В . В . Л е в ч е н к о

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ ПЪЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИН С ДИАМЕТРАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ ЭЛЕКТРОДОВ

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: electr@inmex.kiev.ua

Abstract. A general solution is obtained for the problem on non-axisymmetric electromechanical vibrations of piezoceramic ring plate. For the plates with radial cuts of electrode covering, an effect of boundary conditions on spectra of the natural frequencies of vibrations (for the first harmonics by the circumferential coordinate) are determined and analyzed for the boundary conditions «rigid clamping – free edge», «free edge – rigid clamping», «free edge – free edge».

Key words: piezoceramic ring plate, radial cuts of electrode covering, non-axisymmetric electromechanical vibrations, spectra of natural frequencies

Введение.

В современных электромеханических преобразователях различного функционального назначения широко используются тонкие пьезоэлектрические пластинчатые преобразователи с толщиной поляризацией [2 – 4, 6 – 8, 10 – 12 и др.]. В дисковых и кольцевых вибраторах со сплошными электродами на лицевых плоскостях возбуждаются осесимметричные колебания [4, 9]. Если же электроды кольцевой пластины имеют диаметральные разрезы и электроупругие сектора возбуждаются противофазно, то в ней возникают неосесимметричные колебания по окружной координате. Формы этих колебаний по указанной координате и их частоты определяются числом диаметральных разрезов электродов [2, 3, 11, 12]. В настоящей статье проводится сравнительный анализ частотного спектра при трех условиях закрепления границ пластины.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим пьезокерамическую пластину $(r_0 < r < r_1)$ толщиной h, отнесенную к цилиндрическим координатам r, θ, z, причем координатная плоскость $z = 0$ совпадает со срединной плоскостью пластины. Тонкая пьезокерамическая пластина с толщинной поляризацией и электродированными лицевыми плоскостями $z = \pm h/2$ находится в условиях плоского напряженного состояния $\left(u_r(r, \theta, t),\ u_\theta(r, \theta, t),\ \sigma_{zz} = \sigma_{z\theta} = \sigma_{zr} = 0,\ E_r = E_\theta = 0,\ E_z(r, \theta, t)\right)$. Как показано в работах [2, 5, 7, 10, 13], определить перемещения u_r, u_θ можно через потенциалы $\Phi(r, \theta, t)$, $\Psi(r, \theta, t)$ по формулам

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}; \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \tag{1}$$

Если функции $\Phi(r, \theta, t)$, $\Psi(r, \theta, t)$ определить из волновых уравнений, тогда имеем

$$\Delta\Phi - (1+\nu_E) d_{31} E_z = (1-\nu_E^2) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}; \quad \Delta\Psi = 2(1+\nu_E) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Механические напряжения затем определяем по зависимостям

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{(1-\nu_E^2)\ s_{11}^E}\left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) - (1+\nu_E)d_{31}E_z\right];$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{(1-\nu_E^2)\ s_{11}^E}\left[\left(\nu_E\frac{\partial u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) - (1+\nu_E)d_{31}E_z\right]; \tag{3}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\left(1+\nu_E\right)s_{11}^E}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right).$$

Для пластины со сплошными электродами на лицевых плоскостях $z = \pm h/2$ электрический потенциал (при пренебрежении влиянием краев пластины) $-\varphi = h^{-1}zV_0\left(t\right)$. Такому потенциалу соответствуют согласно [2, 8] компоненты напряженности электрического поля $E_r = E_\theta = 0$, $E_z = h^{-1}V_0\left(t\right)$; в таком случае, как показано в статьях [7 – 9, 12, 13], в уравнении (3) следует пренебречь величиной $(1+\nu_E)\,d_{31}E_z$.

Для круглой пьезокерамической пластины радиуса r_1 с отверстием радиуса r_0 однородные граничные условия по механическим перемещениям и напряжениям (по два условия при $r = r_0$ и $r = r_1$) формируются по одной из двух альтернативных пар ($j = 0, 1$)

$$u_r(r_j,\,\theta,\,t) = 0\ \Lambda\ \sigma_{rr}(r_j,\,\theta,\,t) = 0;\ \ u_\theta(r_j,\,\theta,\,t) = 0\ \Lambda\ \sigma_{r\theta}(r_j,\,\theta,\,t) = 0. \tag{4}$$

Начальные условия при установившихся гармонических колебаниях не формулируются.

2. Методика решения задачи.

