepsilon^2)$ ,  $\beta a = \exp(i\pi/4)/\varepsilon$  и в дальнейшем будем принимать  $ka \approx ka$ . Радиационную силу вычислим, осреднив по периоду первичной волны гидродинамическую силу

$$F_{x_3} = \iint_S \mathbf{e}_3 \cdot \hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds = 2\pi a^2 \int_0^\pi (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{\theta r} \sin \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.2)$$

действующую со стороны внешней вязкой жидкости на жидкую сферу вдоль оси  $Ox_3$ . В (2.2)  $\mathbf{n}$  – единичная нормаль к поверхности  $S$  жидкой сферы. На поверхности жидкой сферы компонента  $\sigma_{\theta r}$  тензора напряжений  $\hat{\sigma}$  равна нулю. При этом в выражении (1.9) давление  $p$  следует определять с точностью до слагаемых второго порядка из соотношения [1]

$$p = \rho_0 \left( \frac{\lambda' + 2\mu'}{\rho_0} \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \text{Re} \Phi + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{a_0^2} \left( \text{Re} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho_0 (\text{Re} \nabla \Phi)^2 - \frac{\lambda' + 2\mu'}{a_0^2} \text{Re} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \text{Re} \Delta \Phi. \quad (2.3)$$

В (2.3)  $\text{Re} \Phi$  указывает на действительную часть комплексной величины  $\Phi$ .

При осреднении по времени выражения (2.2) отличными от нуля будут только слагаемые второго порядка. Поэтому, принимая во внимание соотношения (1.9) и (2.3), представляем формулу (2.2) в следующем виде:

$$F_{x_3} = -2\pi a^2 \int_0^\pi p \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad (2.4)$$

сохранив в ней только слагаемые второго порядка. Для ее вычисления необходимо предварительно определить величины, входящие в выражение для  $p$ .

Обозначим комплексную величину  $A_n = A'_n + iA''_n$ . Тогда для потенциала скорости  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_d$ , учитывая (1.12) и (1.15), получаем

$$\text{Re} \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} (M_n \cos \omega t + N_n \sin \omega t) P_n(\cos \theta) \quad (2.5)$$

$$\left[ \begin{aligned} M_n &= (2n+1) A j_n(ka) \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) + A'_n j_n(ka) - A''_n y_n(ka); \\ N_n &= (2n+1) A j_n(ka) \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) + A'_n y_n(ka) + A''_n j_n(ka) \end{aligned} \right].$$

Дифференцируя (2.5) по времени, получаем равенство

$$\text{Re} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \omega \sum_{n=0}^{\infty} (N_n \cos \omega t - M_n \sin \omega t) P_n(\cos \theta). \quad (2.6)$$

В сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  для градиента потенциала скорости  $\Phi$  имеем

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta. \quad (2.7)$$

На поверхности сферической капли имеем

$$(\operatorname{Re} \nabla \Phi)^2 = \left( \operatorname{Re} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left( \operatorname{Re} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2. \quad (2.8)$$

Дифференцируя (2.5) по  $\theta$ , получаем равенство

$$\operatorname{Re} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = - \sum_{n=0}^{\infty} (M_n \cos \omega t + N_n \sin \omega t) P'_n(\cos \theta) \sin \theta. \quad (2.9)$$

Аналогично, дифференцируя (2.5) по  $r$ , записываем

$$\operatorname{Re} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = k \sum_{n=0}^{\infty} (K_n \cos \omega t + L_n \sin \omega t) P_n(\cos \theta) \quad (2.10)$$

$$\left[ \begin{aligned} K_n &= (2n+1) A j'_n(ka) \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) + A'_n j'_n(ka) - A''_n y'_n(ka); \\ L_n &= (2n+1) A j'_n(ka) \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) + A'_n y'_n(ka) + A''_n j'_n(ka) \end{aligned} \right].$$

Для определения  $\operatorname{Re} \Delta \Phi$  используем уравнение (1.2), решением которого является потенциал скорости  $\Phi$ . Следствием принятого предположения о малой вязкости является условие  $(\lambda' + 2\mu')\omega / (\rho_0 a_0^2) \ll 1$ . Учитывая его в (1.2), получаем

$$\operatorname{Re} \Delta \Phi = -k^2 \operatorname{Re} \Phi. \quad (2.11)$$

В дальнейшем для упрощения записи действительной части  $\operatorname{Re} \Phi$  потенциала скорости  $\Phi$  и его производных обозначение  $\operatorname{Re}$  будем опускать.

