

Н. П. Семенюк, В. М. Трач, Н. Б. Жукова

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ  
КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; compos@inmtech.kiev.ua*

**Abstract.** A technique of analysis of stability of the layered cylindrical shells is developed with allowance for anisotropy that is caused by presence in the layer package the layers with one plane of symmetry. The system of differential equations is obtained basing on Timoshenko hypotheses in displacements. A dependence of critical loads on directions of reinforcing the monolayers, their number, thickness, and is studied for the case of axial compression.

**Key words:** layered cylindrical shell, anisotropic material, Timoshenko hypotheses, stability, axial compression, transverse shear stiffness.

**Введение.**

Цилиндрические оболочки из композитов широко используются в различных конструкциях современной техники. Во многих случаях условия их эксплуатации таковы, что в оболочках возникают сжимающие напряжения, которые могут достигать критических значений. Величины этих напряжений могут быть известны из предварительно проведенных испытаний или получены расчетным путем. В настоящее время разработаны методы расчета устойчивости оболочек из композитов с использованием математических моделей различной степени точности [1 – 7, 9]. Независимо от кинематических соотношений и уравнений равновесия используемой теории в большинстве работ принимается структурная идеализация композита, материал которого имеет три плоскости симметрии. Такая модель обоснована тем, что при изготовлении оболочек слоистый пакет формируется с учетом анизотропии, возникающей от несовпадения направлений армирования с осями оболочки. При этом выбирается подходящее чередование элементарных слоев различного направления так, что при их взаимодействии внутренние напряжения взаимно уравниваются. Известно [3, 20], что это справедливо, если количество слоев стремится к бесконечности, а толщина слоев – к нулю. Очевидно, что элементарный слой композита не может быть тоньше, чем диаметр волокон, а толщина оболочки в различных изделиях имеет ограничения. Поэтому существует необходимость в разработке методов решения задач теории оболочек, в том числе и задач о нелинейном деформировании и устойчивости оболочек из композитов с использованием более общей модели композита с наименьшим уровнем симметрии материала.

В работах [18, 19] экспериментально и с использованием численных методов (МКЭ) показано, что цилиндрическая оболочка, изготовленная навивкой на цилиндрическую оправу четырех слоев  $(+\varphi, -\varphi)_s$ , теряет устойчивость по форме с наклоненными к оси вмятинами, т.е. закручивается при нагружении только в направлении оси. Этот эффект учитывался в ряде работ, которые указаны в [3, 18]. Однако у рассмотренных оболочек, как и в случае изотропных и ортотропных, наблюдаются существенные несоответствия между экспериментом и теорией. Начальное закритическое поведение и чувствительность к несовершенствам анизотропных оболочек с использованием асимптотического метода Койтера [11, 12], рассмотрены в ряде работ [3, 15 – 17].

В монографии [3] изложены решения ряда задач о нелинейном деформировании и устойчивости оболочек нулевой гауссовой кривизны и оболочек отрицательной кривизны при взаимодействии растяжения, изгиба и кручения, которые возникают в результате структурной несбалансированности пакета слоев. В работах [18 – 21], как и в [3, 10], в основу разработанных расчетных моделей положены уравнения теории анизотропных оболочек Кирхгофа – Лява. Для оболочек из композитов, если они не очень тонкие, важным фактором, влияющим на их критические нагрузки, является пониженная сопротивляемость поперечным сдвигам.

В настоящей работе для решения задачи об устойчивости анизотропных оболочек из композитов используется теория оболочек Тимошенко – Миндлина. Аналитическое решение получено в комплексных тригонометрических рядах, оно более точное, чем одночленное в виде формул, но менее общее, чем решение с помощью МКЭ. Его преимуществом является возможность проведения параметрических исследований без значительных затрат времени при использовании вычислительной техники.

### §1. Постановка задачи. Основные соотношения и уравнения.

Полагаем, что оболочка изготовлена из композита, состоящего из монослоев армированного высокомодульными волокнами связующего. Главные направления упругости такого слоя определяются осями 1, 2, 3, первая из которых коллинеарна с волокнами, а две другие лежат в плоскости изотропии. Так как монослой имеет малую толщину, то ось 2 примем лежащей в его плоскости, а ось 3 – перпендикулярно к ней. Эта ось имеет такое же направление, как и ось  $z$  системы координат оболочки. В теории оболочек Тимошенко – Миндлина [5] напряжения  $\sigma_{zz}$  принимают равными нулю; следовательно, и  $\sigma_{33} = 0$ . Зависимости между напряжениями и деформациями для монослоя при учете этого условия преобразуются к виду

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}; \quad (1.1)$$

$$\left[ \begin{aligned} b_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}; & b_{12} &= \nu_2 b_{11} = \nu_1 b_{22}; & b_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}; \\ b_{44} &= G_{23}; & b_{55} &= G_{13}; & b_{66} &= G_{12} \quad (G_{12} = G_{13}). \end{aligned} \right].$$

Поверхность приведения оболочки задаем в системе координат  $x, y$ , которые могут не совпадать с осями 1, 2.

Пусть оси 1, 2 повернуты вокруг оси  $z$  на некоторый угол  $\varphi$ . Соотношения упругости (1.1) относительно осей  $x, y$  примут вид

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_{11} & b'_{12} & 0 & 0 & b'_{16} \\ b'_{12} & b'_{22} & 0 & 0 & b'_{26} \\ 0 & 0 & b'_{44} & b'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & b'_{45} & b'_{55} & 0 \\ b'_{16} & b'_{26} & 0 & 0 & b'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

где  $b'_{ij}$  – константы упругости, которые выражаются через исходные  $b_{ij}$  с помощью линейных зависимостей от тригонометрических функций угла  $\varphi$ . В векторно-матричном виде имеем равенства:

$$\begin{bmatrix} b'_{11} \\ b'_{22} \\ b'_{12} \\ b'_{66} \\ 2b'_{16} \\ 2b'_{26} \\ 2b'_{55} \\ 2b'_{44} \\ 2b'_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & 0 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_2 & 0 & u_3 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & -u_3 & 0 \\ u_5 & 0 & 0 & -u_3 & 0 \\ 0 & 0 & -u_2 & 0 & -2u_3 \\ 0 & 0 & -u_2 & 0 & 2u_3 \\ u_8 & -u_9 & 0 & 0 & 0 \\ u_8 & u_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u_9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \\ \cos 4\varphi \\ \sin 4\varphi \end{bmatrix}; \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{8}(3b_{11} + 3b_{22} + 2b_{12} + 4b_{66}); & u_2 &= \frac{1}{2}(b_{11} - b_{22}); \\ u_3 &= \frac{1}{8}(b_{11} + b_{22} - 2b_{12} - 4b_{66}); & u_4 &= \frac{1}{8}(b_{11} + b_{22} + 6b_{12} - 4b_{66}); \\ u_5 &= \frac{1}{8}(b_{11} + b_{22} - 2b_{12} + 4b_{66}); & u_8 &= b_{55} + b_{44}, & u_9 &= b_{55} - b_{44}. \end{aligned}$$

Соотношения (1.2) имеют вид, характерный для анизотропного тела с одной плоскостью симметрии [8]. Отметим особенность этих соотношений, связанную с наличием коэффициентов матрицы упругих констант  $b'_{16}$ ,  $b'_{26}$ ,  $b'_{45}$ . Согласно выражениям (1.3), эти константы могут быть положительными, отрицательными или равными нулю в зависимости от угла  $\varphi$ . Этот факт существенным образом, как показано ниже, влияет на жесткостные параметры слоистых оболочек.

