

Е. В. Савельева

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН В НАНОКОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛАХ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ksav@hotmai.ru*

Abstract. The theoretical study of cubically nonlinear elastic plane harmonic waves interaction is carried out for the material, nonlinear properties of which are described by Mur-naghan elastic potential. The interaction of transverse horizontal and transverse vertical harmonic waves is studied by means of perturbing method. Pumping of the energy between different types of transverse waves is described. Results of a numerical analysis for five types of nanocomposite materials are presented.

Key words: cubic nonlinearity, elastic plane wave, transverse harmonic wave, transverse horizontal harmonic wave, transverse vertical harmonic wave, perturbing method, two waves interaction, nanocomposite materials.

Введение.

Предметом публикации являются результаты исследования взаимодействия горизонтально и вертикально поляризованных поперечных упругих плоских волн при их распространении в гиперупругом материале. Деформирование материала описывается нелинейной моделью Мурнагана [3, 6, 10]. Представление упругого потенциала

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(u_{1,1})^2 + \frac{1}{2}\mu[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2] + \\
 & + \left(\mu + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3}A + B + \frac{1}{3}C\right)(u_{1,1})^3 + \frac{1}{2}(\lambda + B)u_{1,1}[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2] + \\
 & + \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu + A + 2B)[(u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2]^2 + \\
 & + \frac{1}{8}(3A + 10B + 4C)(u_{1,1})^2[(u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2] \quad (0.1)
 \end{aligned}$$

позволяет исследовать квадратично и кубически нелинейные волновые эффекты в гиперупругом материале [8, 9]. Зависимость вектора перемещений $\vec{u}(x, t) = \{u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)\}$ только от одной пространственной переменной дает возможность последующей записи полной системы уравнений для распространяющихся вдоль оси x плоских волн. В рамках учета квадратичной и кубической нелинейностей в определяющих уравнениях нелинейные волновые уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
 \rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,xx} = & N_1 u_{1,xx} u_{1,x} + N_2 (u_{2,xx} u_{2,x} + u_{3,xx} u_{3,x}) + \\
 & + N_3 u_{1,xx} (u_{1,x})^2 + N_4 (u_{2,xx} u_{2,x} u_{1,x} + u_{3,xx} u_{3,x} u_{1,x}); \quad (0.2)
 \end{aligned}$$

$$\rho u_{2,tt} - \mu u_{2,xx} = N_2(u_{2,xx}u_{1,x} + u_{1,xx}u_{2,x}) + N_4u_{2,xx}(u_{2,x})^2 + N_5u_{2,xx}(u_{1,x})^2 + N_6u_{2,xx}(u_{3,x})^2; \quad (0.3)$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,xx} = N_2(u_{3,xx}u_{1,x} + u_{1,xx}u_{3,x}) + N_4u_{3,xx}(u_{3,x})^2 + N_5u_{3,xx}(u_{1,x})^2 + N_6u_{3,xx}(u_{2,x})^2. \quad (0.4)$$

В (0.1) – (0.4) использованы стандартные обозначения: ρ – плотность; λ, μ – упругие постоянные второго порядка (постоянные Ламе); A, B, C – упругие постоянные третьего порядка (постоянные Мурнагана),

$$N_1 = 3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]; \quad N_2 = \lambda + 2\mu + \frac{1}{2}A + B;$$

$$N_3 = \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu) + 6(A + 3B + C); \quad N_4 = \frac{1}{2}[2(\lambda + 2\mu) + 5A + 14B + 4C];$$

$$N_5 = \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu + A + 2B), \quad N_6 = 3A + 10B + 4C.$$

Квадратично нелинейные слагаемые в правой части уравнений (0.2) – (0.4) использовались при постановке и решении трех стандартных задач нелинейной акустики, давших возможность исследования нелинейных эффектов, возникающих при распространении плоских волн [2, 5, 14, 16].

§1. Постановка задачи.

Наличие в правой части уравнений (0.2) – (0.4) кубически нелинейных слагаемых создает новые, прокомментированные в работе [14], возможности для описания волновой картины. В частности, может быть решена, сформулированная в [14], «новая четвертая стандартная задача. Она состоит в задании на входе в среду одной из поперечных волн и выявлении генерирования другой поперечной волны. Это обеспечиваются составляющие с коэффициентом $N_6 = 3A + 10B + 4C$ ».

