

В. Г. Карнаухов¹, В. И. Козлов¹, А. В. Завгородний²,
И. Н. Умрыхин²

**ВЫНУЖДЕННЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ
ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА**

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, 57, Украина*

²*Николаевский национальный университет им. В.А. Сухомлинского,
ул. Никольская, 24, 54030, Николаев, Украина;
e-mail: Andrew-mdu@ukr.net*

Abstract. On basis of the complex characteristics concept, the statement is given for a coupled nonlinear boundary problem of thermoelectroviscoelasticity on the forced harmonic vibrations and dissipative heating of inelastic three-dimensional bodies of revolution. The nonlinearity is produced by dependence of mechanical and electromechanical characteristics on temperature. By means of iteration method, the solution of this nonlinear problem is reduced to solution of linear problems of electroviscoelasticity and problems of thermal conductivity with the known heat source. To solve the obtained linear problems of electromechanics and heat conductivity, the finite element method is developed. By using this approach, a coupled nonlinear problem of thermoelectroviscoelasticity on the forced harmonic vibrations and dissipative heating of a hinged fixed three-layer cylindrical panel is solved. Basing on the obtained numerical data, an effect of nonlinearity on amplitude-frequency and temperature-frequency characteristics is studied.

Key words: thermoelectroviscoelasticity, vibrations and dissipative heating, three-dimensional bodies of revolution, iteration method, finite element method, amplitude-frequency and temperature-frequency characteristics.

Введение.

Тела вращения, состоящие из пассивных (без пьезоэффекта) и пьезоактивных материалов, широко применяются в различных областях современной техники [2, 4, 9, 10 – 13] в качестве излучателей и приемников звука, работающих в широком диапазоне частот. Для повышения прочности и эффективности работы в активные элементы конструкций часто включаются металлические слои. В последние годы для управления стационарными и нестационарными колебаниями конструкций из пассивных материалов разработаны активные методы, суть которых состоит в том, что в конструкцию включаются пьезоэлектрические слои, выполняющие роль сенсоров и актуаторов [8 – 13].

Существует несколько методов активного управления колебаниями. Первый из них состоит в использовании только актуаторов, к которым подводится некоторая разность потенциалов, которая компенсирует действие механической нагрузки, в результате чего амплитуда колебаний уменьшается и, соответственно, уменьшается уровень динамических напряжений. Второй метод основан на совместной работе сенсоров и актуаторов. При этом к актуатору подводится разность потенциалов, пропорциональная скорости изменения разности потенциалов, снимаемой с сенсора, в результате чего в теле, кроме демпфирования колебаний за счет гистерезисных потерь, в конструкции появляется дополнительное затухание. Но присущие неупругим материалам гистерезисные потери приводят к повышению температуры в теле, так называемой температуры диссипативного разогрева. Ее уровень зависит от многих факто-

ров – геометрических параметров тела, нагрузки, частоты нагружения, диссипативных свойств материала, механических и температурных граничных условий и др. Наибольшее повышение температуры следует ожидать при колебаниях на резонансных частотах.

Резонансным колебаниям тел из пассивных и пьезоактивных неупругих материалов посвящено большое количество работ. Однако практически во всех работах не учитывается диссипативный разогрев, который может привести не только к количественным, но и к качественным изменениям колебательного процесса. Например, при достижении температурой точки Кюри пьезоактивного материала имеет место специфический тип теплового разрушения, когда конструкция перестает выполнять свое функциональное назначение из-за потери пьезоэффекта.

В данной статье представлена постановка задачи о вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве неупругого трехслойного тела вращения, которое составлено из внутреннего пассивного слоя и двух внешних пьезоактивных слоев. Для моделирования неупругого поведения материалов слоев использована концепция комплексных характеристик [3, 6, 9, 13], согласно которой определяющие уравнения пассивных и пьезоактивных материалов имеют такой же вид, как и определяющие уравнения для упругого материала с той лишь разницей, что они становятся комплексными с характеристиками, которые зависят от температуры (первый тип физической нелинейности) либо от амплитуд независимых полевых величин (второй тип физической нелинейности). Кроме того, в обоих случаях диссипативная функция зависит от температуры и амплитуд независимых полевых величин. В данной статье рассмотрен только первый тип физической нелинейности.