Если оболочка состоит из  $N$  монослоев однонаправленного композита, то в соответствии с гипотезами Тимошенко соотношения упругости можно представить в таком виде:

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ T_{23} \\ T_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$\left( C_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^k; B_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^k S_k; D_{ij} = \sum_{k=1}^N (D_{ij}^k + C_{ij}^k S_k^2); i, j = 1, 2, 6; C_{ij}^k, D_{ij}^k - \text{жесткости } k\text{-го монослоя}; C_{ij}^k = b'_{ij} t_k; D_{ij}^k = \frac{1}{12} t_k^3 b'_{ij}; S_k - \text{значение координаты } z, \text{ определяющей положение срединной поверхности } k\text{-го слоя} \right)$

Линеаризованные выражения для деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и приращений кривизн и кручения через перемещения  $u, v, w$  и углы поворота  $\theta, \psi$  приняты в таком виде:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial \xi}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{w}{R}; \quad \varepsilon_{12} = \omega_1 + \omega_2;$$

$$\varepsilon_{13} = \theta + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \varepsilon_{23} = \psi + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R};$$

$$k_{11} = k_1; \quad k_{22} = k_2 + \frac{\varepsilon_2}{R}; \quad k_{12} = t_1 + t_2 + \frac{\omega_2}{R}; \quad (1.5)$$

$$k_1 = \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad k_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad t_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad t_2 = \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad \omega_1 = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \omega_2 = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Уравнения равновесия в окрестности критической точки в начале закритического состояния запишем в перемещениях, подставив в уравнения равновесия [4, 5] вместо усилий и моментов их выражения через деформации (1.4), заменив последние перемещения согласно (1.5). Получим пять уравнений относительно пяти разрешающих функций  $u, v, w, \theta, \psi$ . Представим их в виде

$$\sum_{j=1}^5 \Delta_{ij} u_j - \lambda (m_i) \begin{pmatrix} T_{11}^0 \\ 2S^0 \\ T_{22}^0 \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, 5,$$

где  $m_i$  – векторы-строки, компонентами которых являются производные от перемещений, т.е. имеем

$$m_1 = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right);$$

$$m_2 = \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R^2} \right); \quad (1.6)$$

$$m_3 = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R^2} \right);$$

$$m_4 = (0, 0, 0), \quad m_5 = (0, 0, 0),$$

$T_{11}^0, 2S^0, T_{22}^0$  – докритические усилия сжатия и кручения, изменяющиеся пропорционально коэффициенту  $\lambda$ ;  $\Delta_{ij} u_j$  – дифференциальные операторы от перемещений  $u_j$  ( $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w, u_4 = \theta, u_5 = \psi$ ). Приведем выражения этих операторов, составляющих основу расчетной модели:

$$\Delta_{11} u = C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left( C_{16} + \frac{1}{R} B_{16} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left( C_{66} + \frac{2}{R} B_{66} + \frac{1}{R^2} D_{66} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\Delta_{12} v = C_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left( C_{12} + C_{16} + \frac{1}{R} B_{12} + \frac{1}{R} B_{66} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left( C_{26} + \frac{2}{R} B_{26} + \frac{1}{R^2} D_{16} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2};$$

$$\Delta_{13} w = -\frac{1}{R} \left( C_{12} + \frac{1}{R} B_{12} \right) \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{R} \left( C_{26} + \frac{2}{R} B_{26} + \frac{1}{R^2} D_{26} \right) \frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\Delta_{14} \theta = B_{11} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \left( 2B_{16} + \frac{1}{R} D_{16} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + \left( B_{66} + \frac{1}{R} D_{66} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2};$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{15}\psi &= B_{16} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left( B_{12} + B_{66} + \frac{1}{R} D_{66} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left( B_{26} + \frac{1}{R} D_{26} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}; \\
\Delta_{21}u &= \left( C_{16} - \frac{1}{R} B_{16} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( C_{12} + C_{66} - \frac{1}{R^2} D_{12} - \frac{1}{R^2} D_{66} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left( C_{26} - \frac{1}{R^2} D_{26} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\
\Delta_{22}v &= \left( C_{66} - \frac{1}{R} B_{66} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left( 2C_{26} - \frac{1}{R} B_{26} - \frac{1}{R} D_{26} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left( C_{22} - \frac{1}{R^2} D_{22} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}; \\
\Delta_{23}w &= -\frac{1}{R} \left[ \left( C_{26} - \frac{1}{R^2} D_{26} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left( C_{22} - \frac{1}{R^2} D_{22} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right]; \\
\Delta_{24}\theta &= \left( B_{16} - \frac{1}{R} D_{16} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \left( B_{66} + B_{12} - \frac{1}{R} D_{12} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + \left( B_{26} - \frac{1}{R} D_{26} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}; \\
\Delta_{25}\psi &= \left( B_{66} - \frac{1}{R} D_{66} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \left( B_{26} - \frac{1}{R} D_{26} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left( B_{22} - \frac{1}{R} D_{22} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}; \\
\Delta_{31}u &= \frac{1}{R} C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \left( C_{26} + \frac{1}{R} B_{26} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \left( 3B_{16} + \frac{1}{R} D_{16} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \\
&\quad + \left( B_{12} + 2B_{66} + \frac{2}{R} D_{66} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \left( B_{26} + \frac{1}{R} D_{26} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}; \\
\Delta_{32}v &= \frac{1}{R} C_{26} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \left( C_{22} + \frac{1}{R} B_{22} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \left( B_{12} + \frac{1}{R} D_{12} + 2B_{66} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \\
&\quad + \left( 3B_{26} + \frac{2}{R} D_{26} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \left( B_{22} + \frac{1}{R} D_{22} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}; \\
\Delta_{33}w &= \\
&= -\frac{1}{R} \left[ \frac{1}{R} \left( C_{22} + \frac{1}{R} B_{22} \right) w + \left( B_{12} + \frac{1}{R} D_{12} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \left( B_{26} + \frac{1}{R} D_{26} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left( B_{22} + \frac{1}{R} D_{66} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]; \\
\Delta_{34}\theta &= \frac{1}{R} B_{12} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{R} B_{26} \frac{\partial \theta}{\partial y} + D_{11} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{26}) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3}; \\
\Delta_{35}\psi &= \frac{1}{R} B_{26} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{R} B_{22} \frac{\partial \psi}{\partial y} + D_{16} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + D_{22} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}; \\
\Delta_{41}u &= B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( 2B_{16} + \frac{1}{R} D_{16} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left( B_{66} + \frac{1}{R} D_{66} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\
\Delta_{42}v &= B_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left( B_{12} + \frac{1}{R} D_{12} + B_{66} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left( B_{26} + \frac{1}{R} D_{26} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{R} C_{45}v;
\end{aligned}$$

