

И. Ю. Хома, О. Г. Дашко

### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕТОНКОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: reolog@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A solution is built for the problem on the stress state of transversely isotropic plate weakened by a curvilinear hole. This solution is based on the method of expansion of unknown functions into the Fourier series by Legendre polynomials depending on coordinate thickness, and the method of disturbance of the boundary shape. The numerical results are shown and discussed for plates with elliptic, square, and triangle holes with rounded angles.

**Key words:** transversely isotropic plate, stress state, hole, curvilinear, elliptical, square, triangular.

#### Введение.

Задачи концентрации напряжений около круговых отверстий в изотропных и трансверсально-изотропных пластинах рассмотрены многими авторами [1, 8–12, 17, 18]. Для решения соответствующих задач для пластин с отверстиями, отличными от круговых, в [5, 7] предложен на базе однородных решений метод сингулярных интегральных уравнений. Методом конечно-элементной дискретизации конечной области в [19, 20] рассмотрены задачи концентрации напряжений в упругих пластинах с круговым и эллиптическим отверстием. Анализ концентрации напряжений в упругих пластинах с выемками проведен в [16]. В работе [11] для определения напряженного состояния нетонких трансверсально-изотропных пластин с некруговыми отверстиями применен метод разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра в сочетании с методом возмущения формы границы [2].

В данной работе приведены основные уравнения и рекуррентные соотношения, необходимые для решения поставленной задачи в произвольном приближении. На основании полученных равенств рассмотрены задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропных пластин, ослабленных эллиптическим, квадратным и треугольным с округленными углами отверстиями.

#### §1. Постановка задачи. Основные соотношения.

Предположим, что пластина толщиной  $2h$  ( $h = \text{const}$ ), занимающая область  $\Omega = S \times [-h, h]$  трехмерного пространства  $R^3$ , отнесена к декартовой системе координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Примем, что  $x_1, x_2$  размещены на срединной плоскости  $S$ , а  $x_3 \in [-h, h]$ . Представим, следуя [6, 10], компоненты вектора перемещений  $u_j(x_1, x_2, x_3)$  и тензора напряжений  $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра  $P_k(\xi)$  координаты толщины

$$\{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} = \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\xi), \quad (1.1)$$

где  $x = (x_1, x_2) \in S$ ,  $\xi = h^{-1}x_3 \in [-1, 1]$ ,  $u_j^{(k)}(x)$ ,  $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$  – коэффициенты разложений, определяемые формулами

$$\{u_j^{(k)}(x), \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} = (k + \frac{1}{2}) \frac{1}{h} \int_{-h}^h \{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} P_k(\xi) dx_3. \quad (1.2)$$

Относительно коэффициентов разложений (именуемых моментами) как функций двух независимых переменных, получаем систему уравнений равновесия [13]

$$\partial_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(k)} - (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{3j}^{(k-2s-1)} + X_j^{(k)} = 0 \quad (j=1, 2, 3; k = \overline{0, N}), \quad (1.3)$$

где  $\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$  ( $\alpha=1, 2$ ),  $K = (k-1)/2$  (символ  $[K]$  обозначает целую часть числа  $K$ ) и соотношения упругости, связывающие моменты напряжений  $\sigma_{ij}^{(k)}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ , т.е.

$$\sigma_{ij}^{(k)} = c_{ijlm} \varepsilon_{lm}^{(k)}. \quad (1.4)$$

Здесь  $c_{ijlm}$  – упругие постоянные материала, удовлетворяющие условиям симметрии:  $c_{ijlm} = c_{jilm} = c_{lmij}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  – моменты деформаций, определяемые формулами

$$\varepsilon_{\alpha j}^{(k)} = \partial_\alpha u_j^{(k)} \quad (\alpha=1, 2); \quad \varepsilon_{3j}^{(k)} = h^{-1} u_j'^{(k)} \quad (j=1, 2, 3), \quad (1.5)$$

в которых  $u_j^{(k)} = (2k+1)(u_j^{(k+1)} + u_j^{(k+3)} + \dots)$ , причем  $u_j^{(n)} = 0$ , если  $n > N$ . В приведенных равенствах по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, причем греческие буквы принимают значения 1, 2, а латинские – 1, 2, 3.

Свободные члены  $X_j^{(k)}$  в уравнениях (1.3) – функции вида

$$X_j^{(k)} = (k + \frac{1}{2}) h^{-1} \left[ \sigma_{3j}^+ - (-1)^k \sigma_{3j}^- \right], \quad (1.6)$$

где  $\sigma_{3j}^+$  и  $\sigma_{3j}^-$  – напряжения, заданные на плоских гранях  $x_3 = h$  и  $x_3 = -h$ , соответственно.

Равенства (1.3) – (1.6) образуют замкнутую систему уравнений относительно введенных неизвестных функций. Для однозначного их определения данную систему необходимо дополнить граничными условиями, заданными на кривой  $\partial S$  области  $S$ .

Пусть  $\vec{v}$  – орт внешней нормали;  $\vec{s}$  – орт касательной кривой  $\partial S_v$  и  $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{s}$ . Очевидно, вектор  $\vec{n}$  направлен вдоль образующей цилиндрической поверхности  $\partial \Omega_v = \partial S_v \times [-h, h]$ . Предположим, что на поверхности  $\partial \Omega_v$  задан вектор напряжений  $\vec{p}_v = \sigma_{vv} \vec{v} + \sigma_{vs} \vec{s} + \sigma_{vn} \vec{n}$ . Тогда, используя формулы разложения (1.1), получаем на  $\partial S_v$  граничные условия  $\sigma_{vv}^{(k)} = f_1^{(k)}$ ,  $\sigma_{vs}^{(k)} = f_2^{(k)}$ ,  $\sigma_{vn}^{(k)} = f_3^{(k)}$  ( $k = \overline{0, N}$ ). Если же на поверхности  $\partial \Omega_v$  задан вектор перемещений  $\vec{u} = u_v \vec{v} + u_s \vec{s} + u_n \vec{n}$ , то граничные условия на  $\partial S_v$  имеют вид  $u_v^{(k)} = g_1^{(k)}$ ,  $u_s^{(k)} = g_2^{(k)}$ ,  $u_n^{(k)} = g_3^{(k)}$  ( $k = \overline{0, N}$ ). Здесь  $f_j^{(k)} = f_j^{(k)}(x_1, x_2)$ ,  $g_j^{(k)} = g_j^{(k)}(x_1, x_2)$  ( $j=1, 2, 3$ ) – моменты заданных функций точек кривой, определяемые по формулам (1.2).