Для решения нелинейных краевых задач о колебаниях и диссипативном разогреве тел из неупругих пассивных и пьезоактивных материалов при действии на них гармонических во времени механических и электрических нагрузок использован итерационный метод пошагового интегрирования [3, 6], сводящий исходную нелинейную задачу к последовательности линейных задач электромеханики с зависящими от координат комплексными характеристиками и линейных задач теплопроводности с известным источником тепла. Представлена вариационная постановка указанных линейных задач. Для решения вариационных задач применен метод конечных элементов. В качестве примера рассмотрена задача о колебаниях и диссипативном разогреве трехслойной цилиндрической панели (одним из наиболее распространенных на практике элементов конструкций [4, 5]). Приведены результаты расчета амплитудно-частотных и температурно-частотных характеристик этой панели. Результаты расчетов представлены в виде графиков, иллюстрирующих влияние физической нелинейности первого типа на указанные характеристики.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим тело вращения из вязкоупругого пьезоэлектрического материала, отнесённое к цилиндрической системе координат (r, z, θ) . Механические свойства этого материала зависят от температуры. Тело находится под действием изменяющегося по гармоническому закону электромеханического нагружения с частотой, близкой к его резонансной частоте. Примем, что электромеханическое поведение неупругого материала описывается концепцией комплексных характеристик [3, 6, 9, 13]. В этом случае динамическая задача о вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве пьезоэлектрического тела вращения сводится к решению трёхмерных уравнений движения и уравнений электростатики в цилиндрической системе координат [2 – 4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{zr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \rho \omega^2 w = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho \omega^2 u = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \rho \omega^2 v = 0; \quad \operatorname{div} \vec{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_{ij} ($i, j = r, \theta, z$) – амплитудные значения компонент тензора напряжений; w, u, v – компоненты вектора перемещений; ρ – плотность материала; ω – частота колебаний; \vec{D} – вектор электрической индукции с радиальной D_r , окружной D_θ и осевой D_z компонентами.

На части поверхности тела Σ_p , где заданы поверхностные силы \vec{P}_n , тензор напряжений удовлетворяет следующим граничным условиям $P_{\alpha n} = \sigma_{\alpha\beta} l_{\beta n}$. Здесь l_β ($\beta = 1, 2, 3$) – направляющие косинусы внешней нормали \vec{n} к поверхности тела Σ_p ; $P_{\alpha n}$ – проекции поверхностных сил на оси цилиндрической системы координат. На другой части поверхности тела Σ_u могут быть заданы компоненты вектора перемещений.

При возбуждении колебаний электрическим полем на бесконечно тонких электродах, покрывающих поверхности тела, задаем значение электрического потенциала

$$\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}. \quad (2)$$

На тех частях поверхности тела, где электроды отсутствуют, принимаем, что нормальная составляющая вектора электрической индукции D_n равна нулю ($D_n = 0$).

Тензор малой деформации связан с вектором перемещений соотношениями Коши [3]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right); \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right]; \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right); \quad \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Электрический потенциал φ связан с компонентами напряжённости электрического поля соотношениями

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \quad (4)$$

Для замыкания системы (1) – (4) её необходимо дополнить уравнениями состояния. Для предварительно поляризованных в радиальном направлении вязкоупругих пьезоматериалов комплексные уравнения состояния в цилиндрической системе координат (r, z, θ) имеют вид [2, 3]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}^E \varepsilon_{rr} + c_{13}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}^E \varepsilon_{zz} - e_{33} E_r; \quad \sigma_{\theta\theta} = c_{13}^E \varepsilon_{rr} + c_{11}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{13} E_r; \\ \sigma_{zz} &= c_{13}^E \varepsilon_{rr} + c_{12}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}^E \varepsilon_{zz} - e_{13} E_r; \quad \sigma_{rz} = 2c_{44}^E \varepsilon_{rz} - e_{15} E_z; \\ \sigma_{z\theta} &= (c_{11}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{z\theta}; \quad \sigma_{r\theta} = 2c_{44}^E \varepsilon_{r\theta} - e_{15} E_\theta; \end{aligned} \quad (5)$$

$$D_r = \mu_{33}^S E_r + e_{13} (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}) + e_{33} \varepsilon_r; \quad D_\theta = \mu_{11}^S E_\theta + 2e_{15} \varepsilon_{r\theta}; \quad D_z = \mu_{11}^S E_z + 2e_{15} \varepsilon_{rz}.$$

Здесь приняты обозначения согласно [2]. Для осевой и окружной поляризаций аналогичные уравнения состояния представлены в [2].

Температурное поле диссипативного разогрева определяем согласно решению уравнения теплопроводности [3, 6]

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_q \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_q r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_q \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + D_M = c \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

при начальных $T = T_0$ (при $t = t_0$) и граничных условиях конвективного теплообмена с окружающей средой, температура которой T_c

$$\lambda_q \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha_T (T - T_c). \quad (7)$$

Здесь λ_q – коэффициент теплопроводности; α_T – коэффициент теплоотдачи; c – коэффициент удельной массовой теплоемкости материала.