Далее решаем задачу, в которой принимается условие: первоначально на входе в среду возбуждаются только поперечные волны; продольные перемещения отсутствуют. Уравнение (0.2), следовательно, далее не рассматриваем, так как возбуждением поперечными волнами продольной волны далее интересоваться не будем: эта задача уже была исследована ранее [6, 12, 13]. Уравнения (0.3), (0.4), таким образом, представим в виде

$$\rho u_{2,tt} - \mu u_{2,xx} = N_4u_{2,xx}(u_{2,x})^2 + N_6u_{2,xx}(u_{3,x})^2; \quad (1.1)$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,xx} = N_4u_{3,xx}(u_{3,x})^2 + N_6u_{3,xx}(u_{2,x})^2. \quad (1.2)$$

Отметим, что правые части обоих уравнений кубически нелинейны, а сами уравнения симметричны. Таким образом, на их основании можно исследовать задачу об одновременном распространении поперечных волн двух видов: горизонтально и вертикально поляризованных. В случае возбуждения на границе среды двух волн одинаковой частоты начальные и граничные условия будут иметь вид

$$u_2(x, 0) = u_3(x, 0) = 0; \quad u_2(0, t) = u_2^0 \cos \omega t; \quad u_3(0, t) = u_3^0 \cos \omega t. \quad (1.3)$$

На основании (1.1) – (1.3) исследуем теоретически взаимодействие этих волн.

§2. Решение уравнений движения.

Для решения уравнений (1.5), (1.6) воспользуемся методом возмущений [3,7,17]. Согласно методу, перемещения представляются в виде

$$\vec{u} = \vec{u}^{(*)} + \vec{u}^{(**)} + \vec{u}^{(J^{***})} + \dots \quad (2.1)$$

Первое приближение – линейное. Это решение линейных волновых уравнений, соответствующих (1.1), (1.2),

$$u_{2,tt}^{(*)} - v^2 u_{2,xx}^{(*)} = 0; \quad u_{3,tt}^{(*)} - v^2 u_{3,xx}^{(*)} = 0 \quad (2.2)$$

в виде гармонических волн

$$u_n^{(*)}(x, t) = u_n^0 \cos(kx - \omega t); \quad n = 2, 3. \quad (2.3)$$

Здесь ω – частота; $k = v\omega$ – волновое число поперечной волны; $v = \sqrt{\mu/\rho}$ – ее фазовая скорость; u_n^0 ($n = 2, 3$) – начальные постоянные амплитуды соответствующих перемещений.

Уравнения во втором приближении примет вид

$$u_{2,tt}^{(**)} - v^2 u_{2,xx}^{(**)} = \frac{1}{\rho} (N_4 u_{2,xx}^{(*)} (u_{2,x}^{(*)})^2 + N_6 u_{2,xx}^{(*)} (u_{3,x}^{(*)})^2); \quad (2.4)$$

$$u_{3,tt}^{(**)} - v^2 u_{3,xx}^{(**)} = \frac{1}{\rho} (N_4 u_{3,xx}^{(*)} (u_{3,x}^{(*)})^2 + N_6 u_{3,xx}^{(*)} (u_{2,x}^{(*)})^2). \quad (2.5)$$

Для решения этих уравнений следует: вычислить их правые части, исходя из формул (2.3); по известным правым частям найти частное решение уравнений (2.4), (2.5) – оно и будет решением второго приближения; суммируя решения первого и второго приближений, получить решение уравнений (1.1), (1.2) с точностью до третьего приближения.

Решения уравнений второго приближения получаем в таком виде:

$$u_2^{(**)}(x, t) = -\frac{1}{6} \frac{(u_3^0)^3 N_4 + u_3^0 (u_2^0)^2 N_6}{\mu \rho} x \sin 3(kx - \omega t), \quad (2.6)$$

$$u_3^{(**)}(x, t) = -\frac{1}{6} \frac{(u_2^0)^3 N_4 + u_2^0 (u_3^0)^2 N_6}{\mu \rho} x \sin 3(kx - \omega t). \quad (2.7)$$