Заметим также, что при вычислении радиационной силы необходимо учитывать изменение положения колеблющейся жидкой сферы, так как его учет приводит к появлению в первом слагаемом (2.3) членов, имеющих такой же порядок, как и в остальных слагаемых. Это определяется тем, что в системе координат, связанной с движущейся жидкой сферой, частную производную  $\partial \Phi / \partial t$  необходимо вычислять по формуле

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt} - V_{x_3} \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + V_{x_3} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad (2.12)$$

в которой  $V_{x_3}$  – скорость движения вдоль оси  $Ox_3$  жидкой сферы как целого. Эту скорость определяем из (2.10) при условии  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi$ , т.е.

$$V_{x_3} = v_r(a, 0, t) = k \sum_{n=0}^{\infty} (K_n \cos \omega t + L_n \sin \omega t). \quad (2.13)$$

Далее вычислим вклад в гидродинамическую силу (2.4) первого слагаемого в выражении (2.3) для давления  $p$  в акустической волне. При этом, учитывая приведенное выше обоснование и принимая во внимание (2.12), будем использовать только вторую часть первого слагаемого. В результате получаем равенство

$$F_{x_3}^{(1)} = 2\pi \rho_0 a^2 V_{x_3} \int_0^\pi \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \theta + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sin \theta \right) \sin \theta \cos \theta d\theta. \quad (2.14)$$

В (2.14) опущено слагаемое с  $d\Phi/dt$ , которое при осреднении по времени равно нулю. Проинтегрировав выражение (2.14) при учете (2.9), (2.10), (2.13) и при условиях

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) \mu d\mu = \begin{cases} \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}, & m = n+1; \\ 0, & m \neq n+1; \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} \frac{dP_m(\mu)}{d\mu} \mu (1-\mu^2) d\mu = \begin{cases} \frac{2n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}, & m = n+1; \\ 0, & m \neq n+1; \end{cases} \quad \mu = \cos \theta, \quad (2.16)$$

получаем после осреднения по периоду первичной волны вклад первого слагаемого давления  $p$  в величину радиационной силы, т.е.

$$\begin{aligned} \langle F_{x_3}^{(1)} \rangle = & -2\pi\rho_0 (ka) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (ka) \left[ \frac{1}{3} (K_0 K_n + L_0 L_n) + \frac{2}{15} (K_2 K_n + L_2 L_n) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{4}{5} (M_2 K_n + N_2 L_n) \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Вклад второго слагаемого в выражении (2.3) для давления  $p$  в величину радиационной силы определим, осреднив по периоду первичной волны соотношение

$$F_{x_3}^{(2)} = -\pi\rho_0 \int_0^\pi \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2 \sin\theta \cos\theta d\theta. \quad (2.18)$$

Учитывая в выражении (2.18) соотношение (2.6) и принимая во внимание при его интегрировании условие (2.15), получаем (после осреднения по периоду первичной волны)

$$\langle F_{x_3}^{(2)} \rangle = -2\pi\rho_0 (ka)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} (M_n M_{n+1} + N_n N_{n+1}). \quad (2.19)$$

Вклад третьего слагаемого в выражении (2.3) для давления  $p$  в величину радиационной силы определим, осреднив по периоду первичной волны соотношение

$$F_{x_3}^{(3)} = \pi\rho_0 a^2 \int_0^\pi (\nabla\Phi)^2 \sin\theta \cos\theta d\theta. \quad (2.20)$$

Принимая во внимание (2.8) – (2.10) и условия (2.15), (2.16), после интегрирования (2.20) и осреднения по периоду первичной волны получаем формулу

$$\begin{aligned} \langle F_{x_3}^{(3)} \rangle = & 2\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \left[ (ka)^2 (K_n K_{n+1} + L_n L_{n+1}) + \right. \\ & \left. + n(n+2) (M_n M_{n+1} + N_n N_{n+1}) \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

В соответствии с принятым предположением о малой вязкости жидкости легко показать, что вклад четвертого слагаемого в выражении (2.3) для давления  $p$  имеет порядок  $\varepsilon^2$ , поэтому им пренебрегаем.