$$\Delta_{43}w = -\left[\frac{1}{R}\left(B_{12} + \frac{1}{R}D_{12}\right) + C_{55}\right]\frac{\partial w}{\partial x} - \left[\frac{1}{R}\left(B_{26} + \frac{1}{R}D_{26}\right) + C_{45}\right]\frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\Delta_{44}\theta = D_{11}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + 2D_{16}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} + D_{66}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} - C_{55}\theta;$$

$$\Delta_{45}\psi = D_{16}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66})\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + D_{26}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - C_{45}\psi;$$

$$\Delta_{51}u = B_{11}\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \left(B_{66} + \frac{1}{R}D_{66} + B_{12}\right)\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} + \left(B_{26} + \frac{1}{R}D_{26}\right)\frac{\partial^2u}{\partial y^2};$$

$$\Delta_{52}v = B_{66}\frac{\partial^2v}{\partial x^2} + \left(2B_{26} + \frac{1}{R}D_{26}\right)\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y} + \left(B_{22} + \frac{1}{R}D_{22}\right)\frac{\partial^2v}{\partial y^2} - \frac{1}{R}C_{44}v;$$

$$\Delta_{53}w = -\left[\frac{1}{R}\left(B_{26} + \frac{1}{R}D_{26}\right) + C_{45}\right]\frac{\partial w}{\partial x} - \left[\frac{1}{R}\left(B_{22} + \frac{1}{R}D_{22}\right) + C_{44}\right]\frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\Delta_{54}\theta = D_{16}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + (D_{66} + D_{12})\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} + D_{26}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} - C_{45}\theta;$$

$$\Delta_{55}\psi = D_{66}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2D_{26}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + D_{22}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - C_{44}\psi.$$

## §2. Разрешающая система уравнений и ее решение.

Для построения системы уравнений, которую удобно использовать для получения аналитического решения, представим все переменные, разрешающие функции и жесткости в безразмерном виде. Полагаем

$$x = R\xi; \quad y = R\varphi; \quad u = t^2\bar{u}/R; \quad v = t^2\bar{v}/R; \quad w = t\bar{w}; \quad \theta = t\bar{\theta}/R; \quad \psi = t\bar{\psi}/R;$$

$$a_{11}^{(1)} = C_{11}/C_0; \quad a_{12}^{(1)} = 2(C_{16} + B_{16}/R)/C_0; \quad a_{13}^{(1)} = (C_{66} + 2B_{66}/R + D_{66}/R)/C_0;$$

$$a_{21}^{(1)} = C_{16}/C_0; \quad a_{22}^{(1)} = (C_{12} + C_{66} + B_{12}/R + B_{66}/R)/C_0; \quad a_{23}^{(1)} = (C_{26} + 2B_{26}/R + D_{26}/R^2)/C_0;$$

$$b_{31}^{(1)} = -R(C_{12} + B_{12}/R)/C_0t; \quad b_{32}^{(1)} = R(C_{26} + 2B_{26}/R + D_{26}/R^2)/C_0t;$$

$$a_{41}^{(1)} = B_{11}/C_0t; \quad a_{42}^{(1)} = (2B_{16} + D_{16}/R)/C_0t; \quad a_{43}^{(1)} = (B_{66} + D_{66}/R)/C_0t;$$

$$a_{51}^{(1)} = B_{16}/C_0t; \quad a_{52}^{(1)} = (B_{12} + B_{66} + D_{66}/R)/C_0t; \quad a_{53}^{(1)} = (B_{26} + D_{66}/R)/C_0t;$$

$$a_{11}^{(2)} = (C_{16} - B_{16}/R)/C_0; \quad a_{12}^{(2)} = (C_{12} + C_{66} - D_{12}/R^2 - D_{66}/R^2)/C_0;$$

$$a_{13}^{(2)} = (C_{26} - D_{26}/R^2)/C_0; \quad a_{21}^{(2)} = (C_{66} - B_{66}/R)/C_0;$$

$$a_{22}^{(2)} = (2C_{26} - B_{26}/R - D_{26}/R^2)/C_0; \quad a_{23}^{(2)} = (C_{22} - D_{22}/R^2)/C_0;$$

$$b_{31}^{(2)} = -R(C_{26} - D_{26}/R^2)/C_0t; \quad b_{32}^{(2)} = -R(C_{22} - D_{22}/R^2)/C_0t;$$