Примем, что электродное покрытие на лицевых плоскостях $z = \pm h/2$ разбито на $2N$ секторов с противофазными соседними подключениями, так что $E_{za} = \left(-1\right)^{n-1}V_0/h$; $n = 1,\,...,\,2N$. Решение уравнений (2) в полярных координатах r, θ, в первом из которых слагаемое $(1+\nu)\,d_{31}E_z$ следует принять равным нулю [3, 10], при гармонических колебаниях $f\left(r,\,\theta,\,t\right) = \mathrm{Re}\,f^a\left(r,\,\theta\right)\exp i\omega t$ с циклической частотой ω примем в виде рядов

$$\Phi\left(r,\theta,t\right) = R^2\,\mathrm{Re}\sum_m\left\{A_{m,1}J_m\left(k_1r\right) + A_{m,2}Y_m\left(k_1r\right)\right\}\sin m\theta\exp i\omega t;$$

$$\Psi\left(r,\theta,t\right) = R^2\,\mathrm{Re}\sum_m\left\{A_{m,3}J_m\left(k_2r\right) + A_{m,4}Y_m\left(k_2r\right)\right\}\cos m\theta\exp i\omega t\,. \tag{5}$$

Здесь $J_m(k_jr)$ и $Y_m(k_jr)$ – цилиндрические функции первого и второго рода m-го порядка [1]; $k_1^2 = (1-\nu_E^2)\,s_{11}^E\rho\omega^2$; $k_2^2 = 2(1+\nu_E)\,s_{11}^E\rho\omega^2$; $A_{m,i}$ – безразмерные постоянные.

Согласно (1) и (3) определяем [9, 12] механические перемещения

$$u_r = R\,\mathrm{Re}\sum_m[u_{m1}(k_1r)A_{m,1} + u_{m2}(k_1r)A_{m,2} - u_{m3}(k_2r)A_{m,3} - u_{m4}(k_2r)A_{m,4}]\sin m\theta\exp i\omega t;$$

$$u_\theta = R\,\mathrm{Re}\sum_m[l_{m3}(k_1r)A_{m,1} + l_{m4}(k_1r)A_{m,2} + l_{m1}(k_2r)A_{m,3} + l_{m2}(k_2r)A_{m,4}]\cos m\theta\exp i\omega t \tag{6}$$

и механические напряжения

$$\sigma_{rr}(r,\theta,t)=-\mathrm{Re}\frac{1}{\left(1-\nu_E^2\right)s_{11}^E}\left\{\sum_m\left(a_{m1}(k_1r)A_{m,1}+a_{m2}(k_1r)A_{m,2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+a_{m3}(k_2r)A_{m,3}+a_{m4}(k_2r)A_{m,4}\right)\sin m\theta++\frac{4}{\pi}V_0(1+\nu_E)d_{13}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin N(2n-1)\theta}{2n-1}\right\}\exp i\omega t;$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r,\theta,t)=-\mathrm{Re}\frac{1}{\left(1-\nu_E^2\right)s_{11}^E}\left\{\sum_m\left(b_{m1}(k_1r)A_{m,1}+b_{m2}(k_1r)A_{m,2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+b_{m3}(k_2r)A_{m,3}+b_{m4}(k_2r)A_{m,4}\right)\sin m\theta+\frac{4}{\pi}V_0(1+\nu_E)d_{13}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin N(2n-1)\theta}{2n-1}\right\}\exp i\omega t; \quad (7)$$

$$\sigma_{r\theta}(r,\theta,t)=\mathrm{Re}\frac{1}{\left(1+\nu_E\right)s_{11}^E}\sum_m\left(c_{m1}(k_1r)A_{m,1}+c_{m2}(k_1r)A_{m,2}+c_{m3}(k_2r)A_{m,3}+\right.$$

$$\left.+c_{m4}(k_2r)A_{m,4}\right)\cos m\theta\exp i\omega t.$$

В формулах (6) и (7) использованы обозначения:

$$a_{m1}(k_1r)=\left[(1-\nu_E)k_1rJ_{m-1}(k_1r)+\left(k_1^2r^2-(1-\nu_E)m(m+1)\right)J_m(k_1r)\right]R^2/r^2;$$

$$a_{m2}(k_1r)=\left[(1-\nu_E)k_1rY_{m-1}(k_1r)+\left(k_1^2r^2-(1-\nu_E)m(m+1)\right)Y_m(k_1r)\right]R^2/r^2;$$