## §2. Уравнения трансверсально-изотропной пластины.

Рассмотрим трансверсально-изотропную пластину, плоскость изотропии которой совпадает с плоскостью  $S$ . Введем в области  $S$  комплексные переменные  $z = x + iy$  и  $\bar{z} = x - iy$  и связанные с ними дифференциальные операторы  $2\partial_z = \partial/\partial x - i\partial/\partial y$ ,

$2\partial_{\bar{z}} = \partial/\partial x + i\partial/\partial y$ , где  $x = x_1/a$ ,  $y = x_2/a$ ,  $a$  – некоторый линейный размер плоскости  $S$ .

Приведенные в §1 уравнения для трансверсально-изотропной пластины распадаются на две независимые группы уравнений, описывающие, соответственно, симметричное и кососимметричное (по отношению к плоскости  $S$ ) деформирование пластины. При симметричном деформировании однородные ( $X_j^{(k)} = 0$ ) уравнения (1.3) в комплексной форме при  $N = 2n$  ( $n = 0, 1, \dots, \infty$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_z (\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)}) + \partial_{\bar{z}} (\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)}) - (4k+1)ah^{-1} \sum_{s=1}^k \sigma_+^{(2s-1)} &= 0 \quad (k = \overline{0, n}); \\ \partial_z \sigma_+^{(2k-1)} + \partial_{\bar{z}} \bar{\sigma}_+^{(2k-1)} - (4k-1)ah^{-1} \sum_{s=0}^{k-1} \sigma_{33}^{(2s)} &= 0 \quad (k = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

а соотношения упругости (1.4), (1.5) записываются таким образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} &= 2 \left[ (c_{12} + c_{66})e^{(2k)} + (4k+1)c_{13}ah^{-1} \sum_{s=k+1}^n u_3^{(2s-1)} \right]; \\ \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} &= 4c_{66}\partial_z u_+^{(2k)}; \quad \sigma_{33}^{(2k)} = c_{13}e^{(2k)} + (4k+1)c_{33}ah^{-1} \sum_{s=k+1}^n u_3^{(2s-1)} \quad (k = \overline{0, n}); \\ \sigma_+^{(2k-1)} &= c_{44} \left[ 2\partial_z u_3^{(2k-1)} + (4k-1)ah^{-1} \sum_{s=k}^n u_+^{(2s)} \right] \quad (k = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$(\sigma_+^{(2k-1)} = \sigma_{13}^{(2k-1)} + i\sigma_{33}^{(2k-1)}; \quad u_+^{(2k)} = u_1^{(2k)} + iu_2^{(2k)}; \quad e^{(2k)} = \partial_z u_+^{(2k)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(2k)});$$

$c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ),  $c_{44}$ ,  $c_{66}$  – упругие постоянные,  $c_{11} = c_{12} + 2c_{66}$ ).

Подставляя выражения (2.2) в равенства (2.1), получим такую систему уравнений:

$$\begin{aligned} c_{66}\Delta u_+^{(2k)} + 2(c_{12} + c_{66})\partial_z e^{(2k)} + \\ + (4k+1)ah^{-1} \left[ 2 \sum_{s=1}^n \lambda_{2s-1}^{(k)} \partial_z u_3^{(2s-1)} - c_{44}ah^{-1} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} u_+^{(2s)} \right] &= 0 \quad (k = \overline{0, n}); \\ c_{44}\Delta u_3^{(2k-1)} + (4k-1)ah^{-1} \left[ \sum_{s=0}^n \gamma_{2s}^{(k)} e^{(2s)} - c_{33}ah^{-1} \sum_{s=1}^n \alpha_{2s-1}^{(k)} u_3^{(2s-1)} \right] &= 0 \quad (k = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

( $\Delta = 4\partial^2/\partial z\partial\bar{z}$  – оператор Лапласа;

$$\lambda_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 1 \leq s \leq k; \\ c_{13}, & k < s \leq n; \end{cases} \quad \gamma_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{13}, & 1 \leq s < k; \\ c_{44}, & k \leq s \leq n; \end{cases}$$

$$\alpha_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s-1), & 1 \leq s \leq k; \\ k(2k-1), & k \leq s \leq n; \end{cases} \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 1 \leq s \leq k; \\ k(2k+1), & k \leq s \leq n. \end{cases}$$

Общее аналитическое решение системы (2.3) имеет вид [10]

$$c_{66}u_+^{(0)} = \kappa^* \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_l;$$

$$c_{66}u_+^{(2)} = \kappa_2^* \overline{\varphi''(z)} + \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2)} \partial_{\bar{z}} V_l + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}} W_s;$$

$$c_{66}u_+^{(2k)} = \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_l + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} W_s \quad (k = \overline{2, n});$$

$$c_{66}u_3^{(1)} = -\kappa_1^* [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + \sum_{l=1}^{2n} c_l^{(1)} V_l; \quad (2.4)$$

$$c_{66}u_3^{(2k-1)} = \sum_{l=1}^{2n} c_l^{(2k-1)} V_l \quad (k = \overline{2, n}); \quad c_{66}e^{(2k)} = \sum_{l=1}^{2n} c_l^{(2k)} V_l \quad (k = \overline{1, n});$$

$$c_{66}e^{(0)} = \kappa_e^* [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + \sum_{l=1}^{2n} c_l^{(0)} V_l,$$

где  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  – произвольные голоморфные функции,  $V_l$  и  $W_s$  – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta V_l - \mu_l^2 V_l = 0; \quad \Delta W_s - \lambda_s^2 W_s = 0, \quad (2.5)$$

в которых параметры  $\mu_l^2$  и  $\lambda_s^2$  являются корнями соответствующих характеристических уравнений,  $a_l^{(2k)}$ ,  $b_s^{(2k)}$ ,  $c_l^{(2k-1)}$  – безразмерные константы,

$$\kappa^* = 1 + \frac{2c_{66}}{c_1 c_{11}}; \quad \kappa_1^* = \frac{2c_{13} c_{66} h}{c_1 c_{11} c_{33} a}; \quad \kappa_2^* = \frac{4c_{13} c_{66} h^2}{3c_1 c_{11} c_{33} a^2}.$$

В области  $S$  наряду с декартовыми рассмотрим полярные координаты  $r, \theta$  и воспользуемся формулами преобразования компонент тензора напряжений. Учитывая при этом значения функций (2.4), имеем равенства

$$\sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = 4 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + 2 \sum_{l=1}^{2n} d_l^{(0)} V_l; \quad \sigma_{33}^{(0)} = \sum_{l=1}^{2n} d_{3l}^{(0)} V_l;$$

$$\sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(0)} = 4e^{-2i\theta} \left[ -z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} + \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_l \right];$$

$$\sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} = 2 \sum_{l=1}^{2n} d_l^{(2k)} V_l; \quad \sigma_{33}^{(2k)} = \sum_{l=1}^{2n} d_{3l}^{(2k)} V_l \quad (k = \overline{1, n}); \quad (2.6)$$

$$\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} = 4e^{-2i\theta} \left[ \mu_*^{(2k)} \overline{\varphi'''(z)} + \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_l + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s \right];$$

$$\sigma_{r3}^{(2k-1)} + i\sigma_{\theta 3}^{(2k-1)} = 2e^{-i\theta} \left[ \sum_{l=1}^{2n} p_l^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_l + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} W_s \right]$$

