

Е. И. Беспалова, Г. П. Урсова

КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С РАЗВЕТВЛЁННОЙ ФОРМОЙ МЕРИДИАНА

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: metod@inmech.kiev.ua*

Abstract. A technique is proposed for analysis of natural frequencies of compound shells of revolution with a branched shape meridian. This technique is based on uniting the Fourier method, the step-by-step search method, and the orthogonal sweep method. A testing of technique is carried out on the concrete examples. For the shell system “cylinder – ring plate”, the system lower frequencies are studied in dependence of relative stiffness of its constituent.

Key words: compound shell of revolution, branched shape meridian, natural frequencies, lower frequencies.

Введение.

Широкий класс составных конструкций представляют тонкостенные системы, расчетными схемами которых являются оболочки вращения с разветвленной формой меридиана. К ним можно отнести наземные емкости на цилиндрических или конических опорах, поперечно оребренные трубы, корпуса ракет и ракетных двигателей, а также элементы оборудования энергетического, тяжелого и транспортного машиностроения и т.п.

Из задач стационарного деформирования таких систем наиболее полно исследованы задачи статики о напряженно-деформированном состоянии неоднородных, композитных, анизотропных оболочек сложной геометрии при осесимметричных и неосесимметричных воздействиях, а также задачи термоупругости и термопластичности с учетом физической и геометрической нелинейностей, истории нагружения, деформаций ползучести, повреждаемости и т.п. Расчеты проводились на основе классической модели Кирхгофа – Лява, сдвиговой модели первого порядка типа Рейснера – Миндлина – Тимошенко, неклассической модели, учитывающей поперечные сдвиги и обжатие. О публикациях на эту тему можно ознакомиться по работам [2, 5, 6, 14, 23].

Задачи динамического деформирования составных оболочечных систем в большинстве публикаций рассмотрены для оболочек вращения без разветвлений, т.е. когда их меридиан описывается однозначной кусочно - гладкой кривой [7, 10, 11, 13, 16, 18, 20 – 22]. В этих работах исследуются свободные колебания сопрягаемых элементов преимущественно цилиндрической, конической и сферической форм. Так, в [16] проведено экспериментальное и аналитическое исследование резонансных частот системы цилиндр – усеченный конус из изотропного материала в зависимости от угла конусности. Аналогичная изотропная оболочечная система при разных граничных условиях рассмотрена в [10] в рамках уравнений Доннелла – Муштари – Флюге. В [11] проведен анализ динамических характеристик слоистой конструкции из трех составляющих: цилиндра и двух конусов, моделирующих фрагмент космического корабля. На основе модифицированного вариационного подхода в [21] рассмотрена система конус – цилиндр – сфера, а в [22] по теории Рейсснера – Нагди исследованы свободные и вынужденные колебания цилиндрической оболочки с двумя сопряженными

полусферами. В работе [7] анализ колебаний составных анизотропных оболочечных систем с кусочно-гладкой формой меридиана проведен для неоднородных по толщине оболочек в поле осесимметричных статических нагрузок. Свободные колебания двух сопряженных под малым углом изотропных конических оболочках исследованы в [13].

Колебаниям оболочек вращения с разветвлениями посвящено значительно меньше работ [1, 4, 9, 12, 17]. В [9] одной из первых представлена универсальная компьютерная программа BOSOR4 для расчета напряжённо-деформированного состояния, устойчивости и колебаний подкреплённых кольцами разветвленных оболочек вращения, призматических тел и панелей. Однако примеров расчета частотных характеристик разветвленных оболочек не приводится. Аналогичная ситуация с программным комплексом FASOR [12], где предполагается рассмотрение разветвленных оболочек, но примеры применения программы ограничиваются оболочками простой геометрии (конус, пластина). Детальный анализ собственных частот разветвленной оболочечной системы, состоящей из цилиндра и сопряженного с ним в центральном сечении конуса, проведен в [17] по модели Рейсснера – Миндлина в зависимости от параметра окружного волнообразования и разных углов конусности. В [1] приведены уравнения свободных колебаний нетонких оболочек вращения с разветвляющимся меридианом на основе сдвиговой модели первого порядка. Исследованию прецессионных колебаний составной разветвленной системы, состоящей из цилиндрической оболочки, двух торцевых конусов и двух дисков, сопряженных с цилиндрической оболочкой в определенных сечениях, при сложном ее вращении посвящена статья [4].