$$a_{m3}(k_2r)=(1-\nu_E)m\left[k_2rJ_{m-1}(k_2r)-(m+1)J_m(k_2r)\right]R^2/r^2;$$

$$a_{m4}(k_2r)=(1-\nu_E)m\left[k_2rY_m(k_2r)-(m+1)Y_m(k_2r)\right]R^2/r^2;$$

$$b_{m1}(k_1r)=\left[-(1-\nu_E)k_1rJ_{m-1}(k_1r)+\left(\nu_Ek_1^2r^2+(1-\nu_E)m(m+1)\right)J_m(k_1r)\right]R^2/r^2;$$

$$b_{m2}(k_1r)=\left[-(1-\nu_E)k_1rY_{m-1}(k_1r)+\left(\nu_Ek_1^2r^2+(1-\nu_E)m(m+1)\right)Y_m(k_1r)\right]R^2/r^2;$$

$$b_{m3}(k_2r)=-(1-\nu_E)m\left[k_2rJ_{m-1}(k_2r)-(m+1)J_m(k_2r)\right]R^2/r^2;$$

$$b_{m4}(k_2r)=-(1-\nu_E)m\left[k_2rY_{m-1}(k_2r)-(m+1)Y_m(k_2r)\right]R^2/r^2;$$

$$c_{m1}(k_1r)=m\left[k_1rJ_{m-1}(k_1r)-(m+1)J_m(k_1r)\right]R^2/r^2;$$

$$c_{m2}(k_1r)=m\left[k_1rY_{m-1}(k_1r)-(m+1)Y_m(k_1r)\right]R^2/r^2;$$

$$c_{m3}(k_2r)=\left[k_2rJ_{m-1}(k_2r)+\left(\frac{1}{2}k_2^2r^2-m(m+1)\right)J_m(k_2r)\right]R^2/r^2;$$

$$c_{m4}\left(k_2r\right)=\left[k_2rY_{m-1}\left(k_2r\right)+\left(\frac{1}{2}k_2^2r^2-m\left(m+1\right)\right)Y_m\left(k_2r\right)\right]R^2\!\!\Big/_{r^2}; \tag{8}$$

$$u_{m1}(k_1r)=-m\frac{R}{r}J_m(k_1r)+k_1RJ_{m-1}(k_1r);\;\; u_{m2}(k_1r)=-m\frac{R}{r}Y_m(k_1r)+k_1RY_{m-1}(k_1r);$$

$$u_{m3}(k_2r)=m\frac{R}{r}J_m(k_2r);\;\; u_{m4}(k_2r)=m\frac{R}{r}Y_m(k_2r);$$

$$l_{m1}\left(k_1r\right)=u_{m3}(k_1r);\; l_{m2}\left(k_1r\right)=u_{m2}(k_1r);\;\; l_{m3}\left(k_2r\right)=-u_{m3}(k_2r);\;\; l_{m4}\left(k_2r\right)=-u_{m2}(k_2r).$$

Так как амплитуда $E_z^a=\left(-1\right)^{n-1}V_0h^{-1}$ ($n=1,\,2,\,...,\,2N$), а напряженность электрического поля $E_z=\operatorname{Re}E_z^a\exp i\omega t$ раскладывается в ряд Фурье по угловой координате θ , т.е.

$$E_z^a=-\frac{2V_0}{\pi h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin N\left(2n-1\right)\theta}{2n-1}, \tag{9}$$

то в формулах (6 – 8) индекс $m=N\left(2n-1\right)$, $n=1,\,2,\,...$.

При резонансных колебаниях следует воспользоваться концепцией комплексных модулей [2, 9], согласно которой материальные постоянные будут комплексными величинами ($\tilde{s}_{ij}^E=s_{ij}^E-is_{ij}^{E\,\mathrm{Im}}$, $\tilde{d}_{ij}=d_{ij}-id_{ij}^{\mathrm{Im}}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}^T=\varepsilon_{ij}^T-i\varepsilon_{ij}^{T\,\mathrm{Im}}$).

При определении резонансных частот тангенсами малых углов потерь можно пренебречь и пользоваться действительными значениями физико-механических материальных параметров.

При $N=0$ реализуются электроупругие радиальные колебания

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=\rho\frac{\partial^2u_r}{\partial t^2}; \tag{10}$$

$$\sigma_{rr}=\frac{1}{(1-\nu_E^2)\;s_{11}^E}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\nu_E\frac{u_r}{r}-(1+\nu_E)\;d_{31}E_z\right)$$

и азимутальные колебания

$$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\sigma_{r\theta}}{r}=\rho\frac{\partial^2u_\theta}{\partial t^2};\quad \sigma_{r\theta}=\frac{1}{2\left(1+\nu_E\right)s_{11}^E}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right). \tag{11}$$

Собственные частоты электроупругих радиальных колебаний (11) исследованы в статье [12]; азимутальные колебания (11) электрическим путем не возбуждаются и приведены с целью более полного анализа результатов.

