

В. П. Голуб, В. С. Рагулина, П. В. Фернати

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЯДЕР НАСЛЕДСТВЕННОСТИ  
НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ  
ПРИ КРУЧЕНИИ**

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина; creer@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A method of determination of the heredity kernels parameters for nonlinear viscoelastic materials is experimentally approved in conditions of pure torsion. The nonlinear model of viscoelasticity is chosen as the Rabotnov type model. The heredity kernels parameters are determined using the approximation of discrete values of kernels found by condition of similarity. For small time values in the area of singularity, the discrete values are evaluated using the weight functions. As a heredity kernel, the Abel kernel, the combination of power and exponential functions as well as the fractional-exponential functions are chosen.

**Key words:** experiment, nonlinear viscoelasticity, isotropic materials, pure torsion, heredity kernels parameters, similarity function, discrete values of kernels, weight function.

**Введение.**

Параметры ядер наследственности линейных и нелинейных вязкоупругих материалов определяются, как правило, путем обработки экспериментальных данных на ползучесть образцов материала при растяжении постоянными напряжениями [6 – 8, 16]. В некоторых случаях в качестве базовых при определении параметров ядер наследственности используются данные испытаний на ползучесть при кручении под действием постоянных касательных напряжений [1, 3].

Основные трудности, возникающие при определении параметров ядер наследственности при кручении, связаны, как и при растяжении, с выбором наиболее адекватного варианта нелинейной модели вязкоупругости и с недостаточной точностью измерений в области малых длительностей испытаний, когда проявляются динамические эффекты [6, 7, 12].

В работе [2] предложен метод, позволяющий на основе нелинейной модели вязкоупругости типа модели Работнова обосновывать структуру ядер ползучести и определять параметры ядер по набору дискретных значений ядер. В области сингулярности при малых длительностях испытаний дискретные значения ядер ползучести учитываются с помощью весовых функций. В работах [4, 10, 11] метод апробирован экспериментально на задачах расчета деформаций ползучести и релаксации напряжений нелинейно-вязкоупругих материалов при растяжении.

В настоящей работе метод определения параметров ядер наследственности, изложенный в [2], апробируется экспериментально на задачах расчета деформаций ползучести и релаксации напряжений изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при кручении.

### §1. Постановка задачи. Объект исследования.

Рассматривается ползучесть и релаксация нелинейно-вязкоупругих материалов при чистом кручении. Определяющие уравнения модели, задающей зависимость между напряжениями деформациями и временем записываются в виде

$$\begin{aligned}\varphi_0(\gamma(t)) &= \tau(t) + \lambda_s \int_0^t K_s(t-\xi) \tau(\xi) d\xi; \\ \tau(t) &= \varphi_0(\gamma(t)) - \lambda_s \int_0^t R_s(t-\xi) \varphi_0(\gamma(\xi)) d\xi,\end{aligned}\quad (1.1)$$

где первое уравнение задает процесс ползучести, а второе – процесс релаксации. Здесь  $\gamma(t)$ ,  $\gamma(\xi)$  – полная сдвиговая деформация, включающая упругую компоненту  $\gamma_e$  и деформацию ползучести  $\gamma_c$  в моменты времени  $t$  и  $\xi$ ;  $\tau(t)$ ,  $\tau(\xi)$  – действующее напряжение в моменты времени  $t$  и  $\xi$ ;  $\varphi_0(\cdot)$  – функция, задающая диаграмму мгновенного деформирования;  $K_s(\cdot)$  – ядро сдвиговой ползучести;  $R_s(\cdot)$  – ядро сдвиговой релаксации;  $\lambda_s$  – реологический параметр;  $t$  – время наблюдения;  $\xi$  – время, предшествующее моменту наблюдения.

Задача заключается в выборе функций, задающих ядра наследственности, и определении параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов при чистом кручении. Решение строится на основе нелинейной модели вязкоупругости с независимой от времени нелинейностью типа модели Работнова [9, 15].

Между ядрами ползучести  $K_s(\cdot)$  и релаксации  $R_s(\cdot)$  существует интегральная связь

$$R_s(t) - K_s(t) = \lambda_s \int_0^t K_s(t-\xi) R_s(\xi) d\xi, \quad (1.2)$$

которая позволяет по значениям параметров ядер ползучести рассчитывать релаксацию напряжений и наоборот.

Задача определения параметров ядер сдвиговой наследственности в (1.1) сводится, таким образом, к определению параметров ядер сдвиговой ползучести  $K_s(\cdot)$ , которые определяются из условия минимизации функционала [2]

$$F(\lambda_s, q_s) = \sum_{j=1}^{n_s} \left\{ p_j(t) \left[ K_s(t_j) - \lambda_s K_s(t, q_s) \right] \right\}^2 + \sum_{j=n_*}^n \left[ K_s(t_j) - \lambda_s K_s(t, q_s) \right]^2, \quad (1.3)$$

где весовая функция  $p_j(t)$  задается соотношением

$$p_j(t) = \frac{1}{1 + \left| \frac{K_s(t_j) - \lambda_s K_s(t, q_s)}{K_s(t_*) - \lambda_s K_s(t_*, q_s)} \right|^m}, \quad (1.4)$$

причем  $p_j(t) \rightarrow 0$ , когда  $K_s(t, q_s) \rightarrow \infty$ , и  $p_j(t) \rightarrow 1$ , когда  $K_s(t_j) = \lambda_s K_s(t, q_s)$ . Здесь  $q_s$  – параметры ядра ползучести ( $s = 1, k$ );  $n$  – число дискретных значений ядер ползучести в интервале  $\{0, t_j\}$ ;  $n_*$  – число дискретных значений ядер ползучести в области  $\{0, t_*\}$ ;  $m$  – порядок моментов разностей ( $m = 2, 3, 4, 5, \dots$ ).

