

В. М. Назаренко, А. Л. Кипнис

**КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ
ВНУТРЕННЕЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ
В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ
С НЕГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА СРЕД**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: nazvm@gmail.com,
a.l.kipnis@gmail.com*

Abstract. By the Wiener – Hopf method, an exact solution of symmetric problem of mechanics of composite materials fracture is constructed for an elastic equilibrium of piecewise isotropic plane that involves an interface in the form of sides of angle and includes an interior semi-infinite loaded crack.

Key words: mechanics of composite materials fracture, non-smooth interface, interior semi-infinite loaded crack, Wiener – Hopf method.

Введение.

Механика разрушения в настоящее время – отдельная обширная область механики деформируемого тела, относящаяся к той стадии деформирования, которая непосредственно предшествует или в рамках которой происходит исчерпание несущей способности материалов и элементов конструкций. Заметим, что механика разрушения включает многообразные подходы к изучению различных механизмов разрушения на микро- и макроуровнях как классические, так и неклассические, в том числе для композитных материалов (см., например, [2, 6, 13, 15 – 17, 19]).

В большинстве работ, посвященных задачам механики разрушения композитных материалов о трещинах в кусочно-однородных телах, предполагается, что граница раздела сред является гладкой, в первую очередь, прямолинейной [4, 5, 9 – 12, 14, 18]. Однако угловые точки негладкой границы раздела сред представляют собой концентраторы напряжений. В соответствующих задачах теории упругости при приближении точки области к угловой точке границы раздела сред напряжения стремятся к бесконечности. Поэтому каждый из таких концентраторов напряжений чрезвычайно опасен с точки зрения возможности разрыва сплошности вблизи него и зарождения исходящих из него трещин, длины которых в значительной степени меньше размеров тела. Если зародившаяся трещина окажется неустойчивой, то после достижения состояния предельного равновесия режим ее развития будет динамическим, что может привести к непредвиденному катастрофическому разрушению конструкции.

Изложенное выше обосновывает актуальность проблемы исследования задач механики разрушения композитных материалов о трещинах в кусочно-однородных телах с негладкой границей раздела сред.

В данной работе получено решение задачи механики разрушения для кусочно-однородной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей внутреннюю полубесконечную нагруженную трещину.

§1. Постановка задачи.

В условиях плоской деформации рассмотрим статическую задачу теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, которая в одной из частей на биссектрисе содержит внутреннюю полу-бесконечную трещину (рис. 1). Берега трещины находятся под действием нормального давления, распределенного по закону F/r^2 ; $r \geq l$ (F – заданная положительная постоянная, имеющая размерность силы).

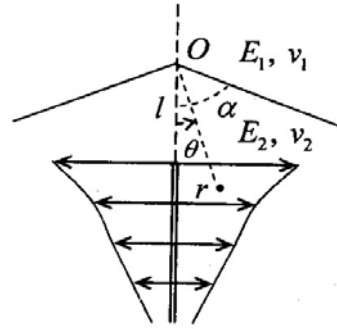


Рис. 1

С учетом симметрии граничные условия задачи запишем так:

$$\theta = \alpha, \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \quad (1.1)$$

$$\theta = 0, \tau_{r\theta} = 0; \quad \theta = \pi, \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0;$$

$$\theta = 0, r < l, u_\theta = 0; \quad \theta = 0, r > l, \sigma_\theta = -F/r^2 \quad (1.2)$$

$$(0 \leq \theta \leq \pi; \langle a \rangle - \text{скачок } a).$$

Целью данной работы является исследование и анализ поведения напряжений вблизи конца трещины.

§2. Решение уравнения Винера – Хопфа и определение коэффициента интенсивности напряжений.

Для построения точного решения рассматриваемой задачи теории упругости используем метод Винера – Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [1, 7, 8].