При $N>0$ частоты, которые зарождаются как радиальные (задача (10) и азимутальные (задача (11)), будем условно называть, соответственно, квазирадиальными и квазиазимутальными частотами.

Рассмотрим колебания кольцевой пластины при жестко защемленной внутренней границе $r=r_0$ и свободной внешней границе $r=r_1$

$$u_r\left(r_0,\,\theta,\,t\right)=0;\;\; u_\theta\left(r_0,\,\theta,\,t\right)=0;\quad \sigma_{rr}\left(r_1,\,\theta,\,t\right)=0;\; \sigma_{r\theta}\left(r_1,\,\theta,\,t\right)=0 \tag{12}$$

при свободной внутренней границе $r=r_0$ и жестко защемленной внешней границе $r=r_1$

$$\sigma_{rr}(r_0, \theta, t) = 0\,; \quad \sigma_{r\theta}(r_0, \theta, t) = 0\,; \quad u_r(r_1, \theta, t) = 0\,; \quad u_\theta(r_1, \theta, t) = 0\,, \tag{13}$$

а также при свободной внутренней границе $r = r_0$ и свободной внешней границе $r = r_1$

$$\sigma_{rr}(r_0, \theta, t) = 0\,; \quad \sigma_{r\theta}(r_0, \theta, t) = 0\,; \quad \sigma_{rr}(r_1, \theta, t) = 0\,; \quad \sigma_{r\theta}(r_1, \theta, t) = 0\,. \tag{14}$$

Из граничных условий (12), используя выражения (6, 7) для перемещений и напряжений, получим блочные системы алгебраических уравнений для определения безразмерных постоянных $A_{N(2n-1),i}$ ($n = 1, 2, \ldots$; $i = 1, \ldots, 4$) такого вида:

$$u_{N(2n-1),1}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),1} + u_{N(2n-1),2}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),2} +$$

$$+u_{N(2n-1),3}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),3} + u_{N(2n-1),4}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),4} = 0\,;$$

$$l_{N(2n-1),1}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),1} + l_{N(2n-1),2}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),2} +$$

$$+l_{N(2n-1),3}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),3} + l_{N(2n-1),4}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),4} = 0\,;$$

$$a_{N(2n-1),1}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),1} + a_{N(2n-1),2}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),2} +$$

$$+a_{N(2n-1),3}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),3} + a_{N(2n-1),4}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),4} = -\frac{4}{\pi} V_0 \frac{(1+\nu_E) d_{13}}{2n-1}\,; \tag{15}$$

$$c_{N(2n-1),1}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),1} + c_{N(2n-1),2}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),2} +$$

$$+c_{N(2n-1),3}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),3} + c_{N(2n-1),4}(k_2 r_1) A_{N(2n-1),4} = 0\,.$$

Резонансные частоты определяем из условия равенства нулю определителей четвертого порядка однородных (при $V_0 = 0$) систем алгебраических уравнений (15)

$$\begin{vmatrix} u_{m1}(k_1 r_0) & u_{m2}(k_1 r_0) & u_{m3}(k_2 r_0) & u_{m4}(k_2 r_0) \\ l_{m1}(k_1 r_0) & l_{m2}(k_1 r_0) & l_{m3}(k_2 r_0) & l_{m4}(k_2 r_0) \\ a_{m1}(k_1 r_1) & a_{m2}(k_1 r_1) & a_{m3}(k_2 r_1) & a_{m4}(k_2 r_1) \\ c_{m1}(k_1 r_1) & c_{m2}(k_1 r_1) & c_{m3}(k_2 r_1) & c_{m4}(k_2 r_1) \end{vmatrix} = 0\,. \tag{16}$$

Граничные условия (13) при использовании выражений для перемещений и напряжений позволяют получить блочные системы алгебраических уравнений для определения безразмерных постоянных), т.е.