В качестве ядер сдвиговой наследственности в (1.3) рассматриваются ядро Абеля и его резольвента

$$K_s(t-\xi) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(t-\xi)^\alpha}; \quad R_s(t-\xi) = \frac{1}{(t-\xi)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_s)^n (t-\xi)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]}, \quad (1.5)$$

степенная функция и соответствующая резольвента

$$K_s(t-\xi) = \frac{1}{(t-\xi)^{1-\alpha}}; \quad R_s(t-\xi) = \frac{1}{t-\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda_s)^{n-1} [\Gamma(\alpha)]^n (t-\xi)^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (1.6)$$

комбинация степенной и экспоненциальной функций и соответствующая резольвента

$$K_s(t-\xi) = \frac{1}{e^{\beta(t-\xi)}(t-\xi)^{1-\alpha}}; \quad R_s(t-\xi) = \frac{1}{e^{\beta(t-\xi)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{1+n} [\lambda_s \Gamma(\alpha)]^n (t-\xi)^{\alpha n-1}}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (1.7)$$

а также дробно-экспоненциальная функция и её резольвента

$$K_s(t-\xi) = \frac{1}{(t-\xi)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\xi)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]}; \quad R_s(t-\xi) = \frac{1}{(t-\xi)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_s + \beta)^n (t-\xi)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]}, \quad (1.8)$$

где, как видно, параметры ядер ползучести и релаксации совпадают.

Дискретные значения  $K_s(t_j)$  ядер сдвиговой ползучести  $K_s(t, q_s)$  в (1.3) определяются по результатам обработки экспериментальных данных, исходя из условия подобия изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного деформирования. В качестве исходных экспериментальных данных используются заимствованные из литературы данные, полученные на сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцах из Polystyrene, Nylon 10001, полиэтилена высокой плотности ПЭВП и поликарбоната марки «Дифлон». Экспериментальные данные заимствованы из [1, 3, 13, 14].

Решение поставленной задачи включает обоснование нелинейности вязкоупругих свойств выбранных материалов и выбранной нелинейной модели вязкоупругости, дискретизацию ядер ползучести и выбор функций, задающей ядра ползучести, определение параметров ядер ползучести и экспериментальную апробацию на примере расчета деформаций сдвиговой ползучести и релаксации.

## §2. Обоснование нелинейности вязкоупругих свойств материалов и вида модели нелинейности.

Под нелинейностью вязкоупругих свойств материалов понимается нелинейность упругих свойств и нелинейность процесса ползучести. Области нелинейно-упругого и нелинейно-вязкоупругого деформирования, а также вид модели нелинейности определяются по результатам обработки экспериментальных данных на «мгновенное» деформирование и на ползучесть по методике, изложенной в [10].

2.1. *Определение области нелинейно-упругого деформирования.* Принимается, что материал ведет себя как нелинейно-упругий при напряжениях  $\tau$ , меньших некоторой критической величины  $\tau_*$ . Величина  $\tau_*$  соответствует точке на диаграмме мгновенного сдвига (рис. 1, а), для которой касательный модуль сдвига  $\bar{G}_*(\gamma_*)$  удовлетворяет соотношению [10]

$$\bar{G}_*(\gamma_*) = \frac{1}{2 \ln 2} G_0, \quad (2.1)$$

и определяется из уравнения

$$\tau_* = \varphi_0(\gamma_*) = a_{0,j} + a_{1,j}\gamma_* + a_{2,j}\gamma_*^2 + a_{3,j}\gamma_*^3. \quad (2.2)$$

Здесь  $G_0$  – начальный модуль сдвига;  $a_{k,j}$  – коэффициенты кубической сплайн-аппроксимации ( $k = \overline{1,3}$ ) диаграммы мгновенного сдвига  $\varphi_0(\cdot)$ .

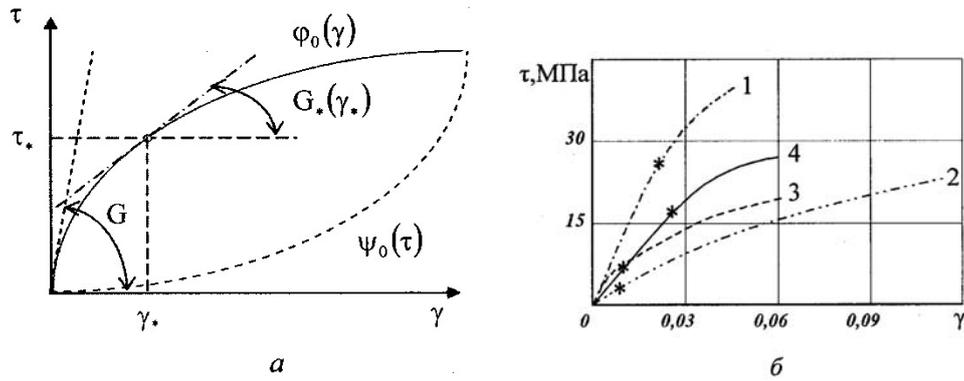


Рис. 1

На рис. 1, б линиями нанесена аппроксимация сглаживающими кубическими сплайнами диаграмм мгновенного сдвига для Polystyrene (1), Nylon 10001 (2), полиэтилена ПЭВП (3) и поликарбоната «Дифлон» (4). Звездочками отмечены комбинации напряжений и деформаций, соответствующих величинам  $\gamma_*$  и  $\tau_*$ .

В табл. 1 приведены для исследованных материалов значения начального модуля сдвига  $G_0$ , касательного модуля сдвига  $\bar{G}_*(\gamma_*)$ , значения коэффициентов  $a_{k,j}$  для  $j = 3$ , а также значения величин  $\gamma_*$  и  $\tau_*$ , рассчитанных согласно (2.1) и (2.2).

Таблица 1

Материал	$G_0$ , МПа	$\bar{G}_*$ , МПа	$a_{0,3}$ , МПа		$a_{1,3}$ , МПа		$a_{2,3}$ , МПа		$\gamma_*$	$\tau_*$ , МПа
			$b_{0,3}$	$b_{1,3}$	$b_{2,3}$	$b_{3,3}$				
Polystyrene, 25°C	1324,0	955,0	312404,70	-43916,90	2430,21	-9,36	0,020	24,3		
			$-4,4 \cdot 10^{-7}$	$1,11 \cdot 10^{-4}$	$-3,99 \cdot 10^{-3}$	$5,84 \cdot 10^{-2}$				
Nylon 10001, 25°C	344,2	248,3	5203,14	-1812,28	331,26	1,26	0,032	10,0		
			$-7,5 \cdot 10^{-6}$	$6,13 \cdot 10^{-4}$	$-7,93 \cdot 10^{-4}$	$6,22 \cdot 10^{-2}$				
Полиэтилен ПЭВП, 20°C	1002,4	723,1	-39,01	3,88	313,04	4,56	0,005	4,0		
			0,00	$2,02 \cdot 10^{-3}$	$4,13 \cdot 10^{-4}$	$1,78 \cdot 10^{-5}$				
Поликарбонат «Дифлон», 80°C	666,2	480,6	209546,00	-35016,00	2108,87	-18,26	0,022	14,5		
			$2,7 \cdot 10^{-5}$	$-1,60 \cdot 10^3$	$3,25 \cdot 10^{-2}$	$-2,06 \cdot 10^{-1}$				

2.2. *Обоснование нелинейности процесса ползучести.* Нелинейность процесса ползучести вязкоупругих материалов обосновывается исходя из нарушения условия однородности деформирования [3, 5, 10].