Суммируя (2.17), (2.19) и (2.21), получаем выражение для вычисления радиационной силы, действующей на сферическую каплю в вязкой жидкости,

$$\langle F_{x_3} \rangle = 2\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \left[ (ka)^2 (K_n K_{n+1} + L_n L_{n+1}) + (M_n M_{n+1} + N_n N_{n+1}) \right] \times \right.$$

$$\times \left( n(n+2) - (ka)^2 \right) - (ka)^2 \left[ \frac{1}{3}(K_0 K_n + L_0 L_n) + \frac{2}{15}(K_2 K_n + L_2 L_n) \right] + \frac{4}{5}(M_2 K_n + L_2 L_n) \}. \quad (2.22)$$

### §3. Случай внешней идеальной жидкости.

Выполним переход от вязкой жидкости, содержащей каплю идеальной жидкости, к случаю, когда и внешняя жидкость идеальна. В этом случае во всех полученных для вязкой жидкости соотношениях необходимо положить  $\lambda' = \mu' = 0$ . Предположим, что радиус жидкой сферы мал по сравнению с длиной волны. Тогда при вычислении коэффициентов  $A_n$  выражения (1.23) можно упростить, воспользовавшись асимптотическими представлениями функций  $j_n(ka)$ ,  $h_n^{(1)}(ka)$  и их производных при малых значениях  $ka$  [16]. Для определения первых трех коэффициентов  $A_n$  получим следующие выражения:

$$A_0 = i \frac{A}{3} k^* (ka)^3; \quad k^* = \frac{3(w - \bar{w})}{3\bar{w} - w(ka)^2} \quad (w = \rho_0 a_0^2; \quad \bar{w} = \bar{\rho}_0 \bar{a}_0^2); \quad (3.1)$$

$$A_1 = A \beta^* (ka)^3; \quad \beta^* = \frac{\rho_0 - \bar{\rho}_0}{2\bar{\rho}_0 + \rho_0}; \quad (3.2)$$

$$A_2 = i \frac{2A}{9} \rho^* (ka)^5; \quad \rho^* = \frac{\rho_0 - \bar{\rho}_0}{2\rho_0 + 3\bar{\rho}_0}. \quad (3.3)$$

Здесь величины  $w$  и  $\bar{w}$  обозначают адиабатические модули объемной упругости внешней жидкости и жидкости капли, соответственно. При принятых предположениях относительно размеров капли следует, что рассеянная на капле волна (1.12) определяется первыми членами ряда Фурье, имеющими коэффициенты (3.1) – (3.3). Нулевой член характеризует пульсационные колебания капли, а первый – осцилляционные.

Учитывая в (2.22) соотношения для  $K_n$ ,  $L_n$ ,  $M_n$ ,  $N_n$  и принимая во внимание выражения (3.1) – (3.3), получаем формулу для вычисления радиационной силы, действующей на сферическую каплю идеальной жидкости, что совпадает также и с [20],

$$\langle F_{x_3} \rangle = \frac{2}{27} A^2 \pi \rho_0 \frac{1}{2 + \eta} [k^*(\eta - 10) + 4(1 - \eta)] (ka)^6, \quad (3.4)$$

где  $\eta = \rho_0 / \bar{\rho}_0$  – отношение плотностей соответствующих жидкостей.

Укажем, что в случае твердой сферической частицы, находящейся в идеальной жидкости, действующая на нее в акустическом поле радиационная сила вычисляется по формуле [13]

$$\langle F_{x_3} \rangle = 2\pi \rho_0 A^2 \frac{1 + \frac{2}{9}(1 - \eta)^2}{(2 + \eta)^2} (ka)^6. \quad (3.5)$$

### §4. Численные результаты и их анализ.

В отличие от работы [20] выполним численное исследование действия радиационной силы на сферическую каплю идеальной жидкости, находящуюся в идеальной жидкости в поле акустической волны. Для этого использовано соотношение (3.4). Рассмотрено два случая: а) плотность жидкости капли меньше плотности окружающей жидкости ( $\eta > 1$ ); б) плотность жидкости капли больше плотности окружающей жидкости ( $\eta < 1$ ). В первом случае рассмотрена капля этилового спирта ( $\bar{\rho}_0 = 790 \text{ кг/м}^3$ ;  $\bar{a}_0 = 1180 \text{ м/с}$ ) в воде ( $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ;  $a_0 = 1500 \text{ м/с}$ ). Во втором случае – капля во-