И для *SH*-, и для *SV*- волны, это – чистые третьи гармоники, амплитуды которых зависят линейно от физических постоянных, кубически нелинейно от амплитуд, а также от пройденного волной расстояния x . Следует отметить, что в случае начального возбуждения импульса с одинаковой амплитудой для обеих волн эти решения совпадают: при

$$u_2^0 = u_3^0 = u_0 \quad (2.8)$$

имеем

$$u_2^{(**)}(x, t) = u_3^{(**)}(x, t) = -\frac{1}{3} \frac{N_4 + N_6}{\mu \rho} (u_0)^3 x \sin 3(kx - \omega t). \quad (2.9)$$

Суммируя решения первого и второго приближений, получаем решение уравнений (1.5), (1.6) с точностью до третьего приближения в виде

$$u_2(x, t) = u_2^0 \cos(kx - \omega t) - \frac{k^3}{6\mu\rho} u_2^0 \left((u_2^0)^2 N_4 + (u_3^0)^2 N_6 \right) x \sin 3(kx - \omega t); \quad (2.10)$$

$$u_3(x, t) = u_3^0 \cos(kx - \omega t) - \frac{k^3}{6\mu\rho} u_3^0 \left((u_3^0)^2 N_4 + (u_2^0)^2 N_6 \right) x \sin 3(kx - \omega t). \quad (2.11)$$

В случае же (2.8) –

$$u_2(x, t) = u_3(x, t) = u_0 \cos(kx - \omega t) - \frac{k^3}{3\mu\rho} (N_4 + N_6) (u_0)^3 x \sin 3(kx - \omega t). \quad (2.12)$$

§3. Числовой анализ полученного решения.

Числовое исследование проводилось с помощью пакета математических программ MAPLE 10.0. Для вычислений были использованы значения эффективных постоянных для четырех типов нанокompозитных материалов, соответствующих модели 3 nano (из публикации [14]). Составляющими указанных нанокompозитов являются: матрица, представленная в двух вариантах (N1 – смесь смолы ЭПОН-828 и полистирола, с мягкой характеристикой нелинейности; N2 – смесь смолы ЭПОН-828 и стеклa-пирекс, с жесткой характеристикой нелинейности) и наполнитель – углеродные нанотрубки двух различных типов (N1 – зигзагообразные углеродные нанотрубки; N2 – хиральные углеродные нанотрубки). Характеристики и свойства материалов и их составляющих представлены и подробно описаны в публикации [14], а также в книге [4].

В таблице представлены необходимые параметры для четырех вариантов нанокompозитов: первая строка каждой ячейки содержит значение, соответствующее композиту, состоящему из матрицы N1 и наполнителя N1; вторая строка – матрицы N1 и наполнителя N2, третья – N2 и N1, четвертая – N2 и N2, соответственно. Пять столбцов таблицы соответствуют пяти вариантам объемного содержания наполнителя нанокompозита.

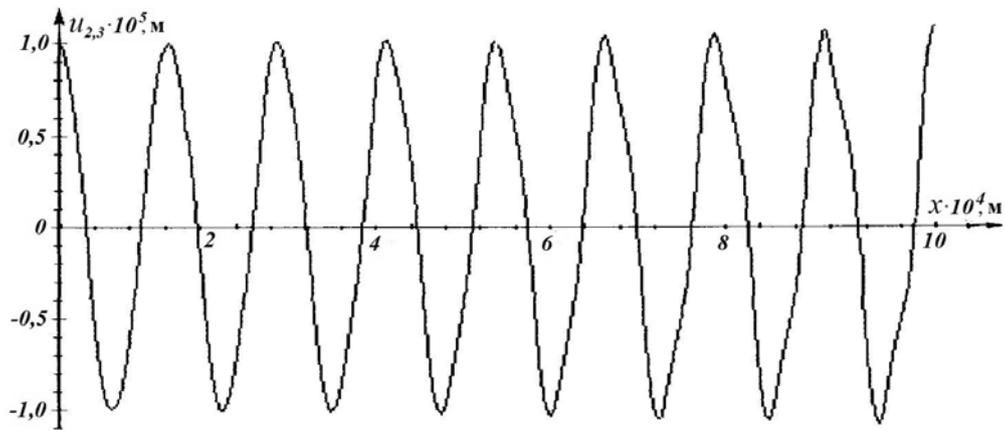
Постоянные	Объемные содержания				
	$c_{(1)} = 0,02$	$c_{(1)} = 0,04$	$c_{(1)} = 0,06$	$c_{(1)} = 0,08$	$c_{(1)} = 0,10$
N_4 (ГПа)	-0,319	0,2155	0,775	1,3285	1,921
	-0,367	0,1515	0,674	1,1715	1,703
	-57,325	-55,716	-53,977	-52,37	-50,704
	-59,644	-58,079	-56,368	-54,755	-53,094
N_6 (ГПа)	-13,022	-12,753	-12,488	-12,223	-11,954
	-13,022	-12,753	-12,488	-12,223	-11,954
	-64,85	-63,59	-62,17	-60,87	-59,55
	-64,85	-63,59	-62,17	-60,87	-59,55
μ (ГПа)	1,621	1,7	1,785	1,87	1,963
	1,634	1,714	1,801	1,888	1,983
	1,558	1,634	1,717	1,799	1,888
	1,571	1,648	1,732	1,816	1,907