Считается, что материал является нелинейно-вязкоупругим, если функция ползучести  $J(t)$

$$J_1(t) = \frac{\gamma(t, \tau_1)}{\tau_1} \neq J_2(t) = \frac{\gamma(t, \tau_2)}{\tau_2} \neq \dots \neq J_m(t) = \frac{\gamma(t, \tau_m)}{\tau_m} \quad (2.3)$$

не инвариантна по отношению к уровню напряжений  $\tau_m$  ( $m = \overline{1, k}$ ), а расчетное значение квантиля статистики  $t_{\alpha, k}$

$$t_{\alpha,k} = \frac{\sqrt{n}}{S_j(t_j)} \delta \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m J_k(t_j) = \frac{\sqrt{n}}{S_j(t_j)} \delta \bar{J}(t_j) < t_{\alpha,k}^*, \quad j = \overline{1, \ell}, \quad (2.4)$$

меньше его критического табличного значения  $t_{\alpha,k}^*$ . Здесь  $J_k(t_j)$  – значение функции ползучести в момент времени  $t_j$  при напряжении  $\tau_k$ ;  $\bar{J}(t_j)$  выборочное среднее значение функции ползучести;  $S_j(t_j)$  – средне квадратичное отклонение величины  $\bar{J}(t_j)$ ;  $n$  – объем выборки (число функций ползучести);  $\delta$  – максимальная погрешность между значениями  $J_k(t_j)$  и  $\bar{J}(t_j)$ .

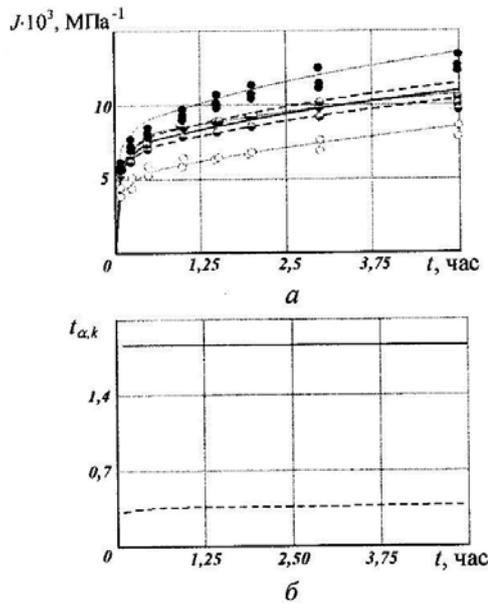


Рис. 2

Величина погрешности  $\delta$  в дальнейших расчетах задается равной  $\pm 5\%$ , а вероятность  $p$  попадания экспериментальных функций ползучести  $J_k(t_j)$  в интервал, ограниченный величиной  $\delta = \pm 5\%$ , по отношению к величине  $\bar{J}(t_j)$ , должна быть не меньше 90%.

На рис. 2, а в качестве примера, приведены построенные согласно (2.3) экспериментальные значения функций ползучести  $J_k(t_j)$  для полиэтилена ПЭВП при напряжениях  $\tau = 8,1$  (○); 11,5 (◐); 17,3 (●) МПа, а на рис. 2, б рассчитанные согласно (2.4) теоретические значения квантиля статистики  $t_{\alpha,k}$ . Экспериментальные данные нанесены точками, выборочное среднее значение функции ползучести  $\bar{J}(t_j)$  – тонкими сплошными линиями, границы интервала, задаваемого величиной  $\delta$ , и расчетные значения

квантиля статистики  $t_{\alpha,k}$  – тонкими штриховыми линиями, а табличные значения квантиля статистики  $t_{\alpha,k}^*$  – жирными сплошными линиями.

Из данных, приведенных на рис. 2, видно, что в интервал шириной  $2\delta\bar{J}(t_j)$  попадает весьма ограниченное (не более 3%) число функций ползучести  $J_k(t_j)$ , а расчетные значения квантиля статистики  $t_{\alpha,k}$  оказываются существенно меньше их критические значения  $t_{\alpha,k}^*$  независимо от длительности испытания. Эти данные свидетельствуют о том, что условия нелинейности (2.3) и (2.4) выполняются и полиэтилен ПЭВП является нелинейно-вязкоупругим практически при всех уровнях напряжений. Аналогичные оценки получены и для других рассмотренных материалов.

**2.3. Единая изохронная диаграмма деформирования.** Определяющие уравнения нелинейной модели вязкоупругости (1.1) отражают условие подобия изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного сдвига и соответственно существование единой изохронной диаграммы. Это позволяет нелинейность модели задавать нелинейностью диаграммы мгновенного сдвига независимо от времени.

Существование единой изохронной диаграммы деформирования может быть обосновано выполнением с заданной точностью процедуры приведения изохронных диаграмм ползучести  $\varphi_i(\gamma_i(t), t_j)$  к диаграмме мгновенного деформирования

$\varphi_0(\gamma(0), 0)$ . Приведенные дискретные значения  $\bar{\varphi}_i(\gamma_i(t), 0)$  функций  $\varphi_i(\gamma_i(t), t_j)$  определяются по соотношению

$$\bar{\varphi}_i(\gamma_i(t), 0) = (1 + G(t_j)) \cdot \varphi_i(\gamma_i(t), t_j) \quad (i = \overline{1, q}, j = \overline{1, l}), \quad (2.5)$$

где коэффициент пропорциональности

$$\frac{1}{1 + G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^q \{ \varphi_0(\gamma_i(0), 0) \cdot \varphi_i(\gamma_i(t), t_j) \}}{\sum_{i=1}^q \{ \varphi_i(\gamma_i(t), t_j) \}^2}$$

осредняет значения функций подобия  $(1 + G(t_j))$ , полученных для каждой  $j$ -й изохронной диаграммы ползучести. Изохронные диаграммы ползучести  $\varphi_i(\cdot)$  строятся по экспериментальным кривым ползучести « $\gamma_c - t$ », полученным для нескольких уровней постоянных касательных напряжений  $\tau$ .