$$a_{N(2n-1),1}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),1} + a_{N(2n-1),2}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),2} +$$

$$+a_{N(2n-1),3}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),3} + a_{N(2n-1),4}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),4} = -\frac{4}{\pi} V_0 \frac{(1+\nu_E) d_{13}}{2n-1}\,;$$

$$c_{N(2n-1),1}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),1} + c_{N(2n-1),2}(k_1 r_0) A_{N(2n-1),2} +$$

$$+c_{N(2n-1),3}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),3} + c_{N(2n-1),4}(k_2 r_0) A_{N(2n-1),4} = 0\,; \tag{17}$$

$$u_{N(2n-1),1}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),1} + u_{N(2n-1),2}(k_1 r_1) A_{N(2n-1),2} +$$

$$+u_{N(2n-1),3}\left(k_2r_1\right)A_{N(2n-1),3}+u_{N(2n-1),4}\left(k_2r_1\right)A_{N(2n-1),4}=0\,;$$

$$l_{N(2n-1),3}\left(k_1r_1\right)A_{N(2n-1),1}+l_{N(2n-1),4}\left(k_1r_1\right)A_{N(2n-1),2}+$$

$$+l_{N(2n-1),3}\left(k_2r_1\right)A_{N(2n-1),3}+l_{2N(2n-1),4}\left(k_2r_1\right)A_{N(2n-1).4}=0\,.$$

Из условия существования нетривиальных решений однородных (при $V_0=0$) систем уравнений (17) получим зависимости для определения резонансных частот при граничных условиях (14)

$$\begin{vmatrix} a_{m1}\left(k_1r_0\right) & a_{m2}\left(k_1r_0\right) & a_{m3}\left(k_2r_0\right) & a_{m4}\left(k_2r_0\right) \\ c_{m3}\left(k_1r_0\right) & c_{m3}\left(k_1r_0\right) & c_{m1}\left(k_2r_0\right) & c_{m2}\left(k_2r_0\right) \\ u_{m1}\left(k_1r_1\right) & u_{m2}\left(k_1r_1\right) & u_{m3}\left(k_2r_1\right) & u_{m4}\left(k_2r_1\right) \\ l_{m1}\left(k_1r_1\right) & l_{m2}\left(k_1r_1\right) & l_{m3}\left(k_2r_1\right) & l_{m4}\left(k_2r_1\right) \end{vmatrix}=0\,. \tag{18}$$

Из граничных условий (14) получим блочные системы алгебраических уравнений для определения безразмерных постоянных $A_{N(2n-1),i}$ ($n=1,\,2,\,...$), т.е.

$$a_{N(2n-1),1}\left(k_1r_0\right)A_{N(2n-1),1}+a_{N(2n-1),2}\left(k_1r_0\right)A_{N(2n-1),2}+$$

$$+a_{N(2n-1),3}\left(k_2r_0\right)A_{N(2n-1),3}+a_{N(2n-1),4}\left(k_2r_0\right)A_{N(2n-1),4}=-\frac{4}{\pi}V_0\frac{\left(1+\nu_E\right)d_{13}}{2n-1}\,;$$

$$c_{N(2n-1),1}\left(k_1r_0\right)A_{N(2n-1),1}+c_{N(2n-1),2}\left(k_1r_0\right)A_{N(2n-1),2}+$$

$$+c_{N(2n-1),3}\left(k_2r_0\right)A_{N(2n-1),3}+c_{N(2n-1),4}\left(k_2r_0\right)A_{N(2n-1),4}=0\,;$$

$$a_{N(2n-1),1}\left(k_1r_1\right)A_{N(2n-1),1}+a_{N(2n-1),2}\left(k_1r_1\right)A_{N(2n-1),2}+ \tag{19}$$

$$+a_{N(2n-1),3}\left(k_2r_1\right)A_{N(2n-1),3}+a_{N(2n-1),4}\left(k_2r_1\right)A_{N(2n-1),4}=-\frac{4}{\pi}V_0\frac{\left(1+\nu_E\right)d_{13}}{2n-1}\,;$$

$$c_{N(2n-1),1}\left(k_1r_1\right)A_{N(2n-1),1}+c_{N(2n-1),2}\left(k_1r_1\right)A_{N(2n-1),2}+$$

$$+c_{N(2n-1),3}\left(k_2r_1\right)A_{N(2n-1),3}+c_{N(2n-1),4}\left(k_2r_1\right)A_{N(2n-1),4}=0\,.$$

Резонансные частоты определяем из условия равенства нулю определителей четвертого порядка однородных (при $V_0=0$) систем алгебраических уравнений (20)

$$\begin{vmatrix} a_{m1}\left(k_1r_0\right) & a_{m2}\left(k_1r_0\right) & a_{m3}\left(k_2r_0\right) & a_{m4}\left(k_2r_0\right) \\ c_{m1}\left(k_1r_0\right) & c_{m2}\left(k_1r_0\right) & c_{m3}\left(k_2r_0\right) & c_{m4}\left(k_2r_0\right) \\ a_{m1}\left(k_1r_1\right) & a_{m2}\left(k_1r_1\right) & a_{m3}\left(k_2r_1\right) & a_{m4}\left(k_2r_1\right) \\ c_{m1}\left(k_1r_1\right) & c_{m2}\left(k_1r_1\right) & c_{m3}\left(k_2r_1\right) & c_{m4}\left(k_2r_1\right) \end{vmatrix}=0\,. \tag{20}$$

В соотношениях (16) – (20) азимутный индекс $m=N(2n-1$ ($n=1,\,2,\,...,$ N – число диаметральных разрезов электродного покрытия).