$$\begin{aligned}
a_{41}^{(2)} &= (B_{16} - D_{16}/R)/C_0 t; & a_{42}^{(2)} &= (B_{66} + B_{12} - D_{12}/R - D_{66}/R)/C_0 t; \\
a_{43}^{(2)} &= (B_{26} + D_{26}/R)/C_0 t; & a_{51}^{(2)} &= (B_{66} + D_{66}/R)/C_0 t; \\
a_{52}^{(2)} &= 2(B_{26} - D_{26}/R)/C_0 t; & a_{53}^{(2)} &= (B_{22} - D_{22}/R)/C_0 t; \\
b_{11}^{(3)} &= C_{12}/C_0; & b_{12}^{(3)} &= (C_{26} + B_{26}/R)/C_0; & c_{11}^{(3)} &= B_{11}/C_0 R; & c_{12}^{(3)} &= (3B_{16} + D_{16}/R)/C_0; \\
c_{13}^{(3)} &= (B_{12} + 2B_{66} + 2D_{66}/R)/C_0 R; & c_{14}^{(3)} &= (B_{26} + D_{26}/R)/C_0 R; \\
b_{21}^{(3)} &= C_{26}/C_0; & b_{22}^{(3)} &= (C_{22} + B_{22}/R)/C_0; & c_{21}^{(3)} &= B_{16}/C_0 R; & c_{22}^{(3)} &= (B_{12} + 2B_{66} + 2D_{12}/R)/C_0 R; \\
c_{23}^{(3)} &= (2B_{26} + 2D_{26}/R)/C_0 R; & c_{24}^{(3)} &= (B_{22} + D_{22}/R)/C_0 R; \\
a_{33}^{(3)} &= (B_{12} + D_{12}/R)/C_0 t; & a_{34}^{(3)} &= 2(B_{26} + D_{26}/R)/C_0 t; & a_{35}^{(3)} &= (B_{22} + D_{22}/R)/C_0 t; \\
b_{41}^{(3)} &= B_{12}/C_0 t; & b_{42}^{(3)} &= B_{26}/C_0 t; & c_{41}^{(3)} &= D_{11}/C_0 t R; & c_{42}^{(3)} &= 3D_{16}/C_0 t R; \\
c_{43}^{(3)} &= (D_{12} + 2D_{66})/C_0 t R; & c_{44}^{(3)} &= D_{26}/C_0 t R; \\
b_{51}^{(3)} &= B_{26}/C_0 t; & b_{52}^{(3)} &= B_{22}/C_0 t; & c_{51}^{(3)} &= D_{16}/C_0 t R; \\
c_{52}^{(3)} &= (D_{12} + 2D_{66})/C_0 t R; & c_{53}^{(3)} &= 3D_{26}/C_0 t R; & c_{54}^{(3)} &= D_{22}/C_0 t R; \\
a_{11}^{(4)} &= B_{11}/C_0 t; & a_{12}^{(4)} &= (2B_{16} + 2D_{16}/R)/(C_0 t); & a_{13}^{(4)} &= (B_{66} + D_{66}/R)/C_0 t; \\
a_{21}^{(4)} &= B_{16}/C_0 t; & a_{22}^{(4)} &= (B_{12} + D_{12}/R + B_{66})/C_0 t; & a_{23}^{(4)} &= (B_{26} + D_{26}/R)/C_0 t; \\
b_{31}^{(4)} &= -[(R(B_{12} + D_{12}/R)/t)/C_0 t + RC_{55}/C_0 t]; \\
b_{32}^{(4)} &= -[(R(B_{26} + D_{26}/R)/t)/C_0 t + RC_{44}/C_0 t]; \\
a_{41}^{(4)} &= D_{11}/C_0 t^2; & a_{42}^{(4)} &= 2D_{16}/C_0 t^2; & a_{43}^{(4)} &= D_{66}/C_0 t^2; & a_{51}^{(4)} &= D_{16}/C_0 t^2; \\
a_{52}^{(4)} &= (D_{12} + D_{66})/C_0 t^2; & a_{53}^{(4)} &= D_{26}/C_0 t^2; \\
a_{11}^{(5)} &= B_{16}/C_0 t; & a_{12}^{(5)} &= (B_{12} + B_{66} + D_{66}/R)/(C_0 t); & a_{13}^{(5)} &= (B_{26} + D_{26}/R)/(C_0 t); \\
a_{21}^{(5)} &= B_{66}/C_0 t; & a_{22}^{(5)} &= (2B_{26} + 2D_{26}/R)/C_0 t; & a_{23}^{(5)} &= (B_{22} + D_{22}/R)/C_0 t; \\
b_{31}^{(5)} &= -\frac{R}{t}((B_{26} + D_{26}/R)/C_0 t + RC_{45}/C_0 t); & b_{32}^{(5)} &= -\frac{R}{t}((B_{22} + D_{22}/R)/C_0 t + RC_{44}/C_0 t); \\
a_{41}^{(5)} &= D_{16}/C_0 t^2; & a_{42}^{(5)} &= (D_{12} + D_{16})/C_0 t^2; & a_{43}^{(5)} &= D_{26}/C_0 t^2; & a_{51}^{(5)} &= D_{66}/C_0 t^2; \\
a_{52}^{(5)} &= 2D_{66}/C_0 t^2; & a_{53}^{(5)} &= D_{22}/C_0 t^2.
\end{aligned}$$

Для записи уравнений (1.6) в безразмерном виде целесообразно использовать компактность векторных операций. Если представить как векторы  $\Delta(\cdot)$  – совокупность вторых производных от некоторой функции  $(\cdot)$ ,  $\Delta_1(\cdot)$  – первых и  $\Delta_2(\cdot)$  – третьих аналогично, т.е.

$$\Delta(\cdot) = \left( \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \zeta \partial \varphi}, \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \varphi^2} \right); \quad \Delta_1(\cdot) = \left( \frac{\partial(\cdot)}{\partial \zeta}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial \varphi} \right);$$

$$\Delta_2(\cdot) = \left( \frac{\partial^3(\cdot)}{\partial \zeta^3}, \frac{\partial^3(\cdot)}{\partial \zeta^2 \partial \varphi}, \frac{\partial^3(\cdot)}{\partial \zeta \partial \varphi^2}, \frac{\partial^3(\cdot)}{\partial \varphi^3} \right),$$

а также как векторы – столбцы

$$A_k^{(i)} = (a_{k1}^i, a_{k2}^i, a_{k3}^i)^T; \quad B_k^{(i)} = (b_{k1}^i, b_{k2}^i)^T; \quad C_k^{(i)} = (c_{k1}^i, c_{k2}^i, c_{k3}^i, c_{k4}^i)^T, \quad k, i = 1, \dots, 5,$$

$$U = (u, v, w, \theta, \psi)^T,$$

то можем записать оператор  $L^{(i)}$  от вектора  $U$  в таком виде:

$$L^{(i)}(U) = \Delta(u)A_1^{(i)} + \Delta(v)A_2^{(i)} + \Delta(w)A_3^{(i)} + \Delta(\theta)A_4^{(i)} + \Delta(\psi)A_5^{(i)}.$$

Это дает возможность получить систему уравнений устойчивости менее громоздкую, чем исходная (1.6), и более доступную для получения аналитического решения. Представим ее в таком виде:

$$L^{(1)}(U) - \lambda \left( ha_t \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2ha_s \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \varphi} + ha_q \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3} - a_q \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) = 0;$$

$$L^{(2)}(U) - \lambda \left[ ha_t \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2ha_s \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \varphi} - \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + ha_q \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - 2v - \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right] = 0; \quad (2.1)$$

$$\Delta_1(u)B_1^{(3)} + \Delta_2(u)C_1^{(3)} + \Delta_1(v)B_2^{(3)} + \Delta_2(u)C_2^{(3)} - \frac{1}{h} b_{22}^{(3)} w +$$

$$+ \Delta_1(w)A_3^{(3)} + \Delta_1(\theta)B_4^{(3)} + \Delta_2(\theta)C_4^{(3)} + \Delta_1(\psi)B_5^{(3)} + \Delta_2(\psi)C_5^{(3)} -$$

$$- \lambda \left[ a_t \frac{\partial w}{\partial \xi^2} + 2a_s \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \varphi} + h \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + a_q \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - 2w + 3h \frac{\partial v}{\partial \varphi} + h \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right] = 0;$$

$$L^{(4)}(U) - \alpha_{45} v - \frac{1}{h} \alpha_{55} \theta - \frac{1}{h} \alpha_{45} \psi = 0;$$

$$L^{(5)}(U) - \alpha_{77} v - \frac{1}{h} \alpha_{45} \theta - \frac{1}{h} \alpha_{77} \psi = 0.$$

( $\alpha_{45} = C_{45}R/C_0t$ ;  $\alpha_{55} = C_{55}R/C_0t$ ;  $\alpha_{77} = C_{44}R/C_0t$ ;  $C_0 = C_{11}$ , но может быть выбрана равной любой другой жесткости  $C_{ij}$  или их комбинации).