Диссипативную функцию D_M , входящую в уравнение энергии (6), определяем по формуле [3, 6]

$$D_M = \frac{\omega}{2} \left(\sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} - \sigma''_{ij} \varepsilon''_{ij} + D'_i E'_i - D''_i E''_i \right) \quad (i, j = r, \theta, z). \quad (8)$$

Для анализа активного демпфирования вынужденных колебаний используем интегральную характеристику, которая определяется, как отношение электромеханической энергии, диссипированной в материале за период колебаний, к удвоенному среднему значению энергии, накапливаемой за период, т.е.:

$$\eta = 2\pi \int_V D_M r dr dz d\theta / \omega \int_V u_T r dr dz d\theta \quad (9)$$

$$\left[U_T = \frac{1}{2} \left(\sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij} \varepsilon''_{ij} + D'_i E'_i + D''_i E''_i \right) \quad (i, j = r, \theta, z) \right]. \quad (10)$$

2. Методика решения задачи.

Система уравнений (1) – (8) с соответствующими граничными и начальными условиями представляет собой сложную нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных. Её нелинейность обусловлена зависимостью физико-механических свойств материала и диссипативной функции от температуры, компонент тензора деформаций и вектора напряжённости электрического поля. Если предположить дополнительно, что эти свойства не зависят от температуры, то система (1) – (8) линеаризуется и распадается на две независимые линейные задачи – задачу расчёта электромеханического состояния тела из вязкоупругого пьезоэлектрического материала и задачу расчёта температурного поля диссипативного разогрева путём решения уравнения теплопроводности с известным источником тепла [3, 6].

Для решения представленной выше нелинейной краевой задачи используем итерационный метод пошагового интегрирования по времени, суть которого заключается в следующем:

1) по заданному в начальный момент $t = 0$ распределению температуры определяем механические характеристики материала и решаем линейную задачу электровязкоупругости;

2) по полученным механическим переменным $(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i)$ определяем диссипативную функцию D_M ;

3) на интервале времени $[0, t_1]$ решаем задачу теплопроводности с известным источником тепла, причём выбор значения t_1 зависит от чувствительности механических свойств материала к температуре;

4) по известному распределению температуры в момент времени t_1 вычисляем изменённые комплексные характеристики материала и повторяем процесс решения задач 1 и 2;

5) по полученным диссипативной функции и распределению температуры в момент t_1 решаем уравнение теплопроводности на следующем интервале времени $[t_1, t_2]$ и т.д. Процесс завершаем достижением заданного момента времени $t = t_k$.

Для ускорения сходимости итерационного процесса использован метод Стефенсона – Эйткена [3].

Решение задачи пошаговым методом позволяет исследовать поведение вязкоупругих элементов как в стационарном тепловом состоянии, так и в процессе выхода температуры на стационарный режим.

Для решения полученных на каждой итерации линейных задач электровязкоупругости с переменными комплексными коэффициентами и линейных задач теплопроводности с известным источником тепла используем метод конечных элементов (МКЭ). Для этого используем вариационную формулировку задачи электромеханики, которая сводит ее решение к определению стационарных точек функционала

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = \frac{1}{2} \int_V \left[\begin{aligned} & c_{11}^E \varepsilon_{zz}^2 + 2c_{13}^E \varepsilon_{zz} \varepsilon_{rr} + 2c_{12}^E \varepsilon_{zz} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}^E \varepsilon_{rr}^2 + 2c_{13}^E \varepsilon_{rr} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}^E \varepsilon_{\theta\theta}^2 + \\ & + 4c_{44}^E \varepsilon_{r\theta}^2 + 4c_{44}^E \varepsilon_{rz}^2 + 2(c_{11}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{z\theta} - 2e_{13} \varepsilon_{zz} E_r - 2e_{33} \varepsilon_{rr} E_r - \\ & - 2e_{13} \varepsilon_{\theta\theta} E_r - 4e_{15} \varepsilon_{r\theta} E_\theta - 4e_{15} \varepsilon_{rz} E_z - \mu_{33} E_r^2 - \mu_{11} E_z^2 - \mu_{11} E_\theta^2 - \\ & - \rho \omega^2 (u^2 + w^2 + v^2) \end{aligned} \right] r dv dz d\theta - \\ - \int_{\Sigma_p} (p_{nz} w + p_{nr} u + p_{r\theta} v - \sigma^e \Psi) d\Sigma_p. \end{aligned} \quad (11)$$