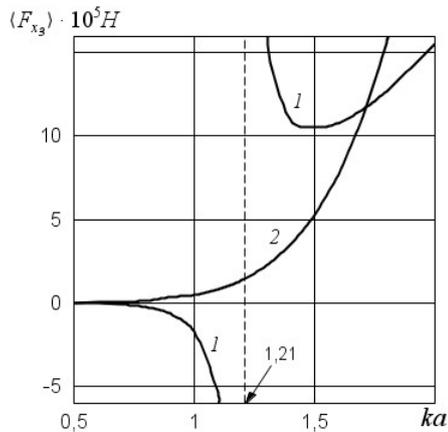


Рис. 2

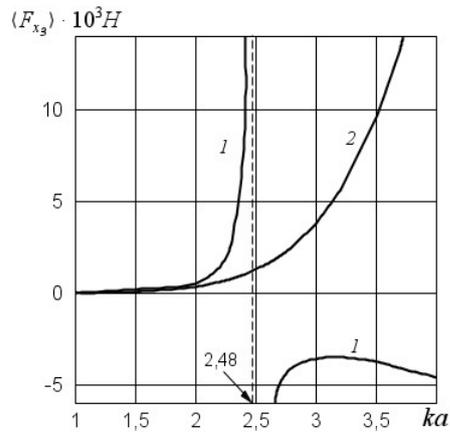


Рис. 3

ды в этиловом спирте. Плотность потока энергии в звуковой волне принималась равной  $175 \text{ Вт/м}^2$ . Графики зависимости от параметра  $ka$  величины радиационной силы, действующей на каплю, представлены на рис. 2 и 3 кривыми 1. Кривая 2 на этих рисунках соответствует случаю твердой сферической частицы. Радиационная сила, действующая на твердую частицу, вычислена по формуле (3.5). Укажем, что значение параметра  $ka = \sqrt{3\bar{w}/w}$  соответствует резонансу пульсационных колебаний жидкой сферической капли. Отметим при этом, что выражение для радиационной силы (3.4) получено при условии, что значение  $ka$  по величине отличается от  $\sqrt{3\bar{w}/w}$ . В этом случае в движении капли преобладают осцилляционные колебания [16].

При анализе поведения кривых на графиках можно отметить следующие явления качественного характера.

1. При переходе параметра  $ka$  через резонансное его значение для соответствующей капли направление действия радиационной силы на каплю меняется на противоположное (кривые 1 на рис. 2, 3).

2. Направление действия радиационной силы на каплю зависит от величины  $\eta = \rho_0/\bar{\rho}_0$ .

Укажем на характерные особенности действия радиационной силы на сферическую каплю.

1. При приближении значения параметра  $ka$  к резонансному значению пульсационных колебаний жидкой сферы ( $ka = 1,21$  в первом случае (рис.2) и  $ka = 2,48$  во втором случае (рис.3) радиационная сила возрастает (кривые 1 на рис. 2, 3).

2. В случае, когда механические свойства жидкости капли не отличаются от свойств окружающей жидкости ( $\eta = 1$ ,  $k^* = 0$ ), радиационная сила равна нулю.

3. В случае твердой сферической частицы направление действия радиационной силы (3.5) не зависит от величины  $\eta$  и совпадает с направлением распространения акустической волны (кривая 2 на рис. 2, 3). Ее значение монотонно возрастает при увеличении частоты волны.

#### Заключение.

Для исследования действия радиационной силы плоской акустической волны на жидкую сферу, находящуюся в жидкости с другими свойствами, использован подход, разработанный для случая твердых частиц. Получены аналитические соотношения для определения действия радиационной силы на сферическую каплю идеальной жидкости, расположенной и в вязком, и в идеальной жидкостях.

Проведено численное исследование действия радиационной силы в случае, когда окружающая каплю жидкость – идеальна. Установлены характерные особенности действия радиационной силы на каплю: зависимость ее величины и направления от частоты

и от отношения плотностей окружающей жидкости и жидкости капли; изменение величины радиационной силы в окрестности собственной частоты колебаний сферической капли. Проведено сравнение радиационных сил, действующих на жидкую сферическую каплю и на твердую сферическую частицу аналогичных радиуса и плотности.