Применяя преобразование Меллина

$$m^*(p) = \int_0^\infty m(r)r^p dr$$

с комплексным параметром p к уравнениям равновесия, условию совместности деформации, закону Гука, условиям (1.1) и учитывая условия (1.2), приходим к следующему функциональному уравнению Винера – Хопфа:

$$\Phi^-(p) + \frac{\sigma}{p-1} = \text{ctg } p\pi G(p)\Phi^+(p); \quad G(p) = \frac{\tilde{\Delta}(p)\sin p\pi}{2\Delta(p)\cos p\pi}; \quad (2.1)$$

$$\Delta(p) = \delta_0(p) + \delta_1(p)e + \delta_2(p)e^2; \quad \tilde{\Delta}(p) = \tilde{\delta}_0(p) + \tilde{\delta}_1(p)e + \tilde{\delta}_2(p)e^2;$$

$$\delta_0(p) = (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)[\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha];$$

$$\delta_1(p) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times$$

$$\times [\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\alpha_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha);$$

$$\delta_2(p) = [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\alpha_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha);$$

$$\tilde{\delta}_0(p) = -4(\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha)[\mathfrak{x}_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha];$$

$$\tilde{\delta}_1(p) = (1 + \mathfrak{x}_1)(1 + \mathfrak{x}_2) \sin 2p\pi + 4(\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha) \times$$

$$\times [\mathfrak{x}_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \times$$

$$\times [(1 + \mathfrak{x}_1)(1 + \mathfrak{x}_2) - 4(\mathfrak{x}_2 \sin^2 p\alpha + p^2 \sin^2 \alpha)];$$

$$\tilde{\delta}_2(p) = [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] [(1 + \mathfrak{x}_2)^2 - 4(\mathfrak{x}_2 \sin^2 p\alpha + p^2 \sin^2 \alpha)];$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0; \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}; \quad \mathfrak{x}_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}; \quad \sigma = \frac{F}{l^2};$$

$$\Phi^-(p) = \int_0^1 \sigma_\theta(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^+(p) = \frac{E_2}{2(1 - \nu_2^2)} \int_1^\infty \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \Big|_{r=\rho l} \rho^p d\rho.$$

Здесь $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_{1,2}$ – достаточно малые положительные числа); $E_{1,2}$ – модули Юнга; $\nu_{1,2}$ – коэффициенты Пуассона.

Функция $\Phi^+(p)$ – аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, а функция $\Phi^-(p)$ – аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -\varepsilon_1$.

Функция $G(it)$ ($-\infty < t < \infty$) представляет собой действительную положительную четную функцию t , стремящуюся к единице при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, индекс функции $G(p)$ по мнимой оси равен нулю. Поскольку, кроме того, функция $G(p)$ на мнимой оси удовлетворяет условию Гельдера, имеет место факторизация [1]

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0); \quad \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z - p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0; \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Функция $G^+(p)$ – аналитична, не имеет нулей и стремится к единице при $p \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, а функция $G^-(p)$ – аналитична, не имеет нулей и стремится к единице при $p \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$.

Функцию $p \operatorname{ctg} p\pi$ можно факторизовать так [3]:

$$p \operatorname{ctg} p\pi = K^+(p)K^-(p); \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)} \quad (2.3)$$

($\Gamma(z)$ – гамма-функция). Функция $K^+(p)$ – аналитична и не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 1/2$, а функция $K^-(p)$ – аналитична и не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -1/2$. Справедливы асимптотики:

$$K^+(p) \sim \sqrt{-p}; \quad K^-(p) \sim \sqrt{p} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (2.4)$$

С помощью факторизаций (2.2), (2.3) уравнение (2.1) представим в виде

$$\frac{G^-(p)\Phi^-(p)}{K^-(p)} + \frac{\sigma G^-(p)}{(p-1)K^-(p)} = \frac{K^+(p)G^+(p)\Phi^+(p)}{p} \quad (\operatorname{Re} p = 0). \quad (2.5)$$

Имеет место следующее представление:

$$\frac{\sigma G^-(p)}{(p-1)K^-(p)} = \frac{\sigma}{p-1} \left[\frac{G^-(p)}{K^-(p)} - \frac{G^-(1)}{K^-(1)} \right] + \frac{\sigma G^-(1)}{(p-1)K^-(1)} \quad (\operatorname{Re} p = 0). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.5), получаем

$$\frac{K^+(p)G^+(p)\Phi^+(p)}{p} - \frac{\sigma G^-(1)}{(p-1)K^-(1)} = \frac{G^-(p)\Phi^-(p)}{K^-(p)} + \frac{\sigma}{p-1} \left[\frac{G^-(p)}{K^-(p)} - \frac{G^-(1)}{K^-(1)} \right] \quad (2.7)$$

$$(\operatorname{Re} p = 0).$$

Функция в левой части (2.7) – аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, а функция в правой части (2.7) – аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. В силу принципа аналитического продолжения эти функции равны одной и той же функции, аналитической во всей плоскости p .