Решение задачи теплопроводности с известным источником тепла сводим к решению вариационной задачи для функционала

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2} \int_V \left[\lambda_q \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + \lambda_q \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{\lambda_q}{r^2} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 + 2\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - 2D_M T \right] r dr dz d\theta + \\ + \int_S \alpha \left(\frac{T}{2} - T_c \right) T dS. \end{aligned} \quad (12)$$

Для аппроксимации напряжённо-деформированного состояния и электрического потенциала в плоскости меридионального сечения (r, z) применяем алгебраические полиномы второй степени. Для аппроксимации перемещений и потенциала в окружном направлении в каждом элементе используем тригонометрические полиномы, представляющие три члена ряда Фурье, т.е.:

$$H(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta. \quad (13)$$

Разобьём область, которую занимает тело, N узловыми точками на M пространственных элементов. При этом предполагаем, что перемещения и электрический потенциал в пределах элемента аппроксимируются выражениями

$$w = \sum_{i=1}^{24} K_i w_i; \quad u = \sum_{i=1}^{24} K_i u_i; \quad v = \sum_{i=1}^{24} K_i v_i; \quad \Psi = \sum_{i=1}^{24} K_i \Psi_i. \quad (14)$$

Здесь w_i, u_i, v_i, Ψ_i – узловые значения перемещений и электрического потенциала; K_i – аппроксимирующие функции, которые являются комбинацией алгебраических $L_j (j = 1, 2, 3, \dots, 8)$ и нормализованных тригонометрических полиномов $H_j (j = 1, 2, 3)$ [7]:

$$L_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1); \quad L_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1);$$

$$L_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta+1); \quad L_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1); \quad L_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta);$$

$$L_6 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi); \quad L_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta); \quad L_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi); \quad (15)$$

$$H_1(\theta) = \frac{\sin(\theta-\theta_2) - \sin(\theta-\theta_3) + \sin(\theta_2-\theta_3)}{\sin(\theta_1-\theta_2) - \sin(\theta_1-\theta_3) + \sin(\theta_2-\theta_3)};$$

$$H_2(\theta) = \frac{\sin(\theta-\theta_3) - \sin(\theta-\theta_1) + \sin(\theta_3-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_3) - \sin(\theta_2-\theta_1) + \sin(\theta_3-\theta_1)}; \quad (16)$$

$$H_3(\theta) = \frac{\sin(\theta-\theta_1) - \sin(\theta-\theta_2) + \sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_3-\theta_1) - \sin(\theta_3-\theta_2) + \sin(\theta_1-\theta_2)}.$$

Определённые таким образом функции формы $K_1 = L_1 H_1$; $K_2 = L_2 H_1$; ...; $K_{24} = L_8 H_3$ равны нулю во всех узловых точках элемента, за исключением узла, номер которого совпадает с номером соответствующей функции формы. Кроме того, они удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{24} K_i = 1$. Связь между цилиндрическими r, z и местными ξ, η координатами осуществляем при помощи зависимостей

$$r = \sum_{i=1}^{24} K_i r_i; \quad z = \sum_{i=1}^{24} K_i z_i. \quad (17)$$

Так как получить зависимости вида $\xi(r, z)$, $\eta(r, z)$, обратные (17), не представляется возможным, частные производные при определении деформаций следует вычислять по ξ, η , а затем полученные зависимости решить относительно производных по цилиндрическим координатам. В результате выражения для компонент тензора деформаций и компонент вектора напряжённости электрического поля через узловые значения перемещений и электрического потенциала можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \sum_{i=1}^{24} \Psi_i u_i; \quad \varepsilon_{zz} = \sum_{i=1}^{24} \Phi_i w_i; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \sum_{i=1}^{24} \left(\frac{1}{r} \chi_i v_i + \frac{1}{r} K_i u_i \right); \\ \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{24} \Phi_i u_i + \sum_{i=1}^{24} \Psi_i w_i \right); \quad \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{24} \Phi_i v_i + \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{r} \chi_i w_i \right); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{24} \frac{1}{r} \chi_i u_i + \sum_{i=1}^{24} \Psi_i v_i - \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{r} K_i v_i \right); \quad E_r = -\sum_{i=1}^{24} \varphi_i \psi_i; \quad E_z = -\sum_{i=1}^{24} \Phi_i \varphi_i; \quad E_\theta = -\sum_{i=1}^{24} \chi_i \frac{\varphi_i}{r}$$

$$\left[\Phi_i = \frac{1}{|j|} \left(\frac{\partial K_i}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial K_i}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right); \quad \Psi_i = \frac{1}{|j|} \left(\frac{\partial K_i}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial K_i}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right); \quad \chi_i = \frac{\partial K_i}{\partial \theta}; \quad (19) \right.$$

$$\left. |j| = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \text{ — определитель Якоби (якобиан)} \right].$$