Р Е З Ю М Е . Проведено дослідження дії радіаційної сили акустичного поля на сферичну краплю ідеальної рідини у в'язкій рідині. Одержано формули для обчислення величини радіаційної сили і напряму її дії. У випадку, коли зовнішня рідина ідеальна, чисельно досліджено залежність величини і напряму дії радіаційної сили від частоти, відношення густин та від адиабатичних модулів пружності зовнішньої рідини та рідини краплі.

1. Гузь А.Н., Жук А.П. О силах, действующих на сферическую частицу в звуковом поле в вязкой жидкости // Докл. АН СССР. – 1984. – **274**, № 6. – С. 1313 – 1316.
2. Зинченко А.З. К расчету гидродинамического взаимодействия капель при малых числах Рейнольдса // Прикл. математика и механика. – 1978. – **42**, №5. – С. 955 – 959.
3. Зинченко А.З. Медленное асимметричное движение двух капель в вязкой среде // Прикл. математика и механика. – 1980. – **44**, № 1. – С. 49 – 59.
4. Cai F., Meng L., Jiang C., Pan Y., Zheng H. Computation of the acoustic radiation force using the finite-difference time-domain method // J. Acoust. Soc. Am. – 2010. – **128**. – P. 1617 – 1622.
5. Danilov S.D., Mironov M.A. Mean force on a small sphere in a sound field in a viscous fluid // J. Acoust. Soc. Am. – 2000. – **107**. – P. 143 – 153.
6. Fisher K.A., Miles R. Modelling the acoustic radiation force in microfluidic chambers // J. Acoust. Soc. Am. – 2008. – **123**. – P. 1862 – 1862.
7. Guz A.N. Dynamics of Compressible Viscous Fluid. – Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 407 p.
8. Guz A.N. Stability of Elastic Bodies under Uniform Compression (Review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 3. – P. 241 – 293.
9. Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V., Menshikov V.A. Tree-Dimensional Problems in the Dynamics Fracture Mechanics of Materials with Interface Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 1. – P. 1 – 61.
10. Guz A.N., Zhuk A.P. On the hydrodynamic forces in an acoustic field in an viscous liquid // Proc. Acad. Sci. SSSR. – 1982. – **266**. – P. 32 – 35.
11. Guz A.N., Zhuk A.P. Motion of Solid Particles in a Liquid under the Action of an Acoustic Field: the Mechanism of Radiation Pressure // Int. Appl. Mech. – 2007. – **40**, N 3. – P. 245 – 265.
12. Guz A.N., Zhuk A.P. Dynamics of a rigid cylinder near a plane boundary in the radiation field of an acoustic wave // J. Fluids and Struct. – 2009. – **25**. – P. 1206 – 1212.
13. King L.V. On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres // Prog. Roy. Soc. Ser. A. – 1934. – **147**, N 861. – P. 212 – 240.
14. Marston P.L. Radiation force of a helicoidal Bessel beam on a sphere // J. Acoust. Soc. Am. – 2009. – **125**. – P. 3539 – 3547.
15. Ol'shanskii V.P., Ol'shanskii S.V. A Peculiar in the Vertical Motion of a Particle with Variable Mass in Upward Flow // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 2. – P. 188 – 194.
16. Rzhavkin S.N. A Course of Lectures on the Theory of Sound (Chaps. 1, 9). – New-York: Pergamon / Macmillan, 1963. – P. 7 – 17; 256 – 286.
17. Silva G.T. An expression for the radiation force exerted by an acoustic beam with arbitrary wave front (L) // J. Acoust. Soc. Am. – 2011. – **130**. – P. 3541 – 3544.
18. Wang J., Dual J. Two-dimensional numerical simulations for the time-averaged acoustic forces acting on a rigid particle of arbitrary shape in a standing wave (A) // J. Acoust. Soc. Am. – 2009. – **125**. – P. 2594 – 2594.
19. Wang J., Dual J. Theoretical and numerical calculations for the time-averaged acoustic force and torque acting on a rigid cylinder of arbitrary size in a low viscosity fluid // J. Acoust. Soc. Am. – 2011. – **129**. – P. 3490 – 3501.
20. Zhuk A.P. Effect of Acoustic Radiation on a Spherical Drop of Liquid // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 7. – P. 726 – 733.
21. Zhuk A.P., Kubenko V.D., Zhuk Ya.A. Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-field cavity // J. Acoust. Soc. Am. – 2012. – **132** (4). – P. 2189 – 2197.

Поступила 28.12.2012

Утверждена в печать 29.05.2014