Волновые параметры: $\omega = 1,0$ МГц; $u_2^0 = u_0 = 1 \cdot 10^{-7}$ м; $k \approx 0,5 \cdot 10^6$ 1/м были выбраны одинаковыми для всех рассматриваемых вариантов нанокompозита. Обоснование выбора значений этих величин также изложено в работе [14].

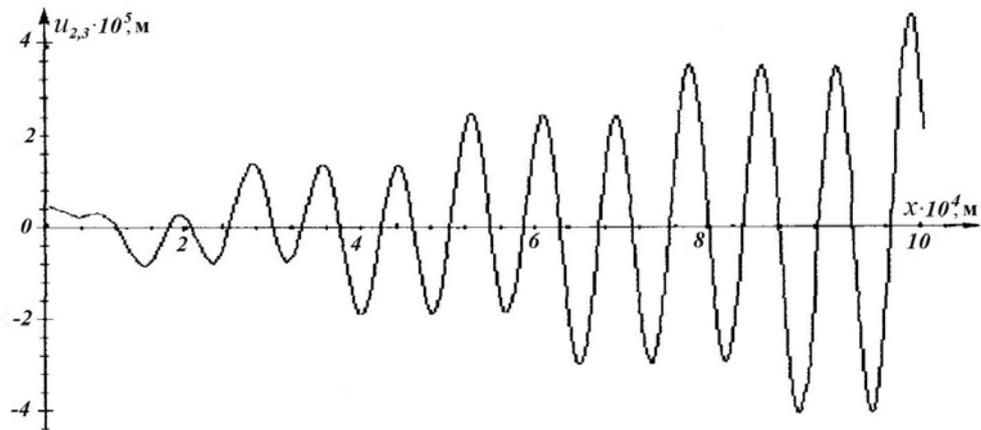
На представленных ниже графиках ось ординат соответствует амплитудам поперечных волн, а ось абсцисс – пройденному волной расстоянию, при фиксированном значении переменной t . При этом рассмотрены следующие варианты задания начальных амплитуд.

Вариант 1 ($u_2^0 = u_3^0 = u_0$) соответствует условию (2.8). Как было показано выше, в этом случае решения для обеих поперечных волн совпадают. Соответственно, совпадают и их графики (рис. 1).

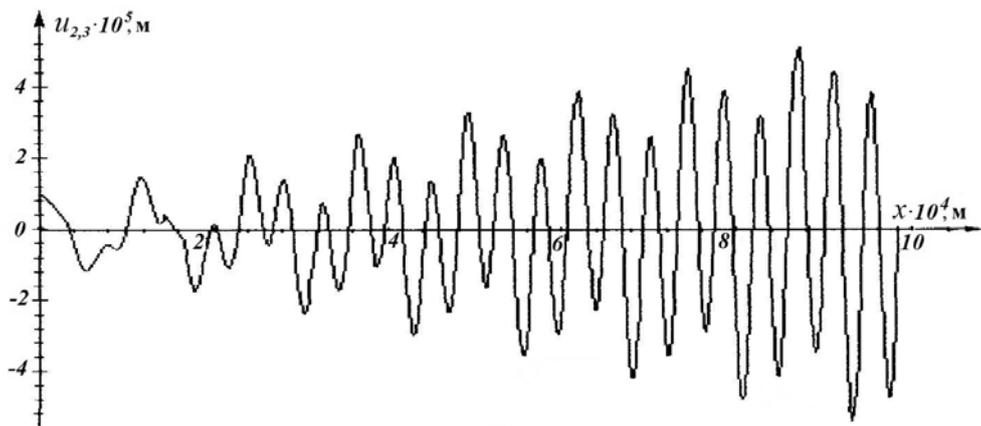
Графики такого вида удобны для анализа изменений формы волнового профиля в зависимости от физических параметров материала, например, от объемного содержания наполнителя нанокompозита. Числовое исследование проведено для всех двадцати вариантов нанокompозитов, свойства которых представлены в табл. 1. На рис. 1 представлены наиболее характерные графики для случаев $c_{(1)} = 0,02$ (рис. 1, а), $c_{(1)} = 0,04$ (рис. 1, б), $c_{(1)} = 0,08$ (рис. 1, в). Из них можно видеть, что характер распространения поперечной волны изменяется в зависимости от значения концентрации волокон в нанокompозите.