Механическое нагружение \vec{P} также аппроксимируем функциями формы в пределах каждого конечного элемента:

$$P_{nz} = \sum_{i=1}^{24} K_i P_{inz}; \quad P_{nr} = \sum_{i=1}^{24} K_i P_{inr}; \quad P_{n\theta} = \sum_{i=1}^{24} K_i P_{in\theta}. \quad (20)$$

Подставляя выражения для деформаций и компонент вектора напряжённости электрического поля в функционал (11), из условия его стационарности получим систему линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений компонент вектора перемещений и электрического потенциала $(w_i, u_i, v_i, \varphi_i)$ для отдельного конечного элемента:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_m}{\partial w_1} = a_{11}^w w_1 + b_{11}^w u_1 + c_{11}^w v_1 + d_{11}^w \varphi_1 + \dots + a_{124}^w w_{24} + b_{124}^w u_{24} + c_{124}^w v_{24} + d_{124}^w \varphi_{24} = P_1^{(z,w)};$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_m}{\partial u_1} = a_{11}^u w_1 + b_{11}^u u_1 + c_{11}^u v_1 + d_{11}^u \varphi_1 + \dots + a_{124}^u w_{24} + b_{124}^u u_{24} + c_{124}^u v_{24} + d_{124}^u \varphi_{24} = P_1^{(r,u)};$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_m}{\partial v_1} = a_{11}^v w_1 + b_{11}^v u_1 + c_{11}^v v_1 + d_{11}^v \varphi_1 + \dots + a_{124}^v w_{24} + b_{124}^v u_{24} + c_{124}^v v_{24} + d_{124}^v \varphi_{24} = P_1^{(\theta,v)};$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_m}{\partial \varphi_1} = a_{11}^\varphi w_1 + b_{11}^\varphi u_1 + c_{11}^\varphi v_1 + d_{11}^\varphi \varphi_1 + \dots + a_{124}^\varphi w_{24} + b_{124}^\varphi u_{24} + c_{124}^\varphi v_{24} + d_{124}^\varphi \varphi_{24} = 0; \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_m}{\partial w_{24}} = a_{241}^w w_1 + b_{241}^w u_1 + c_{241}^w v_1 + d_{241}^w \varphi_1 + \dots + a_{2424}^w w_{24} + b_{2424}^w u_{24} + c_{2424}^w v_{24} + d_{2424}^w \varphi_{24} = P_{24}^{(z,w)};$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_m}{\partial u_{24}} = a_{241}^u w_1 + b_{241}^u u_1 + c_{241}^u v_1 + d_{241}^u \varphi_1 + \dots + a_{2424}^u w_{24} + b_{2424}^u u_{24} + c_{2424}^u v_{24} + d_{2424}^u \varphi_{24} = P_{24}^{(r,u)};$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_m}{\partial v_{24}} = a_{241}^v w_1 + b_{241}^v u_1 + c_{241}^v v_1 + d_{241}^v \varphi_1 + \dots + a_{2424}^v w_{24} + b_{2424}^v u_{24} + c_{2424}^v v_{24} + d_{2424}^v \varphi_{24} = P_{24}^{(\theta,v)};$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_m}{\partial \varphi_{24}} = a_{241}^\varphi w_1 + b_{241}^\varphi u_1 + c_{241}^\varphi v_1 + d_{241}^\varphi \varphi_1 + \dots + a_{2424}^\varphi w_{24} + b_{2424}^\varphi u_{24} + c_{2424}^\varphi v_{24} + d_{2424}^\varphi \varphi_{24} = 0.$$

Выражения для коэффициентов a_{ij}, \dots, d_{ij} этих уравнений определяются через физико-механические характеристики материала и геометрические параметры рассматриваемого тела.

Просуммировав выражения (21) по всем конечным элементам, получим для общей глобальной нумерации узлов систему уравнений, в которой интегрирование по объёму тела заменено суммой интегралов (по объёму отдельных конечных элементов), а интегрирование по поверхности – суммой интегралов по поверхностях элементов, на которых заданы граничные условия в напряжениях.

Полученную систему алгебраических уравнений решаем в комплексной области методом Гаусса. Это позволяет с высокой точностью получить решение систем большой размерности без нарушения симметричности и ленточности их структуры.