Из граничных условий (12) – (14), формул (6), (7) для механических перемещений и напряжений и частотных уравнений (16), (18) и (20) следуют такие общие свойства теоретического частотного спектра. При колебаниях пластины с одним диаметральным разрезом ($N=1$, два электрода) возникают резонансы на частотах $f_{1,k}$, $f_{3,k}$, $f_{5,k}$, ... ; с двумя диаметральными разрезами ($N=2$, четыре электрода) – резонансы на частотах $f_{2,k}$, $f_{6,k}$, $f_{10,k}$, ... ; с тремя диаметральными разрезами ($N=3$, шесть электродов) – на частотах $f_{3,k}$, $f_{9,k}$, $f_{15,k}$, ... ; с четырьмя диаметральными разрезами ($N=4$, восемь электродов) – на частотах $f_{4,k}$, $f_{12,k}$, $f_{20,k}$, ... ; с пятью диаметральными разрезами ($N=5$, десять электродов) – на частотах $f_{5,k}$, $f_{15,k}$, $f_{25,k}$, ... ; с шестью диаметральными разрезами ($N=6$, двенадцать электродов) – на частотах $f_{6,k}$, $f_{18,k}$, $f_{30,k}$, ... ; с семью диаметральными разрезами ($N=7$, четырнадцать электродов) – на частотах $f_{7,k}$, $f_{21,k}$, $f_{35,k}$, ... ; с восемью диаметральными разрезами ($N=8$, шестнадцать электродов) – на частотах $f_{8,k}$, $f_{24,k}$, $f_{40,k}$, … . В принятой нумерации частот $f_{m,k}$ первый индекс отвечает номеру гармоники по азимутальному углу θ (номер формы по азимуту), а второй индекс k является порядковым номером корня соответствующего частотного уравнения.

3. Результаты численных экспериментов и их анализ.

Результаты анализа частотных уравнений представлены в табл. 1 – 3, в которых приведены значения безразмерных резонансных частот $\bar{\omega}=\sqrt{(1-\nu_E^2)s_{11}^E\rho}\,\omega r_1$, определяемых соответственно из (17), (19), (21) при различных значениях N . Расчеты проведены при таких исходных данных: $r_0/r_1=0,4$; $\rho=7740\,\text{кг}/\text{м}^3$; $s_{11}^E=15,2\cdot10^{-12}\,\text{м}^2/\text{Н}$; $s_{12}^E=$ $=-5,8\cdot10^{-12}\,\text{м}^2/\text{Н}$; $d_{31}=-125\cdot10^{-12}\,\text{Кл}/\text{Н}$, что соответствует пъезокерамике ЦТС-19 [2].

Таблица 1

k	$N=0$ $\bar{\omega}_{0,k}$	$N=1$ $\bar{\omega}_{1,k}$	$N=2$ $\bar{\omega}_{2,k}$	$N=3$ $\bar{\omega}_{3,k}$
1	0,77405	1,2108	1,85491	2,31119
2	2,7658	2,70754	2,87211	3,50261
3	4,24997	4,61023	5,4193	6,40551
4	7,211044	7,05481	6,88761	6,87753
5	7,93913	8,24799	8,85883	9,53872
6	10,14251	10,15934	10,23068	10,43583
7	13,06489	13,04537	13,09362	13,22587

Таблица 2

k	$N=0$ $\bar{\omega}_{0,k}$	$N=1$ $\bar{\omega}_{1,k}$	$N=2$ $\bar{\omega}_{2,k}$	$N=3$ $\bar{\omega}_{3,k}$
1	2,31578	2,46586	2,70391	3,14207
2	3,20884	3,3252	3,93292	4,80765
3	4,81907	5,20747	6,05161	6,743159
4	7,56991	7,377518	7,278965	7,747007
5	8,04387	8,391521	8,976372	9,558131
6	10,40329	10,43448	10,56156	10,88514
7	13,20124	13,1704	13,22125	13,38097