( $\mu_*^{(2)} = \kappa_2^*$ ,  $\mu_*^{(2k)} = 0$  ( $k > 1$ );  $d_l^{(2k)}$ ,  $d_{3l}^{(2k)}$ ,  $p_l^{(2k-1)}$ ,  $q_s^{(2k-1)}$  – постоянные вида

$$d_l^{(2k)} = \frac{c_{12} + c_{66}}{c_{66}} c_l^{(2k)} + \frac{(4k+1)c_{13}a}{c_{66}h} \sum_{s=k+1}^n c_l^{(2s-1)}; \quad d_{3l}^{(2k)} = \frac{c_{13}}{c_{66}} c_l^{(2k)} + \frac{(4k+1)c_{33}a}{c_{66}h} \sum_{s=k+1}^n c_l^{(2s-1)};$$

$$p_l^{(2k-1)} = \frac{c_{44}}{2c_{66}} \left[ 2c_l^{(2k-1)} + \frac{(4k-1)a}{h} \sum_{s=k}^n a_l^{(2s)} \right]; \quad q_s^{(2k)} = \frac{(4k-1)c_{44}a}{2c_{66}h} \sum_{l=k}^n b_s^{(2l)}.$$

Из равенств (2.6) при  $a = R$  получаем на контуре кругового отверстия радиуса  $R$  граничные условия

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(0)} + i\sigma_{r\theta}^{(0)} &= 2\left\{\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - e^{-2i\theta} \left[ z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \right]\right\} + \sum_{l=1}^{2n} \left( d_l^{(0)} V_l + 2a_l^{(0)} e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2 V_l \right); \\ \sigma_{rr}^{(2k)} + i\sigma_{r\theta}^{(2k)} &= 2\mu_*^{(2k)} e^{-2i\theta} \overline{\varphi'''(z)} + \sum_{l=1}^{2n} \left( d_l^{(2k)} V_l + 2a_l^{(2k)} e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2 V_l \right) + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2 W_s \quad (k = \overline{1, n});\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\sigma_{r3}^{(2k-1)} = 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\theta} \left[ \sum_{l=1}^{2n} p_l^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_l + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} W_s \right] \right\} \quad (k = \overline{1, n}).$$

Напряжения  $\sigma_{r\alpha}^{(2k)}$  ( $\alpha = r, \theta$ ),  $\sigma_{r3}^{(2k-1)}$  на граничной кривой примем заданными. Заметим, если на цилиндрической поверхности  $R \times [-h, h]$  заданы компоненты вектора напряжений  $\hat{\sigma}_{rj}(\theta, \xi)$  ( $j = r, \theta, 3$ ), то, раскладывая их в ряды Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины  $\xi = h^{-1}x_3$  и приравнивая коэффициенты разложения  $\hat{\sigma}_{rj}^{(m)}(\theta)$  на контуре  $r=1$  к соответствующим значениям напряжений левой части равенств (2.7), имеем

$$\begin{aligned}\left( \sigma_{rr}^{(2k)}(r, \theta) + i\sigma_{r\theta}^{(2k)}(r, \theta) \right) \Big|_{r=1} &= \hat{\sigma}_{rr}^{(2k)}(\theta) + i\hat{\sigma}_{r\theta}^{(2k)}(\theta) \quad (k = \overline{0, n}); \\ \sigma_{r3}^{(2k-1)}(r, \theta) \Big|_{r=1} &= \hat{\sigma}_{r3}^{(2k-1)}(\theta) \quad (k = \overline{1, n}),\end{aligned}$$

где  $\hat{\sigma}_{rj}^{(m)}$  – моменты заданных напряжений, определяемые формулами (1.2).

### §3. Трансверсально-изотропная пластина с криволинейным отверстием.

На основании приведенных формул рассмотрим задачу о напряженном состоянии тонкой трансверсально-изотропной пластины с криволинейным отверстием, контур  $L$  которого незначительно отличается от кругового контура радиуса  $R$ . Для решения задачи воспользуемся эффективным приближенным методом возмущения формы границы [2]. Полагаем, что гладкий криволинейный контур  $L$  области  $S$  описывается уравнениями

$$x = \cos \vartheta + \varepsilon \cos m\vartheta; \quad y = \sin \vartheta - \varepsilon \sin m\vartheta, \tag{3.1}$$

где  $x, y$  – безразмерные декартовы координаты,  $m$  – целое положительное число,  $\varepsilon$  – малый параметр. При определенных значениях  $m$  и  $\varepsilon$  получаем соответствующие формы отверстий: эллиптическую, квадратную и треугольную с закругленными углами. Функцию, конформно отображающую внешнюю область единичного круга на бесконечную область, ограниченную кривой (3.1), задаем формулой

$$\begin{aligned}z = x + iy = \omega(\zeta) &= \zeta + \varepsilon f(\zeta) \quad (z = re^{i\theta}; \quad \zeta = \rho e^{i\vartheta}; \\ f(\zeta) &= \zeta^{-m}; \quad \rho \text{ и } \vartheta \text{ – ортогональные криволинейные координаты}).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Так как система координат  $(\rho, \vartheta, \xi)$  повернута на некоторый угол  $\beta$  относительно  $(r, \theta, x_3)$  вокруг общей оси  $\xi = h^{-1}x_3$  и в обеих системах имеют место разложения в ряд по полиномам Лежандра вида (1.1), то по известным формулам преобразования компонент тензора напряжений имеем соотношения

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k)} = e^{2i\beta} \left( \sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} \right);$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} = \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)}; \quad \sigma_{\xi\xi}^{(2k)} = \sigma_{33}^{(2k)} \quad (k = \overline{0, n}) \quad (3.3)$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(2k-1)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1)} = e^{i\beta} (\sigma_{r3}^{(2k-1)} - i\sigma_{\theta3}^{(2k-1)}) \quad (k = \overline{1, n})$$

$$(\sigma_{ij'}^{(m)} = \sigma_{ij'}^{(m)}(\rho, \vartheta) \quad (i', j' = \rho, \vartheta, \xi), \quad \sigma_{ij}^{(m)} = \sigma_{ij}^{(m)}(r, \theta) \quad (i, j = r, \theta, 3)).$$