По полученным узловым значениям перемещений и электрического потенциала определяем компоненты тензора деформаций и компоненты вектора напряжённости

электрического поля в произвольной точке конечного элемента. При этом точность определения деформаций, а также напряжений и индукции электрического поля, вследствие необходимого процесса дифференцирования, будет ниже, чем точность определения перемещений и электрического потенциала. Она также будет различна в разных точках элемента. Наиболее точные значения получаем в точках интегрирования Гаусса, соответствующих минимально допустимому порядку интегрирования [1, 3] (в данном случае $n = 8$).

При решении вариационной задачи (12) для уравнения теплопроводности производная по времени $\partial T / \partial t$ не варьируется и заменяется выражением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}. \quad (22)$$

Это позволяет реализовать неявную схему решения задачи теплопроводности.

Поэтому вычисления деформаций, напряжённости электрического поля, а также механических напряжений и электрической индукции производится в восьми точках интегрирования. Как известно [1, 7], положение точек интегрирования определяется иррациональными числами. Это доставляет некоторое неудобство при анализе результатов, т.е. для многих практически важных расчётов необходимы значения напряжений и электрической индукции, вычисленные в узловых точках конечноэлементной сетки, а также на границе тела. Наиболее простое определение деформаций, напряжений и других величин в каждом конечном элементе получаем при экстраполяции этих величин, вычисленных в точках интегрирования, на произвольные точки, в том числе и на границу. Для рассматриваемого случая наиболее точные вычисления получаем при экстраполяции напряжений и индукции электрического поля билинейными полиномами.

3. Числовые результаты и их анализ.

В качестве примера рассмотрим колебания и диссипативный разогрев трёхслойной цилиндрической панели толщиной $H = 2h_1 + h_2$, которая состоит из внешних пьезослоёв толщиной h_1 одинаковыми вязкоупругими свойствами и внутреннего слоя толщиной h_2 из пассивного материала. На пьезослоях нанесены сплошные электроды. Внутренние электроды коротко замкнуты. К внешним электродам подводится разность потенциалов $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$. Шарнирно опертые торцы панели свободны от механической нагрузки. Из-за симметрии нагрузки и граничных условий при решении задачи рассматриваем четверть панели с условиями симметрии $w = 0$ при $z = 0$, $v = 0$ при $\theta = 0$. Расчёты проведены для панели, внешние слои которой изготовлены из пьезокерамики $PZT - TC - 65$ с радиальной поляризацией, а внутренний слой – алюминевый. Нагрузка панели, её геометрические и физико-механические свойства характеризуются такими параметрами:

$$\varphi_0 = 70B; \quad r_1 = 0,09\text{ м}; \quad r_2 = 0,11\text{ м}; \quad H = r_2 - r_1 = 0,02\text{ м}; \quad h_1 = 0,005\text{ м}; \quad h_2 = 0,015\text{ м};$$

$$L = 0,1\text{ м}; \quad \theta_0 = \pi / 3; \quad E_a = 7,3 \cdot 10^{10}\text{ Н/м}^2; \quad \nu_a = 0,34; \quad \rho_a = 0,27 \cdot 10^4\text{ кг/м}^3.$$

Коэффициент теплопроводности и плотность материала внешнего слоя имеют такие значения: $\lambda = 1,25\text{ Вт/м} \cdot ^\circ\text{C}$, $\rho = 0,75 \cdot 10^4\text{ кг/м}^3$. Коэффициент теплоотдачи между окружающей средой и материалом панели является постоянным $\left(\alpha_T = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right)$.

Комплексные характеристики для указанного материала представлены в [8]. Их зависимость от температуры аппроксимирована полиномами второй степени:

$$S'_{11} = [0,171 \cdot 10^2 + 0,48335 \cdot 10^{-2} T - 0,48511 \cdot 10^{-4} T^2] \cdot 10^{-12}\text{ м}^2/\text{Н};$$