Таблица 3

k	$N=0$ $\overline{\omega}_{0,k}$	$N=1$ $\overline{\omega}_{1,k}$	$N=2$ $\overline{\omega}_{2,k}$	$N=3$ $\overline{\omega}_{3,k}$
1	1,42334	1,6265	0,69281	1,54389
2	3,31746	3,85103	2,34721	3,18735
3	5,49151	5,20302	4,85053	4,97488
4	6,05803	6,53165	5,05288	6,17078
5	8,896337	8,88278	7,294018	7,983204
6	10,59329	10,72654	8,93175	9,28126
7	11,76887	11,81621	11,049	11,42551

Из результатов табл. 1 – 3 следует, что при $N=0$ (осесимметричные колебания) при одной закрепленной (внутренней или внешней) границе (граничные условия (12) и (13)) вторая, пятая, седьмая частоты соответствуют радиальным колебаниям (10), а первая, третья, четвертая, шестая частоты соответствуют азимутальным колебаниям (11). При свободной внутренней и внешней границах радиальным колебаниям соответствуют первая, третья, шестая частоты, а азимутальным колебаниям соответствуют вторая, четвертая, пятая, седьмая частоты. При граничных условиях (12), (13) (одна из границ закреплена) значения собственных частот с ростом номера моды сближаются. Этот вывод справедлив и для граничных условий (14) (свободные границы), однако значение частот в этом случае приближается со стороны меньших величин.

В зависимости от условий закрепления пьезокерамической пластины и числа разрезов N электродного покрытия первые собственные частоты квазирадиальных и квазиазимутальных мод колебаний значительно отличаются (иногда в два – три раза при закреплении по внешнему контуру (условия (13), (14))) по отношению к случаю незакрепленных краев (условие (15)). С ростом номера частоты отличие в собственных частотах уменьшается (примерно до десяти процентов для седьмой частоты).

Выполненные расчеты позволяют заключить, что с ростом числа разрезов N электродного покрытия даже при одной закрепленной границе частоты, соответствующие малым k, сдвигаются в высокочастотную область и частотный спектр становится более насыщенным в высокочастотном диапазоне.

Представляет интерес исследование зависимости частотного спектра от геометрии кольца. В табл. 4 – 6 приведены зависимости первой частоты от отношения r_0 / r_1 при различном числе N разрезов электродного покрытия в случаях: жесткое закрепление – свободный край (табл. 4); свободный край – жесткое закрепление (табл. 5); свободный край – свободный край (табл. 6).

Таблица 4

r_0 / r_1	$N=1$ $\overline{\omega}_{1,1}$	$N=2$ $\overline{\omega}_{2,1}$	$N=3$ $\overline{\omega}_{3,1}$	$N=4$ $\overline{\omega}_{4,1}$
0,1	0,71165	1,34364	2,00921	2,61817
0,2	0,87091	1,45357	2,03302	2,62141
0,3	1,02743	1,62725	2,1194	2,6486
0,4	1,21076	1,85491	2,31119	2,75133
0,5	1,45919	2,12615	2,64278	3,01045
0,6	1,84263	2,46673	3,10797	3,52854
0,7	2,5143	3,02277	3,6822	4,32559
0,8	3,91731	4,2612	4,77424	5,39814
0,9	8,23944	8,40371	8,67026	9,02956

Таблица 5

r_0 / r_1	$N=1$ $\bar{\omega}_{1,1}$	$N=2$ $\bar{\omega}_{2,1}$	$N=3$ $\bar{\omega}_{3,1}$	$N=4$ $\bar{\omega}_{4,1}$
0,1	1,95992	2,75578	3,79396	4,56191
0,2	2,06778	2,50631	3,55341	4,4994
0,3	2,23762	2,50406	3,22194	4,15698
0,4	2,46665	2,70391	3,14207	3,81339
0,5	2,7481	3,08122	3,36569	3,78359
0,6	3,11977	3,60247	3,93426	4,18378
0,7	3,74549	4,21597	4,81566	5,20081
0,8	5,0915	5,42034	5,92438	6,5546
0,9	9,3562	9,51646	9,77759	10,13163

Таблица 6

r_0 / r_1	$N=1$ $\bar{\omega}_{1,1}$	$N=2$ $\bar{\omega}_{2,1}$	$N=3$ $\bar{\omega}_{3,1}$	$N=4$ $\bar{\omega}_{4,1}$
0,1	1,56127	1,23169	2,00392	2,618
0,2	1,58725	1,05552	1,95461	2,61131
0,3	1,61479	0,86562	1,79267	2,55171
0,4	1,62666	0,69304	1,54389	2,35656
0,5	1,61051	0,54047	1,27326	2,04243
0,6	1,56808	0,4038	1,00296	1,67866
0,7	1,50873	0,28052	0,73471	1,28545
0,8	1,44201	0,17266	0,4703	0,8614
0,9	1,37384	0,07913	0,22072	0,41876