Математический аппарат для расчета собственных частот разветвленных оболочек вращения, как и для решения задач статики, представлен современными методами численного анализа: МКЭ, МКР, вариационными и проекционными методами, методами понижения размерности, линейной алгебры и т.п. [5, 8, 9, 11, 12, 15, 16, 18, 19, 22] В отдельных случаях при сочленении оболочек простых форм (цилиндр, конус) возможно получение аналитического решения [16]. Аппроксимация двойными рядами в виде комбинации тригонометрических функций (окружное направление) и полиномов Чебышева (меридиональное направление) использована в [22], а применение энергетического метода Релея реализовано в [18]. Дискретизация задачи на основе МКР и различных модификаций МКЭ (B – сплайн аппроксимации, скалярной и векторной интерполяции перемещений) проведена в работах [5, 8, 9, 11, 12] с последующим сведением к проблеме собственных значений линейной алгебры.

Во многих публикациях для решения задач статики разветвленных оболочек применено сведение к одномерным задачам, с последующим их решением методами прогонки и автоматическим удовлетворением условиям сопряжения отдельных элементов [2, 6, 14]. На основе этих подходов в данной работе в сочетании с методом пошагового поиска проведено исследование колебаний составных оболочек вращения с разветвленной формой меридиана.

1. Постановка задачи и методика ее решения.

В качестве объекта исследования выбран класс разветвленных оболочек, подробно описанный в работах [2, 6, 14, 17]. Рассмотрена система тонкостенных сопряженных элементов, срединная (в общем случае, координатная) поверхность которой образована вращением плоской неодносвязной кусочно-гладкой кривой вокруг прямолинейной оси Oz и отнесена к ортогональным координатам α, θ (α изменяется по образующей – меридиану, θ – центральный угол в плоскости поперечного сечения $\alpha = \text{const}$ (рис.1 а)). Изменение толщины составляющих элементов характеризуется переменной γ и отсчитывается по нормали к выбранной поверхности $\gamma = \text{const}$.

Как и в [6, 14], в качестве основного меридиана примем некоторую односвязную кусочно-гладкую кривую (соответственно, образованную им оболочку – основной), а отходящие от него в точках $\alpha_i^0 = \text{const}$ ($i = \overline{1, N-1}$) незамкнутые кривые – ветвями (соответственно, образованные ими оболочки – ответвлениями). Все узловые точки

(т.е. точки многосвязности меридиана $\alpha_i^0 = \text{const}$), в которых сопрягаются координатные поверхности основной оболочки и ее ответвлений, принадлежат основному меридиану. При этом в каждой узловой точке α_i^0 может сопрягаться разное количество ветвей M_i ($p = \overline{1, M_i}$), которые, как и основная оболочка, отнесены к локальной системе координат $\alpha^{ip} \in [\alpha_0^{ip}, \alpha_{N_{ip}}^{ip}]$. Если из этого узла выходит одна ветвь, то $\alpha^{ip} = \alpha^i$, а при рассмотрении основного меридиана – $\alpha^{ip} = \alpha^0$. Сечения $\alpha = \alpha_0^0$ и $\alpha = \alpha_{N_0}^0$ соответствуют торцам основной оболочки, а сечения $\alpha = \alpha_i^0 = \alpha_0^{ip}$ и $\alpha = \alpha_{N_{ip}}^{ip}$ являются, соответственно, линией контакта с основной оболочкой и торцом p -го ответвления.

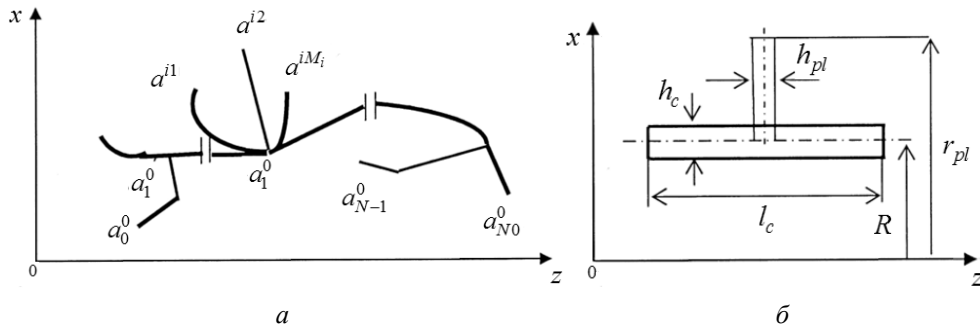


Рис. 1

На линиях контакта $\alpha = \alpha_i^0 = \alpha_0^{ip}$ в общей системе координат xOz формулируем условия сопряжения в виде условий равновесия статических и условий неразрывности кинематических характеристик напряженного состояния, а на неузловых контурах ответвлений ($\alpha^{ip} = \alpha_{N_{ip}}^{ip}$) и торцах основной оболочки $\alpha = \alpha_0^0$ и $\alpha = \alpha_{N_0}^0$ имеют место любые физически непротиворечивые граничные условия.