Учитывая (3.2), связь между переменными  $r, \theta$  и  $\rho, \vartheta$  устанавливаем согласно равенствам

$$r = |\omega(\zeta)|; \quad \theta = \arctg[\operatorname{Im} \omega(\zeta) / \operatorname{Re} \omega(\zeta)], \quad (3.4)$$

а экспонента  $e^{i\beta}$  определяется формулой [3]

$$e^{i\beta} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \cdot \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{|\omega(\zeta)|}. \quad (3.5)$$

В криволинейной системе координат краевые условия на границе  $L$  области  $S$  записываем таким же способом, как и для пластины с круговым отверстием. Так, если на поверхности  $L \times [-h, h]$  заданы компоненты вектора напряжений  $\bar{\sigma}_{\rho j'}(\vartheta, \xi)$  ( $j' = \rho, \vartheta, \xi$ ), то граничные условия на  $L$  имеют вид

$$\left( \sigma_{\rho\rho}^{(2k)}(\rho, \vartheta) + i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k)}(\rho, \vartheta) \right) \Big|_{\rho=1} = \bar{\sigma}_{\rho\rho}^{(2k)}(\vartheta) + i\bar{\sigma}_{\rho\vartheta}^{(2k)}(\vartheta) \quad (k = \overline{0, n});$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(2k-1)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} = \bar{\sigma}_{\rho\xi}^{(2k-1)}(\vartheta) \quad (k = \overline{1, n}).$$

Согласно формулам (3.4), основные уравнения (2.5) в переменных  $\rho, \vartheta$  будут достаточно сложными, и получить их точное решение не представляется возможным. Поэтому, следуя работам [3, 4], решение задачи определим в виде рядов по положительным степеням малого параметра  $\varepsilon$ , т.е.

$$\sigma_{ij'}^{(k)}(\rho, \vartheta) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \varepsilon^{\tau} \sigma_{ij'}^{(k, \tau)}(\rho, \vartheta); \quad u_{j'}^{(k)}(\rho, \vartheta) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \varepsilon^{\tau} u_{j'}^{(k, \tau)}(\rho, \vartheta). \quad (3.6)$$

Естественно, пользуясь равенствами (3.3), необходимо и правые части (3.3) представить в виде рядов по степеням параметра  $\varepsilon$ . Принимая во внимание формулу (3.5), получаем

$$e^{i\beta} = 1 + i\varepsilon q_1(\zeta, \bar{\zeta}) + \frac{\varepsilon^2}{2} [-q_1^2(\zeta, \bar{\zeta}) + 2iq_2(\zeta, \bar{\zeta})] + \dots;$$

$$e^{2i\beta} = 1 + 2i\varepsilon q_1(\zeta, \bar{\zeta}) + 2\varepsilon^2 [-q_1^2(\zeta, \bar{\zeta}) + iq_2(\zeta, \bar{\zeta})] + \dots \quad (3.7)$$

$$(q_1(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\rho^2} \operatorname{Im} [\zeta \overline{f(\zeta)} + \zeta \bar{\zeta} f'(\zeta)]; \quad q_2(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2\rho^4} \operatorname{Im} [\bar{\zeta}^2 f^2(\zeta) + \zeta^2 \bar{\zeta}^2 f'^2(\zeta)]).$$

Произвольные скалярные функции  $F^{(k)}(r, \theta)$  (в частности, компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}^{(k)}(r, \theta)$ ), согласно [3], представляем рядом

$$F^{(k)}(r, \theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \frac{1}{p!} L_p F^{(k)}(\rho, \vartheta), \quad (3.8)$$

в котором  $L_p$  – операторы такого вида:

$$L_0 = 1, \quad L_1 = f(\zeta)\partial_\zeta + \overline{f(\zeta)}\partial_{\bar{\zeta}}, \quad L_2 = f^2(\zeta)\partial_\zeta^2 + 2f(\zeta)\overline{f(\zeta)}\partial_\zeta\partial_{\bar{\zeta}} + \overline{f^2(\zeta)}\partial_{\bar{\zeta}}^2.$$

Если учесть, что

$$\partial_\zeta = \frac{1}{2}e^{-i\vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right); \quad \partial_{\bar{\zeta}} = \frac{1}{2}e^{i\vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right)$$

и  $f(\zeta) = \zeta^{-m}$ , то функции  $q_1(\rho, \vartheta)$ ,  $q_2(\rho, \vartheta)$  примут вид

$$q_1 = \frac{m+1}{\rho^{m+1}} \sin(m+1)\vartheta; \quad q_2 = \frac{m^2-1}{2\rho^{2(m+1)}} \sin 2(m+1)\vartheta,$$

а операторы  $L_p$  ( $p=1, 2$ ) запишем таким образом:

$$L_1 = \frac{1}{\rho^m} \left( \cos(m+1)\vartheta \frac{\partial}{\partial\rho} - \sin(m+1)\vartheta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right); \quad L_2 = \frac{1}{2\rho^{2m}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \right. \\ \left. + \cos 2(m+1)\vartheta \left( \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \right) - 2\sin 2(m+1)\vartheta \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right) \right].$$

Следует отметить, что члены ряда (3.8) определяются действием операторов  $L_p$  на соответствующие функции  $F^{(k)}(\rho, \vartheta)$ , которые получаем из  $F^{(k)}(r, \theta)$  формальной заменой переменных  $r, \theta$  на  $\rho, \vartheta$ . Принимая во внимание разложения (3.6) – (3.8), из равенств (3.3) после некоторых преобразований и сравнения выражений при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$  получаем соотношения

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2k, \tau)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k, \tau)} = \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_1^{(\tau-j)} \left( \sigma_{rr}^{(2k, j)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k, j)} \right); \quad \sigma_{\xi\xi}^{(2k, \tau)} = \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_1^{(\tau-j)} \sigma_{33}^{(2k, j)}; \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2k, \tau)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k, \tau)} + 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k, \tau)} = \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_2^{(\tau-j)} \left( \sigma_{rr}^{(2k, j)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k, j)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k, j)} \right); \quad (3.9) \\ \sigma_{\rho\xi}^{(2k-1, \tau)} + i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1, \tau)} = \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_3^{(\tau-j)} \left( \sigma_{r3}^{(2k-1, j)} + i\sigma_{\theta3}^{(2k-1, j)} \right).$$

Здесь  $\Lambda_p^{(l)}$  – операторы такого вида:  $\Lambda_p^{(0)} = 1$  ( $p=1, 2, 3$ ),  $\Lambda_1^{(1)} = L_1$ ,  $\Lambda_2^{(1)} = L_1 + 2iq_1$ ,  $\Lambda_3^{(1)} = L_1 + iq_1$ ,  $2\Lambda_1^{(2)} = L_2$ ,  $\Lambda_2^{(2)} = \frac{1}{2}L_2 - 2q_1^2 + 2i(q_1L_1 + q_2)$ ,  $\Lambda_3^{(2)} = \frac{1}{2}L_2 - q_1^2 + i(q_1L_1 + q_2)$ .