Решение уравнений (2.1) будем искать при граничных условиях

$$t_{11} = 0; \quad v = 0; \quad w = 0; \quad m_{11} = 0; \quad \psi = 0; \quad \text{при } \xi = 0; \quad L/R.$$

Учитывая полноту системы тригонометрических функций, представим перемещения в виде комплексных двойных тригонометрических рядов



$$u = \sum_{m,n} u_{m,n} \cos l_m \xi l^{in\varphi}; \quad v = \sum_{m,n} v_{m,n} \sin l_m \xi l^{in\varphi}; \quad w = \sum_{m,n} w_{m,n} \sin l_m \xi l^{in\varphi};$$

$$\theta = \sum_{m,n} \theta_{m,n} \cos l_m \xi l^{in\varphi}; \quad \psi = \sum_{m,n} \psi_{m,n} \sin l_m \xi l^{in\varphi}$$

$$(l_m = m\pi R/L, \quad i = \sqrt{-1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots).$$

Для определения коэффициентов этих рядов получим систему алгебраических уравнений, выполнив интегрирование системы (2.1) по методу Бубнова – Галеркина. Эта система имеет такой вид:

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} [X_{11}^{m,k} u_{m,n} + X_{12}^{m,k} v_{m,n} + X_{13}^{m,k} w_{m,n} + X_{14}^{m,k} \theta_{m,n} + X_{15}^{m,k} \psi_{m,n} - \lambda (Y_{11}^{m,k} u_{m,n} + Y_{13}^{m,k} w_{m,n})] &= 0; \\ \sum_{m,n} [X_{21}^{m,k} u_{m,n} + X_{22}^{m,k} v_{m,n} + X_{23}^{m,k} w_{m,n} + X_{24}^{m,k} \theta_{m,n} + X_{25}^{m,k} \psi_{m,n} - \lambda (Y_{22}^{m,k} u_{m,n} + Y_{23}^{m,k} w_{m,n})] &= 0; \\ \sum_{m,n} [X_{31}^{m,k} u_{m,n} + X_{32}^{m,k} v_{m,n} + X_{33}^{m,k} w_{m,n} + X_{34}^{m,k} \theta_{m,n} + X_{325}^{m,k} \psi_{m,n} - \\ &- \lambda (Y_{31}^{m,k} u_{m,n} + Y_{32} v_{m,n} + Y_{33}^{m,k} w_{m,n})] = 0; \\ \sum_{m,n} [X_{41}^{m,k} u_{m,n} + X_{42}^{m,k} v_{m,n} + X_{43}^{m,k} w_{m,n} + X_{44}^{m,k} \theta_{m,n} + X_{45}^{m,k} \psi_{m,n}] &= 0; \\ \sum_{m,n} [X_{51}^{m,k} u_{m,n} + X_{52}^{m,k} v_{m,n} + X_{53}^{m,k} w_{m,n} + X_{54}^{m,k} \theta_{m,n} + X_{55}^{m,k} \psi_{m,n}] &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Система распадается по индексам  $n$ , но остается связанной по индексам  $m$  и  $k$ . Коэффициенты  $X_{ij}$  и  $Y_{ij}$  вычисляются по формулам:

$$X_{11} = (a_{11}^{(1)} l_m^2 + a_{13}^{(1)} n^2) \delta_m^k + ia_{12}^{(1)} n l_m \varphi(m, k); \quad X_{12} = (a_{21}^{(1)} l_m^2 + a_{23}^{(1)} n^2) \varphi(m, k) - ia_{22}^{(1)} n l_m \delta_m^k;$$

$$X_{13} = b_{31}^{(1)} l_m \delta_m^k + ib_{32}^{(1)} n \varphi(m, k); \quad X_{14} = (a_{41}^{(1)} l_m^2 + a_{43}^{(1)} n^2) \delta_m^k + ia_{42}^{(1)} n l_m \varphi(m, k);$$

$$X_{15} = (a_{51}^{(1)} l_m^2 + a_{53}^{(1)} n^2) \varphi(m, k) - ia_{52}^{(1)} n l_m \delta_m^k; \quad X_{21} = (a_{11}^{(2)} l_m^2 + a_{13}^{(2)} n^2) \varphi(m, k) + ia_{12}^{(2)} n l_m \delta_m^k;$$

$$X_{22} = (a_{21}^{(2)} l_m^2 + a_{23}^{(2)} n^2) \delta_m^k + ia_{22}^{(2)} n l_m \varphi(m, k); \quad X_{23} = b_{31}^{(2)} l_m \varphi(m, k) + ib_{32}^{(2)} n \delta_m^k;$$

$$X_{24} = (a_{41}^{(2)} l_m^2 + a_{43}^{(2)} n^2) \varphi(m, k) + ia_{42}^{(2)} n l_m \delta_m^k;$$

$$X_{25} = (a_{51}^{(2)} l_m^2 + a_{53}^{(2)} n^2) \delta_m^k - ia_{52}^{(2)} n l_m \varphi(m, k);$$

$$X_{31} = b_{11}^{(3)} l_m \delta_m^k - ib_{12}^{(3)} n \varphi(m, k) - (c_{11}^{(3)} l_m^3 + c_{13}^{(3)} l_m n^2) \delta_m^k + i(c_{12}^{(3)} n l_m^2 + c_{14}^{(3)} n^3) \varphi(m, k);$$

$$X_{32} = b_{21}^{(3)} l_m \varphi(m, k) - ib_{22}^{(3)} n \delta_m^k + (c_{21}^{(3)} l_m^3 + c_{23}^{(3)} l_m n^2) \varphi(m, k) + i(c_{22}^{(3)} n l_m^2 + c_{24}^{(3)} n^3) \delta_m^k;$$

$$X_{33} = \frac{1}{h} b_{22}^{(3)} \delta_m^k + (a_{33}^{(3)} l_m^2 + a_{35}^{(3)} n^2) \delta_m^k + ia_{34}^{(3)} \varphi(k, m) n l_m;$$