$$\begin{aligned}
S'_{12} &= -[0,568 \cdot 10^1 + 0,48333 \cdot 10^{-2} T - 0,19444 \cdot 10^{-4} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \\
S'_{13} &= -[0,91 \cdot 10^1 + 0,97231 \cdot 10^{-2} T - 0,38544 \cdot 10^{-4} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \\
S'_{33} &= [0,184 \cdot 10^2 - 0,43333 \cdot 10^{-1} T + 0,11111 \cdot 10^{-3} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \\
S'_{55} &= [0,460 \cdot 10^2 - 0,29167 \cdot 10^{-1} T - 0,6944 \cdot 10^{-4} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \\
d'_{31} &= [-189,7 + 0,4545 T - 0,1515 \cdot 10^{-2} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2; \\
d'_{33} &= [357 + 0,17 T - 0,41 \cdot 10^{-3} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2; \\
d'_{15} &= [609 - 0,385 T + 0,45 \cdot 10^{-3} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2; \\
\mu'_{11} &= [0,20541 \cdot 10^5 + 0,4163 \cdot 10^2 T - 0,576 \cdot 10^{-1} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}; \\
\mu'_{33} &= [0,14803 \cdot 10^5 + 0,76783 \cdot 10^2 T - 0,145 \cdot 10^{-1} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Для мнимых составляющих податливостей имеем равенства:

$$\begin{aligned}
S''_{11} &= -\frac{0,2}{17,1} S'_{11}; \quad S''_{12} = -\frac{0,1}{5,8} S'_{12}; \quad S''_{13} = -\frac{0,2}{9,1} S'_{13}; \quad S''_{33} = -\frac{0,4}{18,4} S'_{33}; \quad S''_{55} = -\frac{5,6}{468} S'_{55}; \\
d''_{31} &= \frac{4,8}{189,7} d'_{31}; \quad d''_{33} = -\frac{14,7}{357} d'_{33}; \quad d''_{15} = -\frac{253,6}{609} d'_{15}; \quad \mu''_{11} = -\frac{11270}{20541} \mu'_{11}; \quad \mu''_{33} = -\frac{342}{14805} \mu'_{33}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Комплексные характеристики c_{ij} , пьезомодули e_{ij} , диэлектрические проницаемости μ_{ij}^S определяются по формулам

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \frac{S_{11}^E S_{11}^E - S_{13}^E S_{13}^E}{(S_{11}^E - S_{12}^E) \Delta}; \quad c_{12} = \frac{S_{13}^E S_{13}^E - S_{12}^E S_{13}^E}{(S_{11}^E - S_{12}^E) \Delta}; \quad c_{13} = -\frac{S_{13}^E}{\Delta}; \\
c_{33} &= \frac{S_{11}^E - S_{12}^E}{\Delta}; \quad c_{55} = \frac{1}{S_{55}^E}; \quad c_{66} = \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}); \\
e_{33} &= \frac{d_{33} (S_{11}^E + S_{12}^E) - 2d_{31} S_{13}^E}{\Delta}; \quad e_{15} = \frac{d_{15}}{S_{55}^E}; \quad e_{31} = \frac{d_{31} S_{33}^E - d_{33} S_{13}^E}{\Delta}; \\
\mu_{11} &= \mu_{33}^T - \frac{d_{33}^2 (S_{11}^E + S_{12}^E) + 2d_{31}^2 S_{33}^E - 4d_{33} d_{31} S_{13}^E}{\Delta}; \quad \Delta = (S_{11}^E + S_{12}^E) S_{33}^E - 2S_{13}^E S_{13}^E.
\end{aligned} \tag{25}$$

На рис. 1, 2 показана частотная зависимость радиальной компоненты вектора перемещений и стационарной температуры в точках срединной поверхности, которая лежит в сечении $z = 0$; $R = 0,1 \text{ м}$; $\theta = 0$. Здесь кривая 1 отвечает расчету по нелинейной теории, а кривая 2 – по линейной связанной теории. Как видно, учет указанной нелинейности приводит к типичному для нелинейных систем характеру зависимости амплитуды колебаний и температуры от частоты, когда эти зависимости обладают нелинейным гистерезисом и перескоками с одной ветви на другую при определенных частотах.

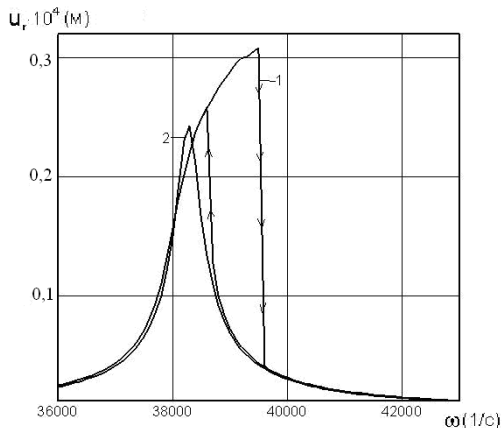


Рис. 1

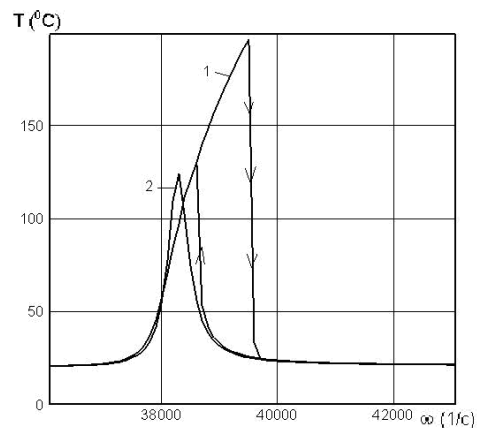


Рис. 2

Выводы.