Моменты напряжений  $\sigma_{ii}^{(k, j)}$ , входящие в правые части равенств (3.9), записываем согласно (3.8) на основании их аналитических выражений (2.7) в переменных  $z, \bar{z}$  формальной заменой последних на переменные  $\zeta, \bar{\zeta}$  (или равнозначно – заменой переменных  $r, \theta$ , соответственно, на  $\rho, \vartheta$ ). Следовательно, вводя обозначения  $\Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta)$ ,  $\Psi(\zeta) = \psi'(\zeta)$ , имеем формулы для напряжений:

$$\sigma_{rr}^{(0, j)} + \sigma_{\theta\theta}^{(0, j)} = 4 \left[ \Phi_j(\zeta) + \overline{\Phi_j(\zeta)} \right] + 2 \sum_{l=1}^{2n} d_l^{(0)} V_l^{(j)}; \quad \sigma_{33}^{(0, j)} = \sum_{l=1}^{2n} d_{3l}^{(0)} V_l^{(j)}; \\ \sigma_{rr}^{(0, j)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0, j)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(0, j)} = 4e^{-2i\vartheta} \left[ -\zeta \overline{\Phi_j(\zeta)} - \overline{\Psi(\zeta)} + \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(0)} \partial_{\bar{\zeta}}^2 V_l^{(j)} \right];$$

$$\sigma_{rr}^{(2k,j)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k,j)} = 2 \sum_{l=1}^{2n} d_l^{(2k)} V_l^{(j)} ; \quad \sigma_{33}^{(2k,j)} = \sum_{l=1}^{2n} d_{3l}^{(2k)} V_l^{(j)} ; \quad (3.10)$$

$$\sigma_{rr}^{(2k,j)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k,j)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k,j)} = 4e^{-2i\theta} \left[ \mu_*^{(2k)} \overline{\Phi_j''(\zeta)} + \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2k)} \partial_{\bar{\zeta}}^2 V_l^{(j)} + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{\zeta}}^2 W_s^{(j)} \right] ;$$

$$\sigma_{r_3}^{(2k-1,j)} + i\sigma_{\theta_3}^{(2k-1,j)} = 2e^{-i\theta} \left[ \sum_{l=1}^{2n} P_l^{(2k-1)} \partial_{\bar{\zeta}} V_l^{(j)} + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{\zeta}} W_s^{(j)} \right] \quad (k = \overline{1, n}),$$

где метагармонические функции  $V_l^{(j)}$  и  $W_s^{(j)}$  определяются равенствами  $\Delta V_l^{(j)} - \mu_l^2 V_l^{(j)} = 0$ ,  $\Delta W_s^{(j)} - \lambda_s^2 W_s^{(j)} = 0$ , в которых  $\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$  – оператор Лапласа.

Для бесконечной области  $S$  с границей  $L$  голоморфные функции  $\Phi_j(\zeta)$  и  $\Psi_j(\zeta)$  примем в виде

$$\Phi_j(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)} \zeta^{-n} ; \quad \Psi_j(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(j)} \zeta^{-n} , \quad (3.11)$$

где  $a_n^{(j)}$  и  $b_n^{(j)}$  – произвольные постоянные. Отметим, что вид метагармонических функций  $V_l^{(j)}$  и  $W_s^{(j)}$  зависит от значений корней характеристических уравнений, которые могут быть действительными или комплексными. Пусть, в частности, имеется  $2n_1$  ( $n_1 \leq n$ ) вещественных положительных и  $2(n - n_1)$  комплексно-сопряженных корней. Тогда имеем

$$V_l^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(l,j)} K_n(\rho x_l) e^{in\theta} \quad l \in [1, 2n_1] ; \quad V_{2l+1}^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(2l+1,j)} H_n^{(1)}(\rho x_{2l+1}) e^{in\theta} ;$$

$$V_{2l+2}^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^{(2l+1,j)} H_n^{(2)}(\rho x_{2l+2}) e^{in\theta} \quad l \in [n_1, n-1]. \quad (3.12)$$

Здесь  $B_n^{(l,j)}$ ,  $C_n^{(2l+1,j)}$ ,  $D_n^{(2l+1,j)}$  – постоянные, удовлетворяющие равенствам  $B_{-n}^{(l,j)} = \bar{B}_n^{(l,j)}$ ,  $C_{-n}^{(2l+1,j)} = (-1)^n \bar{D}_n^{(2l+1,j)}$ ,  $D_{-n}^{(2l+1,j)} = (-1)^n \bar{C}_n^{(2l+1,j)}$ ;  $K_n(\rho x_1)$ ,  $H_n^{(1)}(\rho x_{2l+1})$  и  $H_n^{(2)}(\rho x_{2l+2})$  – цилиндрические функции Бесселя, Ханкеля первого и второго рода,  $x_l = \mu_l$ ,  $x_{2l+1} = \sqrt{-\mu_{2l+1}^2}$ ,  $x_{2l+2} = \bar{x}_{2l+1}$ . Корни характеристического уравнения для метагармонических функций  $W_s^{(j)}$  – вещественные положительные, поэтому

$$W_s^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_n^{(s,j)} K_n(\rho y_s) e^{in\theta} \quad (y_s = \lambda_s). \quad (3.13)$$

При определении концентрации напряжений около отверстий напряженное состояние пластины представим в виде суммы основного напряженного состояния  $\sigma_{ij}^0$ , возникающего под действием приложенных к пластине внешних усилий, и возмущенного состояния, вызванного наличием отверстия. Примем, что граничная поверхность  $L \times [-h, h]$  рассматриваемого отверстия свободна от напряжений ( $\bar{\sigma}_{\rho j} = 0$ ), а на бесконечности пластина находится под действием постоянных растягивающих  $\sigma_{11}^{\infty} = p_1$ ,  $\sigma_{22}^{\infty} = p_2$  и сдвигающих  $\sigma_{12}^{\infty} = \tau$  усилий.