a



б



в

Рис. 1

Взаимодействие волн одинаковой амплитуды проявляется в искажении начального профиля за счет изменения амплитуды, ее возрастания и увеличения частоты волны. При этом скорость и характер этого процесса зависит от выбора определенного композитного материала как среды распространения волн.

Вариант 2 ($u_3^0 = 2u_2^0 = 2u_0$), (рис. 2).

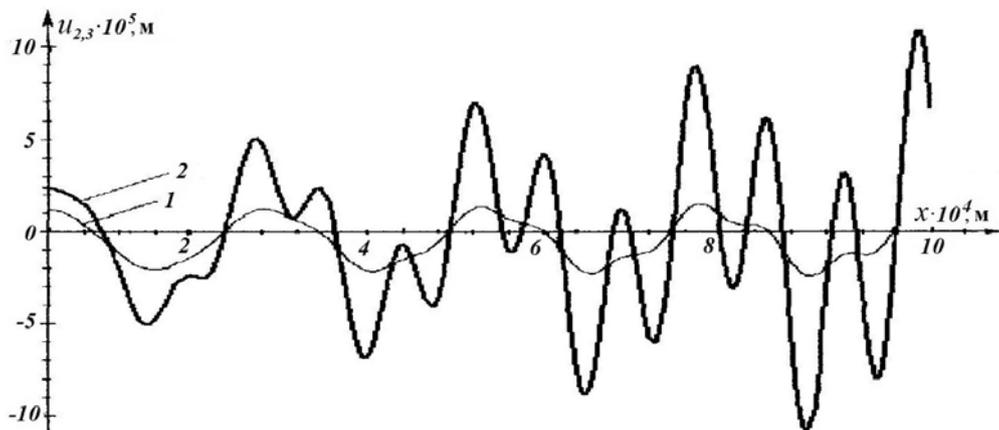


Рис. 2

Вариант 3 ($u_3^0 = 5u_2^0 = 5u_0$), (рис. 3).

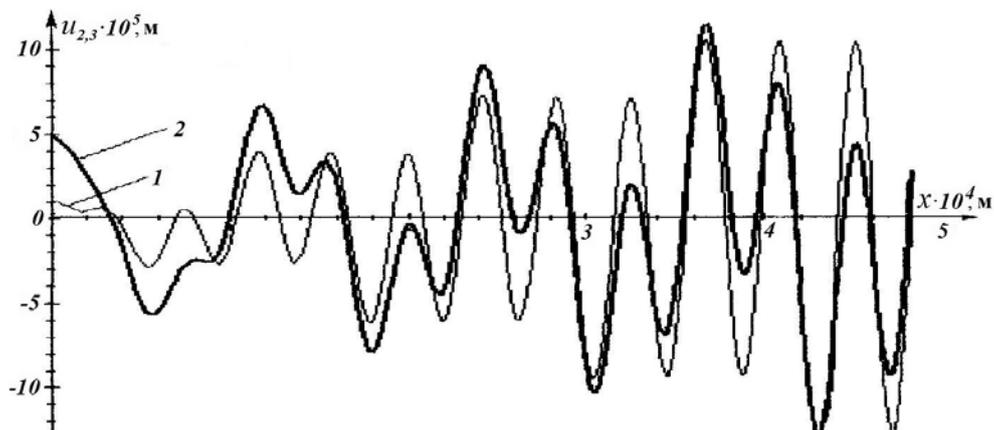


Рис. 3

Вариант 4 ($u_3^0 = 10u_2^0 = 10u_0$), (рис. 4).