Принято, что единая изохронная диаграмма деформирования обоснована с погрешностью  $\delta$ , если приведенные изохронные диаграммы ползучести не выходят за пределы интервала, ограниченного величиной  $\delta$  по отношению к диаграмме мгновенного деформирования. С достаточной для практических расчетов точностью величина  $\delta$  может быть принята равной  $\pm 5\%$ .

Экспериментальное обоснование единой изохронной диаграммы деформирования для выбранных вязкоупругих материалов при чистом кручении представлено на рис. 3 для Polystyrene (а) при  $\theta = 25^\circ\text{C}$  и значениях  $t_j = 5$  (○), 80 (◐), 190 (◑), 300 (●) часов и для полиэтилена ПЭВП (б) при  $\theta = 20^\circ\text{C}$  и значениях  $t_j = 300$  (○), 600 (◐), 900 (◑), 1000 (●). Диаграмма мгновенного сдвига  $\varphi_0(\gamma)$  показана сплошной линией, изохронные диаграммы ползучести  $\varphi_i(\gamma_i(t), t_j)$  – штрихпунктирными линиями, дискретные значения, приведенных согласно (2.5) изохронных диаграмм ползучести  $\bar{\varphi}_i(\gamma_i(t), 0)$ , нанесены точками, а штриховыми линиями нанесены границы интервала, задаваемого величиной  $\delta = \pm 5\%$ , по отношению к диаграмме  $\varphi_0(\gamma)$ .

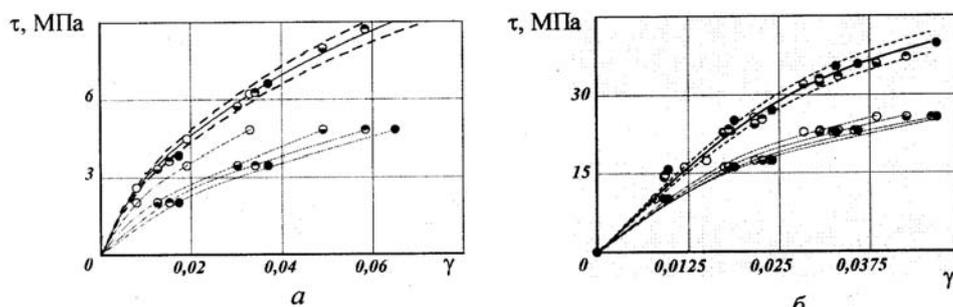


Рис. 3

В целом, как видно, гипотеза единой изохронной диаграммы деформирования для рассмотренных материалов подтверждается. Практически все значения приведенных изохронных диаграмм ползучести (точки) не выходят за пределы 5%-ного интервала относительно диаграммы сдвига  $\varphi_0(\gamma)$ . Аналогичные результаты получены для Nylon 10001 и поликарбоната «Дифлон».

### §3. Определение параметров ядер наследственности.

Параметры ядер ползучести и релаксации в (1.1) определяются, как уже отмечалось, исходя из условия подобия изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного сдвига. Методика определения параметров ядер включает построение осредненной функции подобия, расчет дискретных значений ядер ползучести по функции подобия и определение параметров ядер по результатам аппроксимации дискретных значений ядер соответствующим аналитическим выражением.

3.1. *Построение осредненной функции подобия.* Осредненная функция подобия  $(\overline{1+G(t_j)})$  в (2.5) строится по результатам аппроксимации дискретных значений функции подобия  $(1+G(t_j))$ . Дискретные значения  $(1+G(t_j))$  осредненной функции подобия  $(\overline{1+G(t_j)})$ , рассчитанные согласно (2.5), нанесены на рис. 4, а точками для полиэтилена ПЭВП (○) и для поликарбоната «Дифлон» (●), а на рис. 4, б – для Polystyrene (○) и для Nylon 10001 (●).

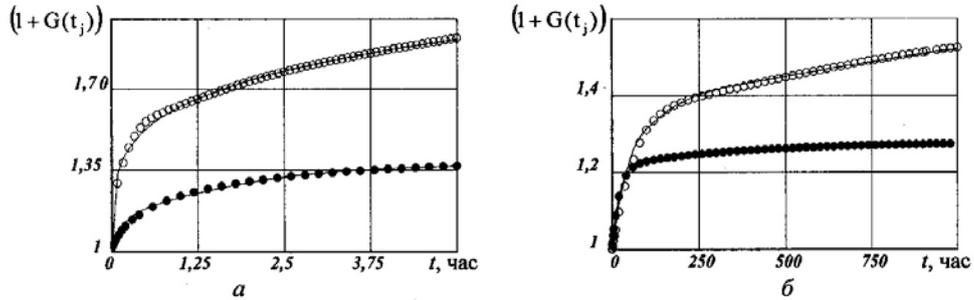


Рис. 4

Тонкими сплошными линиями показана аппроксимация дискретных значений осредненной функции подобия  $(\overline{1+G(t_j)})$  кубическим сглаживающим сплайном вида (2.2). В этом случае для функции  $(\overline{1+G(t_j)})$  получаем соотношение

$$\overline{1+G(t_j)} = A_j + B_j(t-t_j) + C_j(t-t_j)^2 + D_j(t-t_j)^3, \quad (3.1)$$

коэффициенты которого

$$B_j = \frac{\overline{G}_{j+1} - \overline{G}_j}{h_j} - \frac{h_j}{6}(2k_j + k_{j+1}); \quad C_j = \frac{k_j}{2}; \quad D_j = \frac{k_{j+1} - k_j}{6h_j}$$

определяются по результатам аппроксимации численных значений функции подобия (здесь  $\overline{G}_j = 1+G_j$  и  $\overline{G}_{j+1} = 1+G_{j+1}$  – табличные значения функции подобия в точках  $t_j, t_{j+1}$ ;  $k_j, k_{j+1}$  – коэффициенты сплайна;  $h_j = t_j - t_{j+1}$ ).