По аналогии с (3.6) компоненты основного напряженного состояния необходимо представить в виде рядов по малому параметру  $\varepsilon$ . Поскольку криволинейная система координат  $(\rho, \vartheta)$  в плоскости  $S$  повернута на угол  $\alpha$  относительно декартовой системы  $(x, y)$ , то имеют место аналогичные (3.3) соотношения

$$\sigma_{\rho\rho}^0 + \sigma_{\vartheta\vartheta}^0 = p_1 + p_2; \quad \sigma_{\rho\rho}^0 - \sigma_{\vartheta\vartheta}^0 - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^0 = (p_1 - p_2 - 2i\tau)e^{2i\alpha}. \quad (3.14)$$

Определяя из формулы  $dz = |dz|e^{i\alpha}$  экспоненту  $e^{i\alpha}$  и подставляя ее значение в равенства (3.14), имеем

$$\sigma_{\rho\rho}^0 - i\sigma_{\rho\vartheta}^0 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) + \frac{1}{2}(p_1 - p_2 - 2i\tau)e^{2i\vartheta} \left\{ 1 + \varepsilon \left[ f'(\zeta) - \overline{f'(\zeta)} \right] \left[ 1 - \varepsilon \overline{f'(\zeta)} \right] \right\};$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}^0 = p_1 + p_2 - \sigma_{\rho\rho}^0. \quad (3.15)$$

При всестороннем растяжении пластины ( $p_1 = p_2 = p$ ,  $\tau = 0$ ) компоненты основного напряженного состояния принимают значения  $\sigma_{\rho\rho}^0 = \sigma_{\vartheta\vartheta}^0 = p$ ;  $\sigma_{\rho\vartheta}^0 = 0$ .

В нулевом приближении (круговое отверстие) из формул (3.10) и (3.15) при  $j = 0$  с учетом значения функций (3.11) – (3.13) получим (после удовлетворения граничных условий) компоненты напряжений

$$\sigma_{rr}^{(0,0)} = (1 - \rho^{-2})p; \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0,0)} = (1 + \rho^{-2})p; \quad \sigma_{r\theta}^{(0,0)} = 0;$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(2k,0)} = \sigma_{\beta\alpha}^{(2k,0)} = 0; \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(2k-1,0)} = 0 \quad (\alpha, \beta = r, \theta; k \geq 1).$$

Как видно, при всестороннем растяжении пластины с круговым отверстием коэффициент концентрации напряжений  $\sigma_{\theta\theta}/p$  на контуре отверстия равен двум и не зависит от количества членов ряда по полиномам Лежандра.

Моменты напряжений  $\sigma_{ij}^{(m,1)}$  в первом ( $j = 1$ ) приближении определяем формулами:

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2k,1)} = \sigma_{rr}^{(2k,1)} + L_1\sigma_{rr}^{(2k,0)} + 2q_1\sigma_{r\theta}^{(2k,0)}; \quad \sigma_{\rho\xi}^{(2k-1,1)} = \sigma_{r3}^{(2k-1,1)} + L_1\sigma_{r3}^{(2k-1,0)} + q_1\sigma_{\theta3}^{(2k-1,0)};$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k,1)} = \sigma_{\theta\theta}^{(2k,1)} + L_1\sigma_{\theta\theta}^{(2k,0)} - 2q_1\sigma_{r\theta}^{(2k,0)}; \quad \sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1,1)} = \sigma_{\theta3}^{(2k-1,1)} + L_1\sigma_{\theta3}^{(2k-1,0)} - q_1\sigma_{r3}^{(2k-1,0)}; \quad (3.16)$$

$$\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k,1)} = \sigma_{r\theta}^{(2k,1)} + L_1\sigma_{r\theta}^{(2k,0)} - q_1(\sigma_{r\vartheta}^{(2k,0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k,0)}); \quad \sigma_{\xi\xi}^{(2k,1)} = \sigma_{33}^{(2k,1)} + L_1\sigma_{33}^{(2k,0)}.$$

Разделяя действительную и мнимую части равенства (3.9), получаем аналогичные (3.16) выражения для моментов компонент напряжений в последующих ( $j > 1$ ) приближениях. В каждом из приближений осуществляем решение задачи таким же способом, как и для кругового отверстия.

Таким образом, определив из решения двумерных краевых задач моменты компонент напряжений, согласно формуле (1.1) получим соответствующие значения напряжений. Так, в частности, тангенциальные  $\sigma_{\rho\rho}$ ,  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ ,  $\sigma_{\rho\vartheta}$  и поперечное  $\sigma_{33}$  напряжения представляются равенствами:

$$\frac{1}{\rho}\sigma_{\rho\rho} = 1 - \frac{1}{\rho^2} +$$

$$+ \sum_{k=0}^n \left\{ \varepsilon T_{\rho\rho}^{(2k,1)}(\rho) \cos(m+1)\vartheta + \varepsilon^2 \left[ t_{\rho\rho}^{(2k,2)}(\rho) + T_{\rho\rho}^{(2k,2)}(\rho) \cos 2(m+1)\vartheta \right] \right\} P_{2k}(\xi);$$

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{\theta\theta} = 1 + \frac{1}{\rho^2} +$$

$$+ \sum_{k=0}^n \left\{ \varepsilon T_{\theta\theta}^{(2k,1)}(\rho) \cos(m+1)\vartheta + \varepsilon^2 \left[ t_{\theta\theta}^{(2k,2)}(\rho) + T_{\theta\theta}^{(2k,2)}(\rho) \cos 2(m+1)\vartheta \right] \right\} P_{2k}(\xi);$$

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{\rho\theta} = \sum_{k=0}^n \left\{ \varepsilon T_{\rho\theta}^{(2k,1)}(\rho) \sin(m+1)\vartheta + \varepsilon^2 T_{\rho\theta}^{(2k,2)}(\rho) \sin 2(m+1)\vartheta \right\} P_{2k}(\xi);$$

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{33} = \sum_{k=0}^n \left\{ \varepsilon T_{33}^{(2k,1)}(\rho) \cos(m+1)\vartheta + \varepsilon^2 \left[ t_{33}^{(2k,2)}(\rho) + T_{33}^{(2k,2)}(\rho) \cos 2(m+1)\vartheta \right] \right\} P_{2k}(\xi).$$

Здесь через  $t_{ij}^{(2k,2)}$  и  $T_{ij}^{(2k,j)}$  ( $j=1,2$ ) обозначены составляющие, содержащие цилиндрические функции.

#### §4. Численные исследования.

Ниже изложим результаты численных исследований напряженного состояния около криволинейных отверстий в трансверсально-изотропной пластине, находящейся под действием постоянного всестороннего растяжения. Отображающую функцию  $f(\zeta)$  и параметры  $\varepsilon$  и  $R$  рассматриваемых отверстий принимаем такими же, как в работе [3].

**А. Эллиптическое отверстие.** Для эллиптического отверстия указанные параметры имеют вид  $f(\zeta) = \zeta^{-1}$  ( $m=1$ ),  $\varepsilon = (a-b)/(a+b)$ ,  $R = (a+b)/2$ , где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса. Представим результаты расчета напряженного состояния трансверсально-изотропной пластины с коэффициентами Пуассона  $\nu = \nu' = 0,25$ ,  $E/E' = 1,25$  и отношением модуля упругости  $E$  в плоскости изотропии к поперечному модулю сдвига  $G'$  равным  $E/G' = 5$ . Проблеме определения эффективных модулей упругости композитных материалов посвящены, в частности, работы [14, 15].