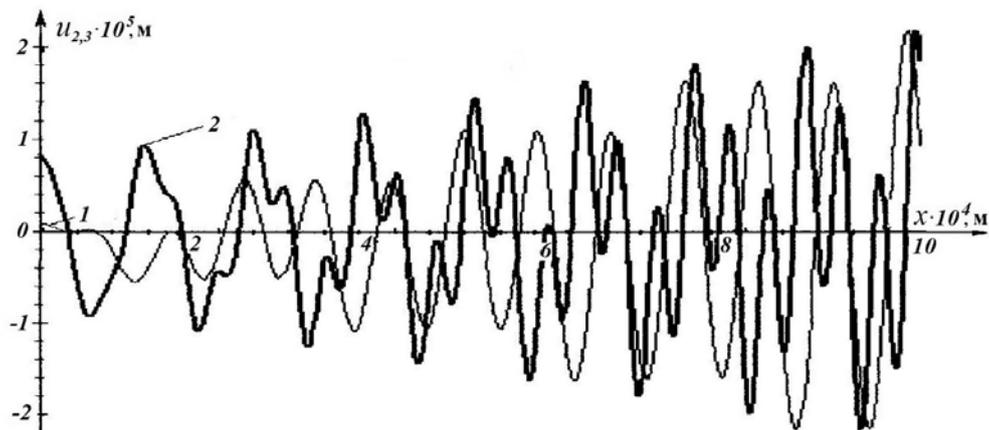


Рис. 4

Вариант 5 ($u_3^0 = 40u_2^0 = 40u_0$), (рис. 5).

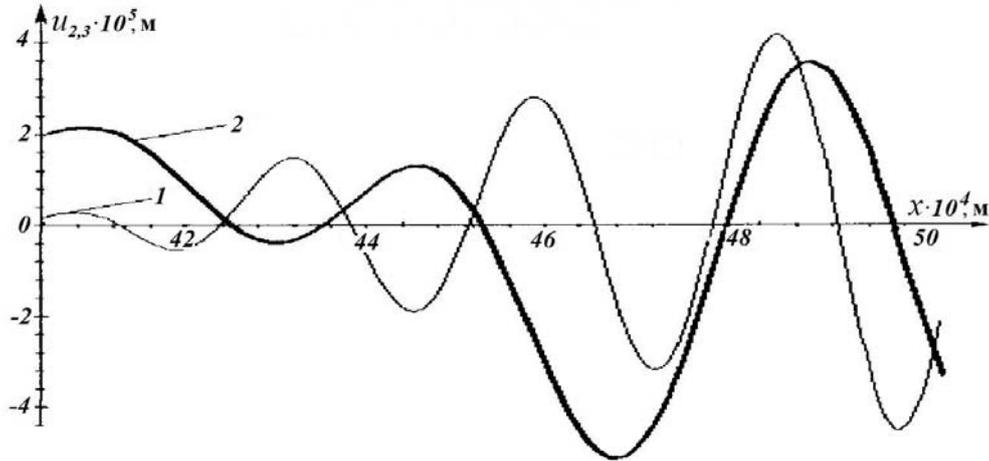


Рис. 5

На рис. 2 – 5 показаны графики изменения профиля волны в зависимости от пространственной координаты x : линиями 1 – для горизонтально поляризованной поперечной волны $u_2(x, t)$, согласно формуле (2.10); линиями 2 – для вертикально поляризованной поперечной волны $u_3(x, t)$, согласно формуле (2.11). Как можно видеть из представленных на рис. 2 – 4 графиков, амплитуда горизонтально поляризованной волны, заданная изначально малой по сравнению с амплитудой вертикально поляризованной волны, по мере распространения волн увеличивается.

Следует отметить, что этот процесс в материалах со слабой нелинейностью (низкой концентрацией наполнителя нанокompозита) происходит заметно медленнее, чем в материалах с нелинейностью более сильной.

На рис. 5 представлены фрагменты графиков, построенных для случая $c_{(1)} = 0,08$. Здесь можно видеть момент «обгона» размерами амплитуды горизонтально поляризованной волны размеров изначально большей амплитуды волны вертикально поляризованной. Рисунок может служить иллюстрацией процесса перекачки энергии из мощной вертикально поляризованной волны в слабую горизонтально поляризованную волну.

Заключение.