$$\begin{aligned}
X_{34} &= b_{41}^{(3)} l_m \delta_m^k - i b_{42}^{(3)} n \varphi(m, k) - (c_{41}^{(3)} l_m^3 + c_{43}^{(3)} l_m n^2) \delta_m^k + i c_{42}^{(3)} n l_m^2 \varphi(m, k) + i c_{44}^{(3)} n^3 \delta_m^k; \\
X_{35} &= -b_{51}^{(3)} l_m \varphi(m, k) - i b_{52}^{(3)} n \delta_m^k + (c_{51}^{(3)} l_m^3 + c_{53}^{(3)} l_m n^2) \varphi(m, k) + i i (c_{52}^{(3)} n l_m^2 + c_{54}^{(3)} n^3) \delta_m^k; \\
X_{41} &= (a_{11}^{(4)} l_m^2 + a_{13}^{(4)} n^2) \delta_m^k + i a_{12}^{(4)} n l_m \varphi(m, k); \\
X_{42} &= (a_{21}^{(4)} l_m^2 + a_{23}^{(4)} n^2) \varphi(m, k) - i a_{22}^{(4)} n l_m \delta_m^k + \alpha_{45} \varphi(m, k); \\
X_{43} &= b_{31}^{(4)} l_m \delta_m^k + i b_{32}^{(4)} n \varphi(m, k); \quad X_{44} = (a_{41}^{(4)} l_m^2 + a_{43}^{(4)} n^2) \delta_m^k - i a_{42}^{(4)} n l_m \varphi(m, k) + \frac{1}{h} \alpha_{55} \delta_m^k; \\
X_{45} &= (a_{51}^{(4)} l_m^2 + a_{53}^{(4)} n^2) \varphi(m, k) - i a_{52}^{(4)} n l_m \delta_m^k + \frac{1}{h} \alpha_{45} \varphi(m, k); \\
X_{51} &= (a_{11}^{(5)} l_m^2 + a_{13}^{(5)} n^2) \varphi(m, k) + i a_{12}^{(5)} n l_m \delta_m^k; \\
X_{52} &= (a_{21}^{(5)} l_m^2 + a_{23}^{(5)} n^2) \delta_m^k - i a_{22}^{(5)} n l_m \varphi(m, k) + \alpha_{77} \delta_m^k; \quad X_{53} = b_{31}^{(5)} l_m \varphi(m, k) + i b_{32}^{(5)} n \delta_m^k; \\
X_{54} &= (a_{41}^{(5)} l_m^2 + a_{43}^{(5)} n^2) \varphi(m, k) + i a_{42}^{(5)} n l_m \delta_m^k + \frac{1}{h} \alpha_{45} \varphi(m, k); \\
X_{55} &= (a_{51}^{(5)} l_m^2 + a_{53}^{(5)} n^2) \delta_m^k - i a_{52}^{(5)} n l_m \varphi(m, k) + \frac{1}{h} \alpha_{75} \delta_m^k; \\
Y_{11}^{m,k} &= h a_t l_m^2 \delta_m^k + 2 h a_s i n l_m \varphi(m, k) + h a_q n^2 \delta_m^k; \quad Y_{13}^{m,k} = a_q l_m \delta_m^k; \\
Y_{22}^{m,k} &= h [a_t l_m^2 + a_q (n^2 + 2)] \delta_m^k - 2 h a_s i n l_m \varphi(m, k); \quad Y_{23}^{m,k} = (2 a_s l_m + 3 a_q i n) \varphi(m, k); \\
Y_{31}^{m,k} &= h a_q l_m \delta_m^k; \quad Y_{32}^{m,k} = -2 h a_s l_m \varphi(m, k) - 3 h a_q i n^2 \delta_m^k; \\
Y_{33}^{m,k} &= [a_t l_m^2 + a_q (n^2 + 2)] \delta_m^k - 2 a_s i n l_m \varphi(m, k),
\end{aligned}$$

где  $\delta_m^k$  – функция Кронекера;  $\varphi(m, k) = 2(1/(m-k) + 1/(m+k))/\pi$ , числа  $m-k$ ,  $m+k$  – нечетные.

Система алгебраических уравнений (2.2) однородна. Она имеет нетривиальное решение при равном нулю определителе. Значение  $\lambda_c$ , при котором определитель равен нулю, определяет величину критической нагрузки. Если жесткости  $C_{16}$ ,  $C_{26}$  не равны нулю, то при осевой нагрузке или внешнем давлении в оболочке возникают также усилия сдвига  $S$  [3].

Изложенная выше расчетная модель использована для исследования устойчивости оболочек из композитов, состоящих из слоев с различной ориентацией главных направлений упругости.

### §3. Числовые результаты и их анализ.

При исследовании устойчивости оболочек из композитов во многих работах [13 – 21] рассмотрены конфигурации структур, состоящие из повторяющихся сочетаний ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $+45^\circ$ ,  $-45^\circ$ ). Основываясь на установленных автором статьи [14] принципах оптимизации, в работах [20, 21] получен ряд вариантов 48-слойных цилиндрических оболочек с углами армирования, близкими к оптимальным.

Однако подобные однородные структуры не исчерпывают возможных вариантов конфигураций пакета слоев и распределения углов армирования. Кроме того, необходимо выяснить, какое влияние на изучаемые критические состояния оказывает толщина оболочки и пониженная сопротивляемость поперечным сдвигам. Приводимые ниже примеры расчета направлены на получение соответствующей информации (ограниченной рамками используемой теории и вариантов рассмотренных оболочек).

Вначале рассмотрим устойчивость при осевой нагрузке анизотропных бороалюминиевых оболочек, состоящих из  $N$  слоев с такими механическими характеристиками:

$$E_1 = 229,6 \text{ ГПа}; \quad E_2 = 142,7 \text{ ГПа}; \quad G_{12} = 58,6 \text{ ГПа}; \quad G_{13} = G_{12}; \\ G_{23} = 54,5 \text{ ГПа}; \quad \nu_1 = 0,2; \quad \nu_2 = \nu_1 E_2 / E_1.$$

Направления, обозначенные цифрами 1, 2, 3 совпадают с главными направлениями упругости слоев.

Полагаем, что оболочки радиусом  $R = 1$  м, длиной  $L = 2$  м армированы под различными углами к образующей (оси  $x$ ) оболочки (в первом примере  $N = 1$ ). Угол  $\varphi$  в формулах (1.3) изменяется от  $0^\circ$  до  $\pi/2$ . Так как аргумент тригонометрических функций в (1.3) кратный  $\varphi$ , то при больших значениях  $\varphi$  результат будет повторяться с периодом  $\pi/2$ . На рис. 1 показаны графики в осях  $\sigma' - \varphi$ .  $\sigma' = \sigma_{anis} / \sigma_{ort}$ , где  $\sigma_{anis}$  – критическое значение осевого напряжения оболочки с винтовым армированием,  $\sigma_{ort}$  – осевое напряжение для той же оболочки, вычисленное без учета в соотношениях упругости коэффициентов  $C_{16}$ ,  $D_{16}$ . Пунктирные кривые 1–3 получены с использованием теории Кирхгофа–Лява [3], сплошные 4–6 – согласно предлагаемой методике. Кривые 1–3 получены, соответственно, для оболочек толщиной  $t = 0,01$  м; 0,05 м; 0,1 м.