3.2. *Дискретизация ядер ползучести.* Ядро сдвиговой ползучести  $K_s(t-\tau)$  в нелинейной теории вязкоупругости (1.1) пропорционально скорости ползучести и пропорционально скорости изменения функции подобия [2]. При постоянном напряжении для  $K_s(t-\tau)$  справедливо соотношение

$$K_s(t) = \frac{1}{\lambda_s} \frac{\overline{G}(\gamma(t))}{\tau} \frac{d\gamma(t)}{dt} \quad (3.2)$$

и, соответственно, соотношение –

$$K_s(t) = \frac{1}{\lambda_s} \frac{d(1+G(t))}{dt}, \quad (3.3)$$

где все обозначения совпадают с принятыми выше.

Подставляя (3.1) в (3.3), получаем уравнение

$$\lambda_s K_s(t_j) = B_j + 2C_j(t-t_j) + 3D_j(t-t_j)^2, \quad (3.4)$$

которое позволяет рассчитывать дискретные значения  $K(t_j)$  ядра ползучести  $K(t)$  для нескольких моментов времени  $t_j$ .

Дискретные значения  $\lambda K_s(t)$ , пропорциональных ядрам сдвиговой ползучести  $K_s(t)$ , нанесены на рис. 5, а точками для Polystyrene ( $\circ$ ) и Nylon 10001 ( $\bullet$ ). Звездочками отмечены моменты времени  $t_*$ , соответствующие точкам перегиба на кривых зависимостей « $\lambda_s K_s - t$ ».

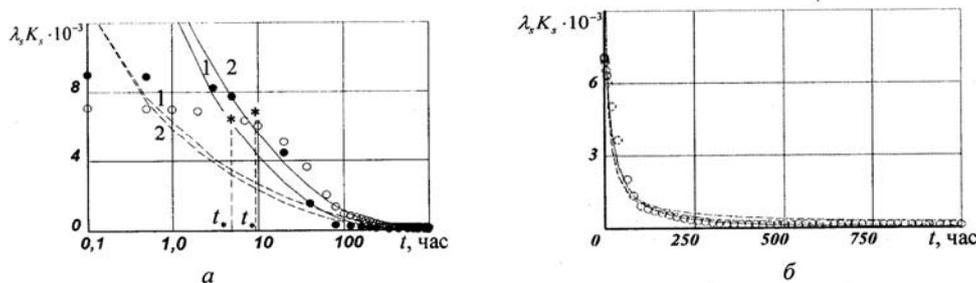


Рис. 5

В области малых длительностей испытаний ( $t_j < t_*$ ) дискретные значения ядер ползучести, как видно, не удовлетворяют условию  $K_s(t_j) \rightarrow \infty$  при  $t_j \rightarrow 0$ , что может быть связано с погрешностью измерений. Фактическая скорость ползучести при малых  $t$  всегда, по-видимому, будет больше той, которая может быть измерена применяемыми регистрирующими приборами.

**3.3. Определение параметров ядер ползучести. Весовые функции.** Параметры ядер наследственности в (1.1) определяются по результатам аппроксимации дискретных значений ядер ползучести выбранным аналитическим выражением ядра из (1.5) – (1.8), исходя из минимизации функционала (1.3).

При реализации процедуры аппроксимации дискретные значения ядер ползучести, полученные на начальном отрезке времени  $\{0, t_*\}$  вследствие динамических эффектов с погрешностью, учитываются в (1.3) с использованием весовых функций. В этом случае параметр  $\lambda_s$  и параметры ядра ползучести  $q_s$  в (1.3) определяются в два этапа. На первом этапе определяются начальные значения  $\lambda_0$  и  $q_{s0}$  искомых параметров, т.е. значения без учета дискретных значений ядер  $K(t_j)$  из области  $\{0, t_*\}$ . На втором этапе, используя значения  $\lambda_0$  и  $q_{s0}$ , из (1.4), варьируя моменты разностей  $m$ , определяем первичный набор весовых функций  $p_j(t)$ . Окончательные значения весовых функций  $p_j(t)$  устанавливаем исходя из суммарной квадратичной ошибки

$$\delta = \sum_{j=1}^{n_s} \left\{ p_j(t) [K_s(t_j) - \lambda_0 K_s(t, q_{s0})] \right\}^2, \quad (3.5)$$

которая соответствует квадратичной ошибке первой суммы в (1.3) и фактически является общей ошибкой функционала.

Сумму в (3.5) вычисляем для разных значений весовых функций  $p_j(t)$ , полученных согласно (1.4), и она является убывающей при возрастании величины  $m$ . В результате определяем значения  $p_j(t)$ , соответствующие минимальной ошибке  $\delta_{\min}$ , и используются далее в функционале (1.3) для определения окончательных значений параметров  $\lambda_s$  и  $q_s$ .

Аппроксимация дискретных значений ядер ползучести с использованием весовых функций показана на рис. 5, а сплошными линиями, а без использования весовых функций – штриховыми линиями, для Polystyrene (линии 1) и для Nylon 10001 (линии 2). Различие, как видно, может составлять 100% и более и с уменьшением времени  $t$  возрастает неограниченно.

Значения параметра  $\lambda_s$  и параметров  $\alpha$  и  $\beta$  ядер ползучести, задаваемых функциями (1.5), (1.7), (1.8) и рассчитанных исходя из минимизации функционала (1.3) с учетом (1.4), приведены для исследованных материалов в табл. 2.

Результаты аппроксимации дискретных значений ядер ползучести  $K_s(t_j)$  Polystyrene аналитическими выражениями ядер  $K_s(t)$  в форме (1.5), (1.7), (1.8) с использованием параметров ядер, приведенных в табл. 2, представлены на рис. 5, б линиями. Аппроксимация ядром (1.5) показана тонкими сплошными линиями, ядром (1.7) – штриховыми линиями и ядром (1.8) – штрихпунктирными линиями.