Представленные численные результаты позволяют заключить, что значение частот колебаний существенно зависит от геометрии кольца и от количества разрезов. При $N=1$ эта зависимость имеет максимум, а при $N=2$, 3, 4 значение частоты убывает с ростом величины отверстия. Кроме того, следует отметить, что в случае подобной геометрии кольца частоты колебаний возрастают при увеличении количества разрезов. С ростом отношения r_0 / r_1 значения собственных частот, определяемых из соотношений (16), (18), могут отличаться в несколько раз от аналогичных частот, определяемых из соотношения (20). Также отметим, что чем выше значение r_0 / r_1, тем больше отличие.

Заключение.

В тонких кольцевых пьезокерамических пластинах с радиальными разрезами электродного покрытия возбуждаются неосесимметричные электроупругие планарные колебания. В статье получено общее решение соответствующей задачи. Для трех типов граничных условий численно исследованы спектры собственных частот колебаний для низших по азимутальной координате гармоник при различном числе радиальных разрезов электродного покрытия и отношениях внутреннего и внешнего радиусов пластины. Установлена зависимость значений квазирадиальных и квазиазимутальных собственных частот от номера частоты и числа разрезов электродного покрытия. Установлено, что если одна из двух границ пластины закреплена, то значение собственных частот выше, чем в случае свободных внешней и внутренней границ. Для рассматриваемых случаев граничных условий, варьируя геометрией пластины или числом разрезов, можно существенно изменять значение собственных частот колебаний пластин.

Р Е З Ю М Е . Отримано загальний розв'язок задачі про неосесиметричні електромеханічні коливання п'єзокерамічної кільцевої пластини. Для пластин з радіальними розрізами електродного покриття при граничних умовах (жорстке закріплення – вільний край, вільний край – жорстке закріплення, вільний край – вільний край) чисельно визначено і проаналізовано вплив граничних умов на спектри власних частот коливань для перших гармонік по окружній координаті.

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
2. *Шульга Н.А., Болкисев А.М.* Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.
3. *Шульга М.О.* До теорії електромеханічних неосесиметричних коливань п'єзокерамічних пластин з товщинною поляризацією // Системні технології. – 2007. – Вип. 7. – С. 63 – 68.
4. *Шульга М.О., Левченко В.В.* До теорії неосесиметричних електропружних коливань п'єзокерамічних пластин // Доп. НАН України. – 2012. – № 6. – С. 61 – 68.
5. *Dieulesant E., Royer D.* Ondes elastiques dans les solides. Application au raiment du signal. – Paris: Masson et C, 1974. – 424 p.
6. *Krasnopolskaya T.S. Shvets A.Yu.* Deterministic Chaos in a System Generator – Piezoceramic Transducer // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2006. – **6**, N 4 – P. 367 – 387.
7. *Huang C.H, Ma C.C., Lin Y.C.* Theoretical, numerical, and experimental investigation on resonant vibrations of piezoceramic annular disks // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2005. – **52**, N 8. –P. 1204 – 1216.
8. *Huang C.H.* Resonant vibration investigations for piezoceramic disks and annuli by using the equivalent constant method // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2005. – **52**, N 8. – P. 1217 – 1228.
9. *Mason W.P.* Piezoelectricity, its history and applications // J. Acoust. Soc. Am. – 1981. – **70**, N 6. – P. 1561 – 1566.
10. *Shul'ga N.A.* Mixed Systems of Equations in Kirchhoff's Theory of the Transverse Vibrations of Plates // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 2. – P. 194 – 202.
11. *Shul'ga N.A., Levchenko V.V.* Natural Modes of Piezoelectric Circural Plates with Radially Cuts Electrodes // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50,** N5. – P. 582 – 592..
12. *Shul'ga N.A., L.O. Grigor`eva, N.O.Volkova.* Electrically Excited Nonstationary Vibrations of Thin Circular Piezoelectric Plates // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 4. – P. 406 – 412..
13. *Tiersten H. F.* Linear theory of piezoelectric plate vibrations. – N – Y.: Plenum Press, 1969. – 206 p.

Поступила 18.09.2012 Утверждена в печать 30.09.2014