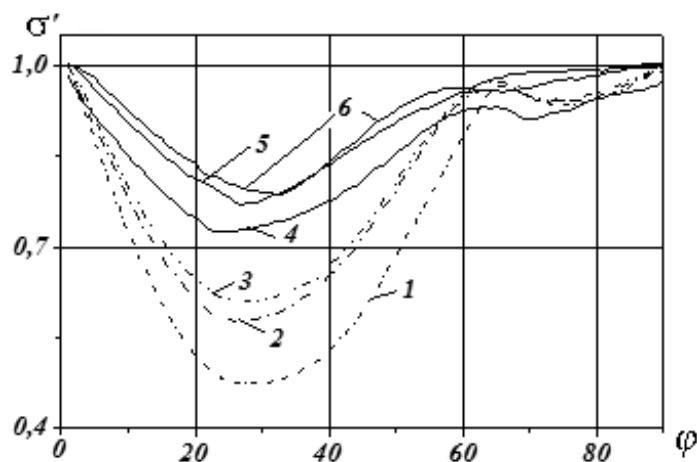


Рис. 1

Характерной особенностью результатов на рис.1 является то, что при учете деформаций поперечного сдвига влияние винтовой анизотропии на критические нагрузки значительно меньше, чем без ее учета. С увеличением толщины также происходит уменьшение эффекта анизотропии. Как известно, с увеличением количества слоев механические свойства композита приближаются к свойствам ортотропного материала. О том, какое влияние при этом оказывает пониженная сдвиговая жесткость, дают представленные кривые на рис. 2. Сплошные кривые 2, 4, 8, 12 вычислены с использованием теории оболочек Тимошенко – Миндлина, пунктирные – теории Кирхгофа – Лява. Толстые кривые в нижней и верхней группе кривых описывают зависимость критических значений осевой нагрузки от угла армирования  $\varphi$  для ортотропного материала. Как видно, при расчете оболочек на основании уточненной теории при

$C_{16} = C_{26} = D_{16} = 0$ , но с  $B_{16} \neq 0$ , дискретный характер структуры оболочек проявляется при большем количестве слоев, чем в классической теории.

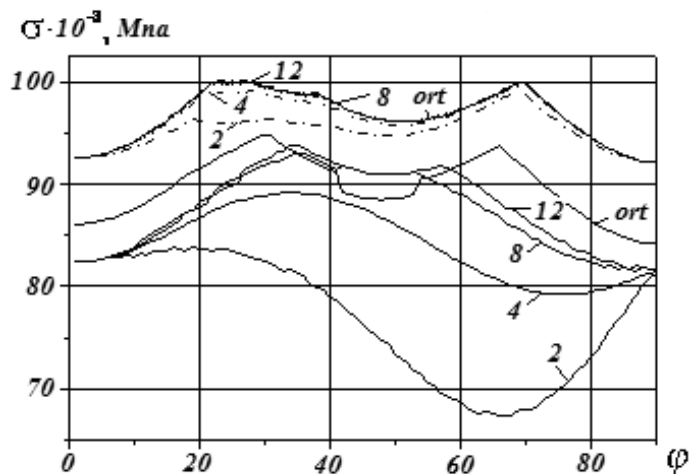


Рис. 2

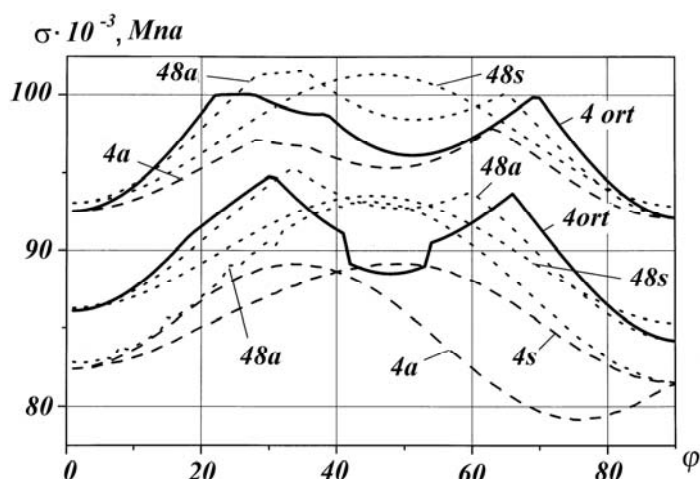


Рис. 3

Кривые на рис. 3 также обнаруживают существенное различие между расчетными критическими нагрузками, полученными по указанным двум теориям (здесь по оси ординат отложены значения критических напряжений для бороалюминиевой оболочки толщиной  $t = 0,1$  м). Цифры возле кривых – число слоев оболочки  $N$ , для которых они вычислены. Индекс «s» или «a» возле  $N$  обозначает симметричную или асимметричную структуру слоистого пакета, «ort» – ортотропную. Четырехслойные оболочки имеют армирование  $(+, -)_s$  и  $(+, -)_a$ , 48-слойные имеют 24 слоя до срединной поверхности и такое же количество с противоположной стороны также с симметричным и асимметричным армированием [20]. Для ортотропных оболочек кривые  $\sigma(\varphi)$  имеют точки излома, в которых происходит смена форм потери устойчивости (кривые гладкого вида имеют место для анизотропных оболочек). Отметим, что эта особенность кривых  $\sigma(\varphi)$  наблюдается не только для оболочек, у которых жесткости  $C_{16}$ ,  $D_{16}$  или  $B_{16}$  достаточно велики (небольшое количество слоев), но и в тех вариантах, когда они весьма малы. На рис. 3 кривые 48, a и 48 a (пунктирная) имеют различ-

ный вид (предположительно, анизотропией при таком количестве слоев можно было бы пренебречь). Еще одна особенность в характере зависимости  $\sigma(\varphi)$  установлена для анизотропных оболочек малой толщины при использовании классической теории и теории оболочек Тимошенко – Миндлина.