В табл. 1 приведены значения кольцевых напряжений  $\sigma_{\theta\theta}/p$  на контуре отверстия  $\rho=1$  в точке  $\vartheta=0$ ,  $\xi=0$  для различных значений отношений полуосей  $a/b$  при некоторых значениях относительной толщины пластины ( $b/h=1..5$ ). Для кругового отверстия (ему соответствует значение  $a/b=1$ ) коэффициент концентрации  $\sigma_{\theta\theta}/p$  не зависит от относительной толщины пластины и равен двум. Для эллиптического отверстия значения напряжений в первом (I) и во втором (II) приближениях незначительно отличаются между собой и при увеличении отношения  $a/b$  постепенно возрастают, приближаясь к трем.

Таблица 1

a/b	b/h									
	1		2		3		4		5	
	I	II								
1,0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1,1	2,198	2,207	2,196	2,206	2,194	2,204	2,193	2,202	2,192	2,201
1,2	2,378	2,413	2,374	2,409	2,370	2,405	2,368	2,403	2,367	2,401
1,3	2,542	2,613	2,536	2,608	2,530	2,602	2,528	2,598	2,526	2,596
1,4	2,693	2,809	2,684	2,802	2,677	2,794	2,674	2,790	2,672	2,786
1,5	2,831	2,999	2,820	2,984	2,812	2,980	2,808	2,974	2,806	2,971

**Б. Квадратное отверстие.** При тех же данных упругих констант приведены результаты расчетов напряженного состояния пластины с квадратным отверстием с округленными углами, параметры которого имеют такие значения:  $m = 3$ ;  $\varepsilon = 1/9$ ;  $R = 0,9a$ , где  $2a$  – диагональ квадрата. На рис. 1 представлены эпюры распределения нормальных напряжений  $\sigma_{33}/p$  по толщине пластины в сечении  $\vartheta = 0$  при  $\rho = 1,1$  и  $\rho = 1,14$ .

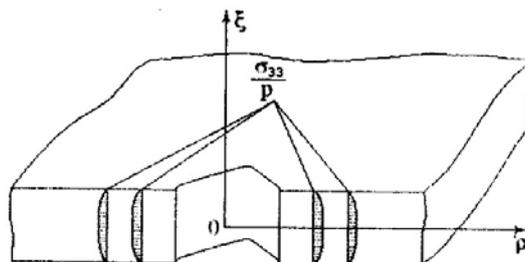


Рис. 1

Данные табл. 2 иллюстрируют изменения тангенциальных  $\sigma_{\rho\rho}/p$  и поперечных  $\sigma_{33}/p$  напряжений на контуре отверстия  $\rho = 1$  при  $\vartheta = 0$  в точках на срединной ( $\xi = 0$ ) и граничной ( $\xi = 1$ ) плоскостях пластины в зависимости от изменения относительной толщины пластины  $a/h$ . Приведены результаты первого (I) и второго (II) приближений. Кольцевые напряжения  $\sigma_{\rho\rho}/p$  на срединной плоскости уменьшаются, а на граничной – повышаются, стремясь к общему значению, равному четырем (точному значению коэффициента концентрации напряжений плоской теории упругости [4]). Поперечные напряжения  $\sigma_{33}/p$  постоянно убывают, приближаясь к нулю.

Таблица 2

Напряжения	$\xi$	$a/h$									
		3		4		5		6		7	
		I	II								
$\frac{\sigma_{\rho\rho}}{p}$	0	3,716	4,185	3,710	4,181	3,703	4,175	3,697	4,167	3,691	4,161
	1	3,561	3,907	3,587	3,940	3,606	3,970	3,619	3,994	3,628	4,013
$\frac{\sigma_{33}}{p}$	0	0,087	0,185	0,058	0,135	0,041	0,102	0,031	0,079	0,024	0,063
	1	0,019	0,060	0,009	0,033	0,004	0,019	0,002	0,012	0,001	0,007

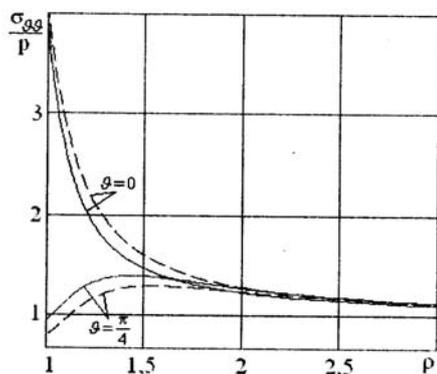


Рис. 2

На рис. 2 представлены кривые изменения кольцевых напряжений  $\sigma_{\rho\rho}/p$  в сечениях  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi/4$  на срединной (штриховая кривая) и граничной (сплошная кривая) плоскостях пластины при удалении от граничной поверхности отверстия. С возрастанием координаты  $\rho$  они приближаются к своему основному значению. Кривые, приведенные на рис. 3 и 4, характеризуют изменения касательных  $\sigma_{\rho\vartheta}/p$  и поперечных  $\sigma_{33}/p$  напряжений на срединной (штриховая кривая) и граничной (сплошная кривая) плоскостях пластины при удалении от контура отверстия.

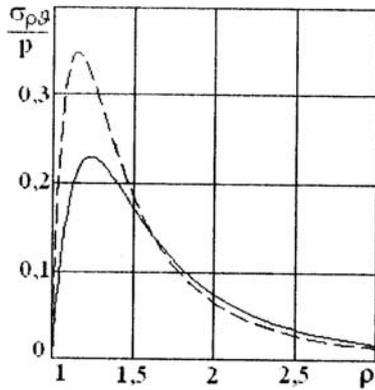


Рис. 3

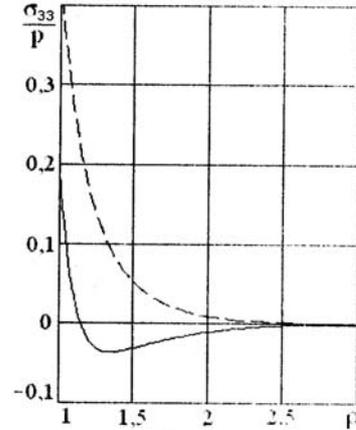


Рис. 4

**В. Треугольное отверстие.** При расчете напряженного состояния пластины с треугольным отверстием с округленными углами приняты такие значения параметров:  $m = 2$ ;  $\varepsilon = 1/4$ ;  $R = 8h_0/15$ , где  $h_0$  – высота правильного треугольника.