Исходя из известных асимптотик

$$\theta = 0, r \rightarrow l-0, \sigma_\theta \sim \frac{K_l}{\sqrt{2\pi(l-r)}}; \quad \theta = 0, r \rightarrow l+0, \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \sim \frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2} \frac{K_l}{\sqrt{2\pi(r-l)}}$$

(K_l – коэффициент интенсивности напряжений в конце трещины), согласно теореме абелева типа [7] имеем

$$\Phi^+(p) \sim \frac{K_l}{\sqrt{-2pl}}; \quad \Phi^-(p) \sim \frac{K_l}{\sqrt{2pl}} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (2.8)$$

Из (2.2), (2.4), (2.8) следует, что функции в левой и правой частях (2.7) стремятся к нулю при $p \rightarrow \infty$ в полуплоскостях $\operatorname{Re} p < 0$ и $\operatorname{Re} p > 0$, соответственно. В силу теоремы Лиувилля [3] единая аналитическая функция тождественно равно нулю во всей плоскости p .

Таким образом, решение уравнения (2.1) имеет вид

$$\Phi^+(p) = \frac{\sigma G^-(1)p}{K^-(1)(p-1)K^+(p)G^+(p)} \quad (\operatorname{Re} p < 0); \quad (2.9)$$

$$\Phi^-(p) = \frac{\sigma K^-(p)}{(p-1)G^-(p)} \left[\frac{G^-(1)}{K^-(1)} - \frac{G^-(p)}{K^-(p)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

С помощью (2.9) определяем асимптотику

$$\Phi^+(p) \sim \frac{\sigma G^-(1)}{K^-(1)\sqrt{-p}} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (2.10)$$

Согласно (2.8), (2.10) получим следующую формулу для коэффициента интенсивности напряжений в конце трещины:

$$K_l = \sqrt{\frac{\pi}{2}} G^-(1) \frac{F}{l^{3/2}}, \quad \text{где } G^-(1) = \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln G(it)}{t^2+1} dt \right].$$

§3. Анализ распределения напряжений вблизи конца трещины.

Зависимости безразмерного коэффициента интенсивности напряжений $k(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) = K_l l^{3/2} / F$ от угла α и от отношения модулей Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$ изображены на

рис. 2, 3 ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$). Кривые I – IV соответствуют случаям $e_0 = 2, 3, 5, 10$, а кривые 1 – 7 соответствуют случаям $\alpha^\circ = 20^\circ, 50^\circ, 80^\circ, 110^\circ, 125^\circ, 140^\circ, 170^\circ$.

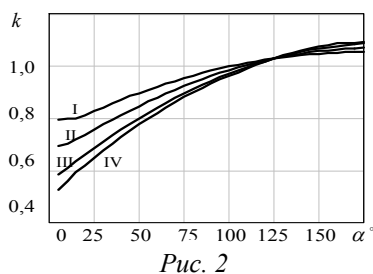


Рис. 2

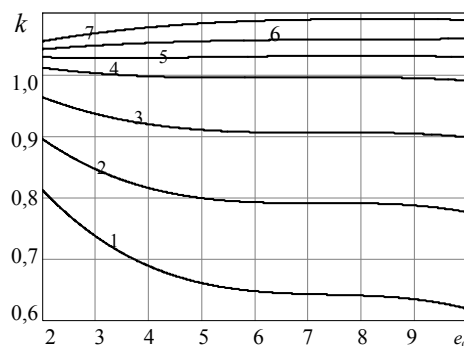


Рис. 3

Некоторые значения k приведены в таблице.

α°	e_0			
	2	3	5	10
15	0,799	0,718	0,635	0,591
30	0,841	0,775	0,710	0,677
45	0,884	0,829	0,778	0,753
60	0,920	0,879	0,839	0,820
75	0,953	0,922	0,894	0,880
105	1,004	0,993	0,983	0,973
120	1,023	1,020	1,017	1,017
135	1,037	1,041	1,046	1,049
150	1,047	1,056	1,067	1,074
165	1,053	1,065	1,080	1,087

Анализ полученных результатов позволяет сформулировать следующие выводы.

1. С ростом нагрузки концентрация напряжений вблизи конца трещины усиливается. Чем больше расстояние между концом трещины и угловой точкой, тем слабее концентрация напряжений вблизи конца трещины.