Таким образом, проанализирован процесс одновременного распространения двух поперечных волн различной (горизонтальной и вертикальной) поляризации в нанокompозитных материалах. Общий вывод из анализа может быть сформулирован следующим образом. При одновременном распространении указанных волн в нелинейном нанокompозитном материале происходит искажение их профилей. Вследствие нелинейного волнового взаимодействия, волны постепенно трансформируются в свои третьи гармоники. При условии различной изначальной интенсивности волн разной поляризации происходит перекачка энергии из мощной волны в слабую. Причем указанные процессы в материалах со слабой нелинейностью происходят заметно медленнее, чем в материалах с нелинейностью более сильной.

РЕЗЮМЕ. Представлено теоретичне дослідження взаємодії кубічно нелінійних пружних плоских гармонічних хвиль в матеріалі, нелінійні властивості якого описуються пружним потенціалом Мурнагана. Розв'язок, що описує взаємодію поперечних горизонтально та вертикально поляризованих хвиль, отримано за допомогою методу збурень. Описано перепомпування енергії між різними типами поперечних хвиль. Представлено результати чисельного аналізу для п'яти типів нанокompозитних матеріалів.

1. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. – М.: Наука, 1990. – 432 с.
2. *Гольдберг З.А.* О взаимодействии плоских продольных и поперечных волн // Акуст. журн. – 1960. – 6, № 2. – С. 307 – 310.
3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: В 2-х т. – К.: Наук. думка, 1986. – 376 с. (т. 1); 536 с. (т. 2).
4. *Гузь А.Н., Руцицкий Я.Я., Гузь И.А.* Введение в механику нанокompозитов. – К.: Академперіодика, 2010. – 398 с.
5. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. – М.: Наука, 1966. – 529 с.
6. *Руцицкий Я.Я., Цурпал С.І.* Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Ін-т механіки НАНУ ім. С.П. Тимошенка, 1998. – 377 с.
7. *Hahn H.G.* Elastizitätstheorie. Grundlagen der linearen Theorie and Anwendungen auf eindimensionale, ebene und raumliche Probleme. – Stuttgart: B.G.Teubner, 1985. – 340 p.
8. *Khotenko E.A.* Numerical Analysis of a Nonlinear Elastic Rayleigh Wave // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 6. – P. 719 – 726.
9. *Leipholz H.E.* Theory of Elasticity. – Amsterdam: Nordhoof International Press, 1974. – 320 p.
10. *Murnaghan F.D.* Finite deformations in an Elastic Solids. – New York: Wiley, 1951. – 140 p.
11. *Nowacki W.* Theoria sprężystości. – Warszawa: PWN, 1970. – 769 с.
12. *Rushchitsky J.J.* Self-switching of displacement waves in elastic nonlinearly deformed materials // Comptes Rendus de l' Académie des Sciences, Series IIb Mecanique. – 2002. – 330, N 3, – P. 175 – 180.
13. *Rushchitsky J.J.* Self-Switching of Waves in Materials // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, N 11. – P. 1492 – 1498.
14. *Rushchitsky J.J.* On the Self-Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 1. – P. 73 – 93.
15. *Rushchitsky J.J.* Analysis of Quadratically Nonlinear Hyperelastic Plane Longitudinal Wave // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 2. – P. 148 – 158.
16. *Rushchitsky J.J.* Theory of Waves in Materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2011. – 270 p. (free e-book, bookboon.com)
17. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Berlin-Heidelberg: Springer, 2014. – 580 p.
18. *Rushchitsky J.J.* On a Nonlinear Description of Love Waves // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 6. – P. – 629 – 640.
19. *Rushchitsky J.J., Savel'eva E.V.* On Interaction of Transverse Cubically Nonlinear Plane Waves in an Elastic Material // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, N 6, – P. 661 – 668.
20. *Rushchitsky J.J., Sinchilo S.V., Khotenko I.N.* On Generation of the Second, Fourth, Eight and Next Harmonics by the Quadratically Nonlinear Hyperelastic Plane Waves // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 6. – P. 649 – 659.
21. *Sneddon I.N., Berry D.S.* The Classical Theory of Elasticity. Flügge Encyclopedia of Physics, 3/VI. – Berlin: Springer Verlag, 1951. – P. 1 – 126.

Поступила 11.02.2014

Утверждена в печать 26.05.2015