Таблица 3

Напряжения	$\xi$	$h_0/h$									
		3		4		5		6		7	
		I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
$\frac{\sigma_{\rho\rho}}{P}$	0	4,071	5,118	4,069	5,126	4,061	5,124	4,054	5,117	4,046	5,109
	1	3,779	4,566	3,822	4,603	3,857	4,650	3,884	4,696	3,905	4,736
$\frac{\sigma_{\xi\xi}}{P}$	0	0,175	0,429	0,123	0,355	0,091	0,266	0,069	0,214	0,054	0,175
	1	0,050	0,177	0,025	0,110	0,014	0,070	0,008	0,047	0,005	0,032

Таблица 4

$E/E'$	$\xi$	эллиптическое отв.		квадратное отв.		треугольное отв.	
		I	II	I	II	I	II
0,5	0	2,8107	2,9740	3,6759	4,1220	4,0220	5,0342
	1	2,7657	2,9082	3,5962	4,0090	3,8819	4,7820
1,0	0	2,8239	2,9903	3,6785	4,1260	4,0469	5,0705
	1	2,7340	2,8639	3,5510	3,9544	3,7869	4,6384
1,5	0	2,8384	3,0075	3,6753	4,1238	4,0696	5,1040
	1	2,7029	2,8225	3,5153	3,9143	3,7036	4,5212
2,0	0	2,8536	3,0251	3,6672	4,1165	4,0898	5,1348
	1	2,6720	2,7823	3,4838	3,8802	3,6272	4,4180
2,5	0	2,8695	3,0432	3,6551	4,1050	4,1076	5,1639
	1	2,6405	2,7422	3,4542	3,8102	3,5555	4,3229

Для сравнения с результатами для квадратного отверстия в табл. 3 приведены значения кольцевых  $\sigma_{\rho\rho}/P$  и поперечных  $\sigma_{33}/P$  на контуре отверстия  $\rho=1$  при  $\vartheta=0$  в точках на срединной ( $\xi=0$ ) и граничной ( $\xi=1$ ) плоскостях в зависимости от изменения относительной толщины пластины  $h_0/h$ . Представлены результаты первого (I) и второго (II) приближений. Отличие между приближениями здесь более существенно. При этом тенденция изменения напряжений сохраняется. С увеличением отноше-

ния  $h_0/h$  напряжения  $\sigma_{\theta\theta}/p$  на срединной плоскости понижаются, а на граничной – возрастают, приближаясь к общему значению, равному пяти.

Данные табл. 4 иллюстрируют влияние отношения модулей упругости  $E/E'$  на напряженное состояние пластин с эллиптическим, квадратным и треугольным отверстиями. Представлены значения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}/p$  для этих трех типов отверстий в первом (I) и во втором (II) приближениях на срединной ( $\xi = 0$ ) и граничной ( $\xi = 1$ ) плоскостях пластины. Увеличение параметра  $E/E'$  приводит к снижению значений кольцевых напряжений  $\sigma_{\theta\theta}/p$  на граничной плоскости и повышению их на срединной.

Р Е З Ю М Е. Побудовано розв'язок задачі про напружений стан трансверсально-ізотропної пластини, послабленої криволінійним отвором. В основу його покладено метод розвинення шуканих функцій в ряд Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини і метод збурення форми границі. Приведено числові результати для пластин з еліптичним, квадратним і трикутним отворами з закругленими кутами та дано їх аналіз.

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Точное решение задачи Кирша // Прикл. механика. – 1970. – 6, № 5. – С. 10 – 17.
2. Гузь О.М. Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках // Прикл. механика. – 1962. – 8, № 6. – С. 605 – 612.
3. Гузь А.Н., Немши Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – К: Вища шк., 1989. – 352 с.
4. Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, В.Н. Чехов и др. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с.
5. Bardzokas D.I., Kushnir D.V., Filshinskii L.A. Dynamic Problems of the Theory of Elasticity for Layers and Semilayers with Cavities // Acta Mech. – 2009. – 208. – P. 81 – 95.
6. Cicala P. Sulla teoria elastica della plate sottile // Giornale Civile. – 1959. – 97, N 4. – P. 238 – 256.
7. Fil'stinskii L.A., Kovalev U.D. Vensel E.S. Solution of the Elastic Boundary Value Problem for a Layer with Tunnel Stress Raisers // Int. J. Solids Struct. – 2002. – 39. – P. 6385 – 6402.
8. Folias E.S., Wang J.S. On the Three-dimensional Stress Fields around a Circular Hole in a Plate of Arbitrary Thickness // Comput. Mech. – 1990. – 6, N 5. – P. 379 – 391.
9. Green A.E. Three-Dimensional Stress Systems in Isotropic Plates // Trans. Roy. Soc. of London. Ser. A. – 1948. – 240, N 285. – P. 561 – 597.
10. Khoma I.Yu. On the Technique on Constructing the General Solution to Equilibrium Equation for Nonthin Plates // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, N 4. – P. 484 – 492.
11. Khoma I.Yu. Tension of a Nonthin Transversely Isotropic Plate with a Noncircular Cylindrical Cavity // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, N 11. – P. 1285 – 1297.
12. Khoma I.Yu., Starygina O.A. Influence of Elastic Properties on the Stress State of a Nonthin Transversely Isotropic Plate with a Circular Hole // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 1. – P. 67 – 79.
13. Khoma I.Yu. Analytical Solution of the Equilibrium Equations for Nonthin Electroelastic Transversely Isotropic Plates Polarized through the Thickness // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 4. – P. 430 – 445.
14. Khoroshun L.P., Nazarenko L.V. Deformation and Damage of Composites with Anisotropic Components (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 4. – P. 388 – 455.
15. Khoroshun L.P., Nazarenko L.V. Nonlinear Deformation Properties of Composites with Transversely Isotropic Components // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 3. – P. 253 – 262.
16. Kotousov A., Wang C.H. Three-dimensional Stress Constraint in a Elastic Plate with a Notch // Int. J. Solids and Structures. – 2002. – 39, N 16. – P. 4314 – 4326.
17. Sternberg E. Three-dimensional Stress Constraint in the Theory of Elasticity // Appl. Mech. Rev. – 1958. – 11, N 1. – P. 1 – 4.
18. Wang C.H., Rose L.R.F., Callinan R., Baker A.A. Thermal Stresses in a Plate with a Circular Reinforcement // Int. J. Solids Structures. – 2000. – 36, N 33. – P. 4577 – 4599.
19. Yang Zh. The Stress and Strain Concentrations of an Elliptical Hole in an Elastic Plate of Finite Subjected to Tensile Stress // Int. J. Fract. – 2009. – 155. – P. 43 – 44.
20. Yang Zh., Kim Ch-Boo, Chjo Ch., Beom N.G. The Concentration of Stress and Strain in Finite Thickness Elastic Plate Containing a Circular Hole // Int. J. Solids Struct. – 2008. – 45. – P. 713 – 731.

Поступила 15.08.2012

Утверждена в печать 19.02.2015