2. С ростом угла α концентрация напряжений вблизи конца трещины усиливается. Если $\alpha^\circ \leq 120^\circ$, то с увеличением жесткости первого материала концентрация напряжений вблизи конца трещины ослабевает, а если $\alpha^\circ \geq 130^\circ$ – усиливается. В частности, в случае, когда упругий клин с трещиной находится в обойме из более жесткого материала ($\alpha^\circ < 90^\circ$), имеем: чем жестче обойма, тем слабее концентрация напряжений вблизи конца трещины.

3. Если упругая плоскость с трещиной содержит остроугольное клиновидное включение из более жесткого материала ($\alpha^\circ > 135^\circ$), то – чем жестче включение, тем сильнее концентрация напряжений вблизи конца трещины.

4. На промежутке $120^\circ < \alpha^\circ < 130^\circ$ существуют значения угла, при которых с увеличением жесткости первого материала концентрация напряжений вблизи конца трещины: а) ослабевает; б) сначала ослабевает, а затем усиливается; в) усиливается.

Заключение.

На основе полученного в данной работе точного решения симметричной задачи механики разрушения композитных материалов об упругом равновесии кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей внутреннюю полубесконечную нагруженную трещину, изучено влияние изменения нагрузки, расстояния от конца трещины до угловой точки, угла и упругих постоянных на уровень концентрации напряжений вблизи конца трещины.

РЕЗЮМЕ. Методом Вінера – Хопфа побудовано точний розв’язок симетричної задачі механіки руйнування композитних матеріалів про пружну рівновагу кусково-однорідної ізотропної площини з границею поділу середовищ у формі сторін кута, яка містить внутрішню напівнескінченну навантажену тріщину.

1. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. *Гузъ А.Н.* Основы механики разрушения композитов при сжатии: В 2-х т. – К.: Литера, 2008. – 592 с. (т. 1), 736 с. (т. 2).
3. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
4. *Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4-х т.; Т.2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Саврук М.П.* – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.
5. *Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М., Рыбкин М.Б.* Деформация составной упругой плоскости, ослабленной периодической системой произвольно нагруженных щелей // Прикл. математика и механика. – 1981. – **45**, N 6. – С. 1088 – 1094.
6. *Неклассические проблемы механики разрушения / Под общ. ред. Гузя А. Н.:* В 4-х т. – К.: Наук. думка, 1990 – 1992. – 312 с. (т. 1); 288 с. (т. 2); 248 с. (т. 3); 456 с. (т. 4).
7. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
8. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
9. *Cherepanov G.P.* Mechanics of brittle fracture. – N.-Y.: McGraw-Hill, 1979. – 952 p.
10. *Comninou M., Schmueser D.* The interface crack in a combined tension-compression and shear field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1979. – **46**. – P. 345 – 348.
11. *Erdogan F.* Fracture problems in composite materials // Eng. Fract. Mech. – 1972. – **4**, N 4. – P. 811 – 840.
12. *Erdogan F., Gupta G. D., Ratwami M.* Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1974. – **41**, N 4. – P. 1007 – 1013.
13. *Guz A.N.* Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N1. – P. 1 – 57.
14. *Guz A.N., Guz I.A.* Analytical solution of stability problem for two composite half plane compressed along interacting cracks // Composites. – 2000. – **31**, Part B. – P. 405 – 411.
15. *Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V., Men'shikov V.A.* Three-Dimensional Problems in the Dynamic Fracture Mechanics of Materials with Interface Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N1. – P. 1 – 61.
16. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chernoiivan Yu. A.* Initial Fracture of a Viscoelastic Isotropic Plate with Two Collinear Cracks of Equal Length // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N3. – P. 310 – 320.
17. *Kassir M.K., Sih G.C.* Mechanics of Fracture. Three Dimensional Crack Problems. – Leyden: Noordhoff, 1975. – 452 p.
18. *Parihar K.S., Garg A.C.* An infinite row of collinear cracks at the interface of two bonded dissimilar elastic half planes // Eng. Fract. Mech. – 1975. – **7**, N 4. – P. 751 – 759.
19. *Rice J.R.* Elastic fracture mechanics concept for interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – **55**. – P. 98 – 103.

Поступила 01.08.2013

Утверждена в печать 19.02.2015