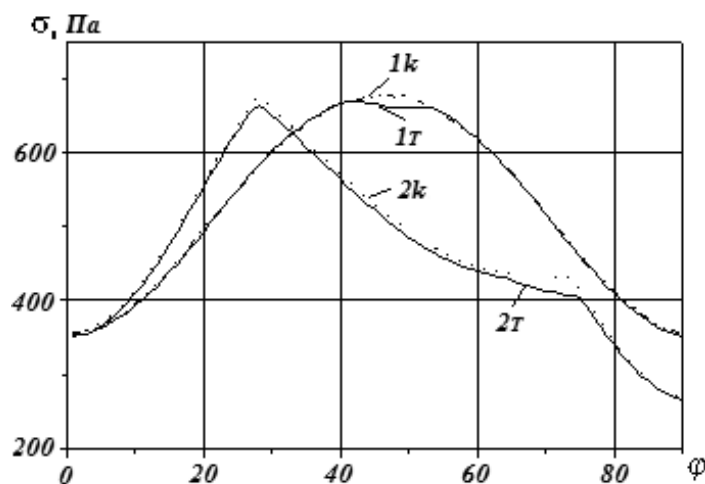


Рис. 4

На рис. 4 представлены кривые  $1k$  и  $1г$ , полученные для тонкой ( $R/t=112$ ) 48-слойной оболочки симметричной структуры [20]. В окрестности максимальной нагрузки кривая  $1г$  имеет участок немного вогнутый там, где кривая  $1k$  строго выпуклая. Максимум на кривой  $1г$  смещен влево, где  $\varphi = 41^\circ$ . Кривые  $2$  и  $2к$  вычислены для оболочки с такими же механическими и геометрическими параметрами, но с асимметричным расположением слоев относительно срединной поверхности. Здесь максимум смещен влево к  $30^\circ$ , но величина его незначительно отличается от максимума при симметричном пакете слоев. Какой из этих вариантов оптимизации предпочтительнее на практике можно определить, исследуя чувствительность к несовершенствам [3].

#### Заключение.

Получено решение задачи об устойчивости слоистых цилиндрических оболочек с учетом анизотропии, обусловленной наличием в пакете слоев с одной плоскостью симметрии. В рассматриваемой постановке такие слои появляются из-за того, что у них главные оси упругости не совпадают с направлениями линий главных кривизн поверхности, на которой задана гауссова система координат. Разрешающая система дифференциальных уравнений равновесия в начале закритической траектории получена на основании гипотез Тимошенко в перемещениях. Решение аппроксимируется двойными тригонометрическими рядами в комплексной форме. Граничные условия свободного опирания по перемещениям удовлетворяются точно, по усилию и моментам – интегрально. Для получения однородной алгебраической системы уравнений относительно коэффициентов рядов использована процедура метода Бубнова – Галеркина.

Исследована зависимость критических значений осевых сжимающих напряжений от направлений армирования монослоев, от их количества и толщины, от их поперечной сдвиговой жесткости. В отличие от ортотропных оболочек в рассматриваемой постановке глубже проявляется дискретный характер структуры слоистого пакета, несмотря на то, что, как и в классической теории, здесь используется единая гипотеза для всей совокупности слоев. В зависимости от количества слоев, от их четности или нечетности, от симметрии или антисимметрии, от их однородности или неоднородности будут равными нулю (или неравными) некоторые из коэффициентов в соотноше-

ниях обобщенного закона Гука. Это порождает ряд механических эффектов таких, например, как закручивание при осевом сжатии.

Если при сравнении результатов расчета на устойчивость оболочек из композитов на основании ортотропной классической и уточненной теорий основной эффект связан с уменьшением критических нагрузок при увеличении их толщины, то при учете анизотропии пониженная сдвиговая жесткость композитов весьма существенно влияет в окрестности максимумов на кривой  $\sigma(\varphi)$ , в частности, при подходе к значениям, которые близки к оптимальным, в случае также тонких оболочек.

Р Е З Ю М Е. Розроблено методику розрахунку стійкості шаруватих циліндричних оболонок з врахуванням анізотропії, що зумовлена наявністю в пакеті шарів з однією площиною симетрії. Розв'язувальну систему диференціальних рівнянь отримано на основі гіпотез Тимошенка в переміщеннях. Досліджено залежність критичних навантажень від напрямків армування моношарів, їх кількості, товщини, поперечної зсувної жорсткості при осьовому стиску.

1. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Ортотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
2. Бабич Д.В., Кошевой И.К. Об устойчивости перекрестно армированных идеальных и слабо искривленных цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 1988. – 24, № 1. – С. 114 – 118.
3. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. – К.: Каравела, 2010. – 352 с.
4. Ванін Г.Л., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов. – К.: Наук. думка, 1978. – 212 с.
5. Ванін Г.Л., Семенюк Н.П. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. – К.: Наук. думка, 1987. – 200с.
6. Гавриленко Г.Д. Устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек с учетом моментности докритического состояния // Прикл. механика. – 1968. – 5, № 3. – С. 36 – 42.
7. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. – К. Вища шк., 1980. – 168 с.
8. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. — 416 с.
9. Рикардс Р.Л., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1974. – 310 с.
10. Семенюк Н.П., Жукова Н.Б. Начальное закритическое поведение слоистых цилиндрических оболочек из композитов // Механика композитных материалов. – 1987. – №1. – С. 88 – 93.
11. Budiansky B. Theory of Buckling and Post-buckling Behavior of Elastic Structures // Adv. Appl. Mech. – 1974. – 14. – P. 2 – 65.
12. Koiter W.T. Elastic stability and post-buckling behavior //Proc. Symp.Nonlinear Problems. – Madison: Univ.of Wisconsin Press, 1963. – P. 257 – 275.
13. Nemeth N.P. Nondimensional parameters and equations for buckling of anisotropic shallow shells // J.Appl.Mech. – 1994. – 61, N3. – P. 664 – 669.
14. Onoda J. Optimale laminate configuration of cylindrical shells for axial buckling // AIAA J. – 1985. – 23, N 7. – P. 1093 – 1098.
15. Semenyuk N.P. Stability of Corrugated Arches under External Pressure // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 2. – P. 211 – 219.
16. Semenyuk N.P. On Nonlinear Deformation of Shells under Finite Angles of Rotations and Small Elastoplastic Strains // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 2. – P. 34 – 44.
17. Semenyuk N.P., Zhukova N.B. Stability and Postcritical Behavior of Corrugated Cylindrical Panels under External Pressure // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 6. – P. 701 – 714.
18. Simitses G.J. Analysis of anisotropic laminated cylindrical shells subjected to destabilizing loads. Part 1: Theory and solution procedure // Compos. Struct. – 1991. – 19, N 2. – P. 167 – 181.
19. Soldatos K.P. On the buckling and vibration antisymmetric angle-ply laminated circular cylindrical shells // Int.J.Eng.Sci. – 1983. – 21, N 3. – P. 217 – 222.
20. Weaver P.M. The Effect of Extension-Twist Anisotropy on Compression Buckling in Cylindrical Shells // Composite Part B: Engineering. – 2003. – 34, N3. – P. 251 – 260.
21. Weaver P.M., Driesen J.R., Roberts P. The effect of flexural-twist anisotropy on compression buckling of quasi-isotropic laminated cylindrical shells // Composite Struct. – 2002. – 55. – P. 195 – 204.

Поступила 12.07.2013

Утверждена в печать 19.02.2015