В работе предложены математические модели и методы исследования вынужденных резонансных колебаний и температуры диссипативного разогрева трехмерных пространственных тел вращения из неупругих пассивных и пьезоактивных материалов с учетом влияния нелинейности. Основные результаты работы заключаются в следующем:

1) на основе концепции комплексных характеристик представлена постановка нелинейных краевых задач о вынужденных гармонических колебаниях и диссипативном разогреве неупругих трехмерных тел с учетом нелинейности, порождаемой зависимостью механических и электромеханических характеристик от температуры. Решение указанной нелинейной задачи сведено к решению последовательности линейных задач электровязкоупругости с зависящими от пространственных координат комплексными механическими и электромеханическими характеристиками и задач теплопроводности с известным источником тепла;

2) решение указанных линейных задач электромеханики и теплопроводности получено методом конечных элементов;

3) используя указанный подход, получено решение новой задачи о вынужденных колебаниях и виброразогреве шарнирно опертой трехслойной цилиндрической панели с учетом физической нелинейности;

4) на основе анализа числовых результатов исследовано влияние нелинейности на амплитудно- и температурно-частотные характеристики.

РЕЗЮМЕ. На основі концепції комплексних характеристик подано постановку зв'язаної нелінійної крайової задачі термоелектров'язкопружності про вимушені гармонічні коливання і дисипативний розігрів неупругих тривимірних тіл обертання з врахуванням нелінійності, викликані залежністю механічних та електромеханічних характеристик від температури. За допомогою ітераційного методу розв'язок указаної нелінійної задачі зведено до розв'язку лінійних задач електров'язкопружності й задач теплопровідності з відомим джерелом тепла. Для розв'язування вказаних лінійних задач електромеханіки й теплопровідності розроблено метод скінченних елементів. З використанням описаного підходу дано розв'язок зв'язаної нелінійної задачі термоелектров'язкопружності про вимушені гармонічні коливання і дисипативний розігрів шарнірно закріпленої тришарової циліндричної панелі. Дано аналіз числових результатів та досліджено вплив нелінійності на амплітудно- і температурно-частотні характеристики.

1. Бате К.Ю. Численные методы анализа. Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
 2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. В 6т. – Т. 5. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 290 с.

3. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖТТУ, 2005. – 428с.
4. Grigorenko A.Yu., Loza I.A. Nonaxisymmetric Waves in Layered Hollow Cylinders with Axially Polarized Piezoceramic Layers // *Int. Appl. Mech.* – 2014 – **50**, N 2. – P. 150 – 158.
5. Hamidzadeh H.R., Jazar R.N. *Vibrations of Thick Cylindrical Structures.* – Heidelberg: Springer, 2010. – 201p.
6. Karnaukhov V.G. Thermomechanics of Coupled Fields in Passive and Piezoactive Inelastic Bodies Under Harmonic Deformation // *J. Therm. Stresses.* – **26**. – N 6 – 7. – P. 783 – 315.
7. Kozlov V.I. Oscillation and Dissipative Heating of a Multilayer Shell of Revolution Made of Viscoelastic Material // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, N 6. – P. 480 – 487.
8. Sabat R.G., Mukherjee B., Ren W., Yung G. Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics // *J. Appl. Phys.* – 2007. – **101**. – P. 06411 – 1 – 7.
9. Schwartz M. *Encyclopedia of Smart Materials.* – Michigan: Willey, 2002. – 1073 p.
10. Shu'iga N.A., Grigor'eva L.O., Kirichenko A.A. Nonstationary Electroelastic Vibrations of a Spherical Shell with Impedance Boundary Conditions // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 3. – P. 274 – 281.
11. Shu'iga N.A., Levchenko V.V. Natural Modes of Vibration of Piezoelectric Circular Plates with Radially Cut Electrodes // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 5. – P. 582 – 592.
12. Tzou H.S., Bergman L.A. *Dynamics and control of distributed systems.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 374p.
13. Tzou H.S. *Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua).* – Dordrecht: Kluwer, 1993. – 480 p.

Поступила 6.03.2014

Утверждена в печать 26.05.2015