Таблица 2

Материал	$t_*$ , час	$\alpha$			$\beta$ , час <sup>-(1+<math>\alpha</math>)</sup>		$\lambda$ , час <sup>-(1+<math>\alpha</math>)</sup>		
		(1.5)	(1.7)	(1.8)	(1.7)	(1.8)	(1.5)	(1.7)	(1.8)
Polystyrene, 25 °C	5,0	0,646	0,329	0,318	0,001	0,037	0,056	0,025	0,020
Nylon 10001, 25 °C	10,0	0,851	0,229	0,316	0,008	0,058	0,128	0,151	0,017
Полиэтилен, 20, °C	0,1	0,762	0,242	0,739	0,020	0,083	0,577	0,154	0,612
Поликарбонат, 80, °C	0,1	0,970	0,274	0,318	0,228	0,811	0,056	0,113	0,364

Из данных, представленных на рис. 5, б, видно, что все выбранные ядра аппроксимируют дискретные значения ядер с достаточной степенью точности: максимальная средне квадратичная ошибка, рассчитанная по соотношению (3.5), получена для ядра Абеля (1.5) и для комбинации степенной экспоненциальной функции (1.7) и составляет 0,011. Ошибка для дробно-экспоненциального ядра (1.8) составляет 0,0044.

Аналогичные оценки получены для других материалов. В этой связи экспериментальная апробация предлагаемого метода определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов при кручении осуществляется на основе ядра наследственности (1.8).

#### §4. Расчет деформаций ползучести и релаксации напряжений.

Параметры дробно-экспоненциального ядра наследственности (1.8), определенные по изложенной в разделе 3 методике, апробируются экспериментально на задачах расчета деформаций сдвиговой ползучести при постоянных напряжениях, деформаций обратной ползучести при постоянных напряжениях, деформаций обратной ползучести при полной разгрузке, а также релаксации напряжений.

4.1. Ползучесть при постоянных напряжениях. Напряжение  $\tau(t)$ , действующее в произвольный момент времени  $t$ , при нагружении постоянным напряжением  $\tau_k$  задаем соотношением

$$\tau(t) = h(t)\tau_k \quad (k = 1, m), \quad (4.1)$$

где  $h(t)$  – единичная функция Хевисайда ( $h(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $h(t) = 1$  при  $t \geq 0$ ).

Разрешая первое уравнение в (1.1) относительно  $\gamma(t)$ , для деформации ползучести  $\gamma(t)$ , подставляя ядро ползучести (1.8), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & b_0 + b_{1,j} \left( \tau_k h(t) \left( 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1-\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1-\alpha)(1+n)]} \right) \right) + \\ & + b_{2,j} \left( \tau_k h(t) \left( 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1-\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1-\alpha)(1+n)]} \right) \right)^2 + \\ & + b_{3,j} \left( \tau_k h(t) \left( 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1-\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1-\alpha)(1+n)]} \right) \right)^3, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $b_0, b_{1,j}, b_{2,j}$  и  $b_{3,j}$  – коэффициенты функции  $\varphi_0^{-1}(\tau)$ , т.е. функции

$$\varphi_0^{-1}(\tau) = \psi_0(\tau) = b_0 + b_{1,j}\tau + b_{2,j}\tau^2 + b_{3,j}\tau^3, \quad (4.3)$$

являющейся обращением функции  $\varphi_0(\gamma)$ . Схематически функция  $\varphi_0^{-1}(\tau)$  показана на рис. 1 (штриховая линия) в координатах « $\tau - \gamma$ ». Значения коэффициентов  $b_{k,j}$  для  $j=3$  приведены для исследованных материалов в табл. 1.

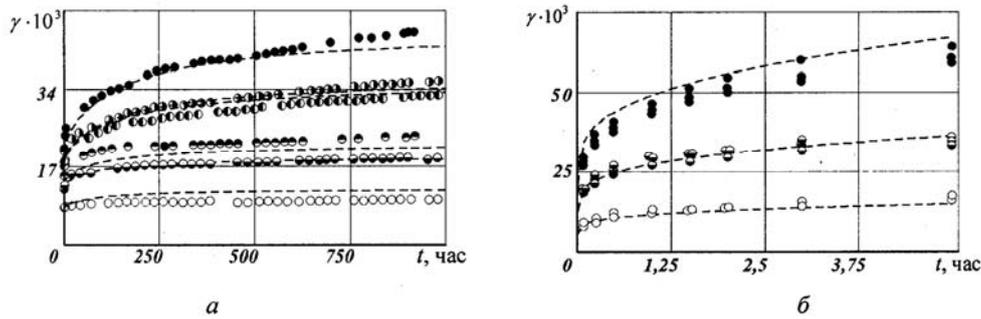


Рис. 6

Результаты расчетов, выполненных по уравнению (4.2) с использованием коэффициентов  $b_{k,j}$  и параметров ядер ползучести  $\alpha, \beta$  и  $\lambda_s$ , приведенных в табл. 1 и 2, нанесены на рис. 6 штриховыми линиями для сплошных цилиндрических образцов из Polystyrene (а) при напряжениях  $\tau_k = 10,17$  (○), 16,20 (⊖), 17,44 (⊙), 22,82 (●), 23,10 (⊕), 25,65 (●) МПа и для тонкостенных трубчатых элементов из полиэтилена ПЭВП (б) при напряжениях  $\tau_k = 2,07$  (○), 3,52 (⊖), 4,90 (●) МПа. Точками нанесены экспериментальные данные, заимствованные из [13] и [1], соответственно.

4.2. Обратная ползучесть при полной разгрузке. Условие нагружения при реализации режима полной разгрузки записываем в виде

$$\tau(t) = h(t)\tau_k - h(t-t_k)\tau_k, \quad (4.4)$$

где  $\tau_k$  – напряжение, приложенное в момент времени  $\tau = 0$ ;  $t_k$  – момент полной разгрузки;  $h(\cdot)$  – единичная функция Хевисайда.

Разрешая первое уравнение в (1.1) относительно  $\gamma(t)$ , для величины деформации ползучести с учетом (1.8), (2.1) и (4.4) получаем уравнение

$$\begin{aligned}
\gamma(t) = & b_0 + b_{1,j} \left( \tau_1 h(t) \left( 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) - \right. \\
& \left. -\tau_1 h(t-t_1) \left( 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) \right) + \\
& + b_{2,j} \left( \tau_1 h(t) \left( 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) - \right. \\
& \left. -\tau_1 h(t-t_1) \left( 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) \right)^2 + \\
& + b_{3,j} \left( \tau_1 h(t) \left( 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) - \right. \\
& \left. -\tau_1 h(t-t_1) \left( 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) \right)^3.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

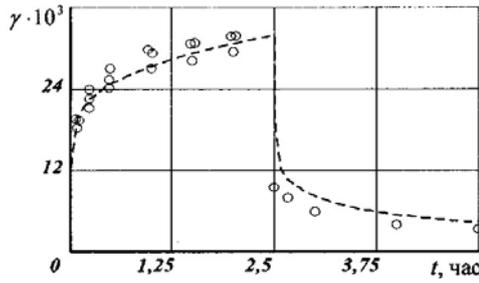


Рис. 7

Результаты расчетов деформаций прямой и обратной ползучести, выполненных по уравнению (4.5), нанесены на рис. 7 штриховыми линиями для тонкостенных трубчатых элементов из полиэтилена ПЭВП. Режим нагружения включал нагружение начальным напряжением  $\tau_1 = 3,88$  МПа и полную разгрузку в момент времени  $\xi = 2,5$  часа.

Расчеты выполнены с использованием коэффициентов  $b_{k,j}$  и параметров ядер ползучести  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda_s$ , приведенных в табл. 1 и 2. Значения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\lambda_s$  определялись только по результатам испытаний на прямую ползучесть при постоянных напряжениях. Экспериментальные данные заимствованы из [1].

4.3. Релаксация напряжений. В режиме релаксации напряжений начальное значение деформации

$$\gamma_k(0) = b_0 + b_{1,j} \tau_k + b_{2,j} \tau_k^2 + b_{3,j} \tau_k^3 \tag{4.6}$$

удерживается постоянным.

Зависимость напряжения  $\tau_k$  от времени  $t$ , исходя из второго соотношения в (1.1) записываем с учетом (1.8) и (4.1) в виде

$$\tau_k(t) = h(t) \left( a_0 + a_{1,j} \cdot \gamma_k(0) + a_{2,j} \cdot \gamma_k(0)^2 + a_{3,j} \cdot \gamma_k(0)^3 \right) \left[ 1 - \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_s + \beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right], \tag{4.7}$$

где значения начальной деформации  $\gamma_k(0)$  рассчитываются по формуле (4.6), а функция  $\varphi_0(\gamma)$  задается соотношением (2.2) при условии, что  $\gamma$  – величина переменная.

Результаты расчетов релаксации напряжений, выполненных по уравнению (4.7), нанесены на рис. 8 штриховыми линиями для тонкостенных трубчатых элементов и

полиэтилена ПЭВП при начальных напряжениях  $\tau_1 = 4,56$  (○); 7,15 (◐), 9,53 (●) МПа. Точками нанесены экспериментальные данные, заимствованные из [6]. В процессе испытаний фиксировались начальные значения деформаций  $\gamma_1 = 0,87; 1,73\%$  и  $2,60\%$ , соответственно.

Расчеты выполнены с использованием значений коэффициентов  $a_{k,j}$ , приведенных в табл. 1. Значения параметров  $\alpha = 0,35$ ;  $\beta = 6,09 \text{ час}^{-(1+\alpha)}$  и  $\lambda_s = 5,07 \text{ час}^{-(1+\alpha)}$  ядра релаксации рассчитывались по результатам обработки экспериментальных данных на ползучесть, приведенных в [1].

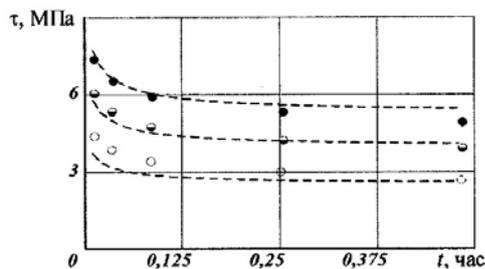


Рис. 8

### §5. Анализ результатов.

Эффективность предложенного метода определения параметров ядер сдвиговой наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов и достоверность получаемых значений параметров ядер оцениваются в работе по результатам согласования расчетных и экспериментальных данных на ползучесть и на релаксацию. Экспериментальная апробация метода осуществлена на примере расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях, деформаций обратной ползучести при полной разгрузке и релаксации напряжений.

В целом, как это видно из данных, представленных на рис. 6 – 8, результаты расчетов, выполненных с использованием найденных по предложенному методу параметров ядер наследственности, удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Характерно, что, как и в случае одноосного растяжения [10], учет экспериментальных данных в области малых времен с помощью весовых функций повышает точность расчетов. Лучшее согласование расчетных и экспериментальных данных получено в случае использования в качестве ядер наследственности дробно-экспоненциальной функции Работнова. В расчетах, как в режиме прямой, так и обратной ползучести, использовано одно и то же ядро ползучести и одни и те же значения параметров ядра.

При чистом кручении деформации сдвиговой ползучести и релаксации могут быть рассчитаны также с использованием параметров ядер ползучести, найденных в опытах на одноосное растяжение. Решение строится на основе гипотезы единой диаграммы деформирования, инвариантной по отношению к виду напряженного состояния.

Зависимость между инвариантами, задающая единую диаграмму деформирования для несжимаемых материалов, записываем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_i(\varepsilon_i(t)) &= \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \sigma_i(\tau) d\tau; \\ \sigma_i(t) &= \varphi_i(\varepsilon_i(t)) - \lambda_i \int_0^t R_i(t-\tau) \varphi_i(\varepsilon_i(\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $\varepsilon_i(\cdot)$ ,  $\sigma_i(\cdot)$  – вторые инварианты девиаторов деформаций и напряжений, так что в главных осях

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}; \quad \sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2};$$

$\varphi_i(\varepsilon_i(\cdot))$  – функция, задающая нелинейность вязкоупругих скалярных свойств;  $K_i(t)$ ,  $R_i(t)$  – ядра ползучести и релаксации, задающие нелинейные вязкоупругие скалярные свойства;  $\lambda_i$  – реологический параметр.

Для расчета деформаций сдвиговой ползучести  $\varepsilon_{21}(t)$  при чистом кручении и постоянных значениях напряжений  $\sigma_{21}$  из первого соотношения (4.8) с учетом (1.8) получаем уравнение

$$\varepsilon_{21}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{i=0}^3 b_{ij} \left\{ \sqrt{3} h(t) \sigma_{21} \left[ 1 + \lambda_{11} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right] \right\}^i, \quad (4.9)$$

где принято

$$\sigma_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_i; \quad \varepsilon_{21} = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_i; \quad \varphi_{11}(\varepsilon_{11}(t)) = \varphi_i(\varepsilon_i(t)); \quad \lambda_{11} = \lambda_i;$$

$b_{ij}$  – значения коэффициентов в сплайн-аппроксимации обращения функции  $\varphi_{11}(\varepsilon_{11}(\cdot))$ , задающей нелинейность вязкоупругих свойств при одноосном растяжении;  $h(t)$  – единичная функция Хевисайда.

Результаты расчетов (штриховые линии), выполненные по уравнению (4.9), сопоставлены на рис. 9 с теми же экспериментальными данными (точки) для Polystyrene (а) и полиэтилена ПЭВП (б), которые приведены на рис. 6. В расчетах использованы значения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda_{11}$  и значения коэффициентов  $b_{ij}$ , полученных по результатам обработки экспериментальных данных на ползучесть при одноосном растяжении и приведенных в [10]. В расчетах принято, что  $\gamma = 2\varepsilon_{21}$ .

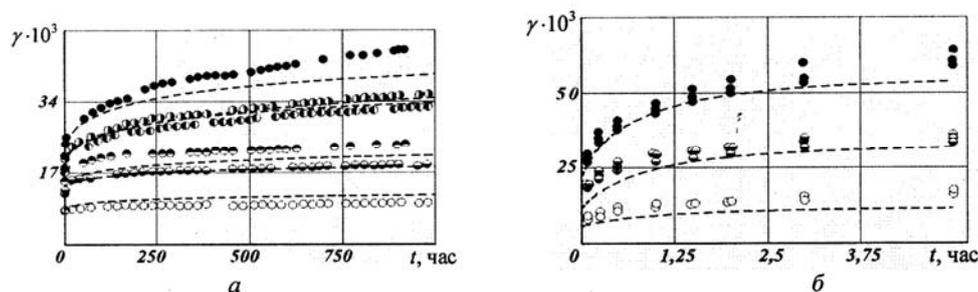


Рис. 9

Результаты расчетов, как видно, за исключением кривой ползучести полиэтилена ПЭВП при  $\tau_k = \sigma_{21} = 490$  МПа, практически повторяют результаты, приведенные на рис. 6 и полученные с использованием данных испытаний на кручение.

#### Заключение.

Метод определения параметров ядер наследственности в нелинейной модели вязкоупругости типа модели Работнова, учитывающий данные измерений в области малых времен с помощью весовых функций, апробирован экспериментально на задачах расчета деформаций сдвиговой ползучести при постоянных напряжениях и при полной разгрузке, а также релаксации напряжений. В качестве ядер наследственности использованы ядро Абеля, комбинация степенной и экспоненциальной функций, а также дробно-экспоненциальная функция.

Параметры ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов определяются по результатам испытаний на чистое кручение при постоянных напряжениях и характеристикам диаграммы мгновенного кручения. В качестве ядра наследственности наиболее обоснованным представляется использование дробно-экспоненциальной функции. Задача расчета деформаций сдвиговой ползучести при чистом кручении может быть решена также с использованием параметров ядер ползучести, определенных по результатам испытаний на одноосное растяжение.

РЕЗЮМЕ. Експериментально апробовано метод визначення параметрів ядер спадковості нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умови чистого кручення. Вибрана нелінійна модель в'язкопружності типу Работнова. Параметри ядер спадковості визначено за результатами апроксимації дискретних значень ядер, які знайдено за умови подібності. За малих часів в області сингулярності дискретні значення враховано за допомогою вагових функцій. Розглянуто ядро Абеля, комбінацію степеневі та експоненціальної функцій, а також дробово-експоненційну функцію.

1. Вилкс У.К., Крегерс А.Ф. Простое нагружение нелинейно-ползучего полимерного материала // Механика полимеров. – 1967. – № 2. – С. 236 – 242.
2. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Рагулина В.С. Метод определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов с использованием весовых функций // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 70 – 80.
3. Малмейстер А.К., Янсон Ю.О. Неизотермическое деформирование физически нелинейного материала (поликарбоната) при сложном напряженном состоянии // Механика композитных материалов. – 1979. – № 6. – С. 971 – 976.
4. Павлюк Я.В., Рагулина В.С., Фернати П.В. Прямая и обратная ползучесть нелинейно-вязкоупругопластических материалов при одноосном нагружении. – Вестник НТУ Украины «КПИ». – 2013. – № 3. – С. 30 – 37.
5. Шенепи Р.А. Вязкоупругое поведение композиционных материалов // Композиционные материалы. Т. 2. Механика композиционных материалов / Пер. с англ. под ред. А.А.Ильюшина и Б.Е.Победри. – М. Мир, 1978. – С.102 – 195.
6. Christensen R.M. Theory of viscoelasticity. An Introduction. – New York: Academic Press Inc., 1971. – 338 p.
7. Findley W.N., Lai J.S., Onaran K. Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1976. – 367 p.
8. Ferry J.D. Viscoelastic properties of polymers. 2<sup>nd</sup> ed. – New York: Wiley and Sons, 1981. – 633 p.
9. Golub V.P. Theory of creep and long-term strength of isotropic hardening media / In: Creep in Structures. – Berlin: Springer-Verlag. – 1991. – P. 77 – 82.
10. Golub V.P., Kobzar' Yu.V., Ragulina V.S. Determining the Parameters of the Hereditary Kernels of Nonlinear Viscoelastic Materials in Tension // Int. Appl. Mech – 2013. – 49, N 1. – P. 102 – 113
11. Golub V.P., Pavluk Ya.V., Fernati P.V. Determining the Parameters of Fractional Exponential Hereditary Kernels for Nonlinear Viscoelastic Materials // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 2. – P. 220 – 231.
12. Kaminsky A.A. Mechanics of the Delayed Fracture of Viscoelastic Bodies with Cracks: Theory and Experiment (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 5. – P. 485 – 548.
13. Marin J., Cuff G. Creep-time relations for polystyrene under tension, bending, and torsion // Proc. ASTM. – 1949. – 49. – P. 1158 – 1180.
14. Marin J., Webber A.C., Weissmann G.F. Creep-time relations for nylon in tension, compression, bending, and torsion // Proc. ASTM. – 1954. – 54. – P. 1313 – 1343.
15. Rabotnov Y.N. Creep problems in structural members. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. – 822 p.
16. Ward I.M. Mechanical properties of solid polymers. – New York: Wiley and Sons (Interscience), 1971. – 345 p.

Поступила 11.03.2013

Утверждена в печать 30.09.2014