Основная оболочка, как и каждая ветвь системы, может быть выполнена из ряда последовательно сопрягаемых оболочек вращения, соосных относительно общей оси Oz , иметь переменную по образующей толщину или состоять из ряда идеально контактирующих между собой слоев, материал которых является ортотропным или изотропным и работающим в упругой стадии деформирования.

Для описанной тонкостенной системы с разветвлениями в работе проведено исследование частот и форм ее малых незатухающих колебаний. Оно базируется на известных предположениях классической модели оболочек, а для формулировки соответствующей двумерной задачи за основные неизвестные выбраны компоненты

$$\vec{N} = \{N_n(\alpha, \theta, t)\} = \begin{Bmatrix} \vec{Q} \\ \vec{U} \end{Bmatrix} \quad (n = \overline{1, 8})$$

со следующими статическими

$$\vec{Q} = \{N_n(\alpha, \theta, t)\} = \{T_x, T_z, \hat{S}_\alpha, M_\alpha\}^T \quad (n = \overline{1, 4}) \quad (1)$$

и кинематическими

$$\vec{U} = \{N_n(\alpha, \theta, t)\} = \{u_x, u_z, v, \vartheta_\alpha\}^T \quad (n = \overline{5, 8}) \quad (2)$$

составляющими.

Здесь T_x, T_z, u_z, u_x – радиальное, осевое усилия и соответствующие перемещения представлены формулами

$$T_x = T_\alpha \cos \varphi + \hat{Q}_\alpha \sin \varphi; \quad T_z = T_\alpha \sin \varphi - \hat{Q}_\alpha \cos \varphi;$$

$$u_x = u \cos \varphi + w \sin \varphi; \quad u_z = u \sin \varphi - w \cos \varphi;$$

(T_α , $\hat{Q}_\alpha = Q_\alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}$, Q_α , H – меридиональное, приведенное перерезывающее, перерезывающее усилия, крутящий момент в сечении $\alpha = \text{const}$; u, v, w – меридиональное, окружное и нормальное перемещения; $r = r(\alpha)$ – расстояние текущей точки меридиана до оси вращения; φ – угол, образованный нормалью к координатной поверхности и осью вращения); $\hat{S}_\alpha = T_{\alpha\theta} + k_2 H$, $T_{\alpha\theta}$, M_α , \mathcal{G}_α – приведенное сдвиговое, сдвиговое усилия, изгибающий момент, угол поворота нормали в этом же сечении; $k_2 = k_2(\alpha)$ кривизна меридиана в окружном направлении.

Относительно выбранных неизвестных соответствующая двумерная задача о свободных колебаниях основной оболочки (индекс ip принимается равным 0) и ее ответвлений ($i = \overline{1, N-1}$, $p = \overline{1, M_i}$) может быть сформулирована в векторно-матричном виде для следующей системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial \alpha^{ip}} = A_0^{ip} \vec{N} + A_1^{ip} \frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta} + A_2^{ip} \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial \theta^2} + A_3^{ip} \frac{\partial^3 \vec{N}}{\partial \theta^3} + A_4^{ip} \frac{\partial^4 \vec{N}}{\partial \theta^4} + C \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial t^2},$$

$$\alpha^{ip} \in (\alpha_0^{ip}, \alpha_{Nip}^{ip}), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (3)$$

при однородных граничных условиях на торцевых контурах основной оболочки

$$B_0^0 \vec{N} = 0; \quad \alpha^0 = \alpha_0^0; \quad (4)$$

$$B_{N0}^0 \vec{N} = 0; \quad \alpha^0 = \alpha_{N0}^0; \quad (5)$$

при условиях сопряжения в ее узловых сечениях;

$$\vec{Q}_i^+ = \vec{Q}_i^- + \sum_{p=1}^{M_i} \vec{Q}_*^{ip}; \quad (6)$$

$$\vec{U}_i^+ = \vec{U}_i^- = \vec{U}_*^{ip}; \quad \alpha^{ip} = \alpha_0^{ip} \quad (i = \overline{1, N-1}); \quad (7)$$

при однородных граничных условиях на торцевых контурах ответвлений

$$B_{Nip}^{ip} \vec{N} = 0; \quad \alpha^{ip} = \alpha_{Nip}^{ip} \quad (8)$$

и при условиях периодичности в окружном направлении

$$\vec{N}(\alpha, \theta + 2\pi) = \vec{N}(\alpha, \theta). \quad (9)$$

Ненулевые элементы матриц A_j^{ip} ($j = 0, 1, \dots, 4$) и матрицы $C = \{c_{lm}\}$, характеризующей инерционные свойства оболочки, приведены в [3], знаками «-», «+» отмечены значения рассматриваемых функций при подходе к узловой линии, соответственно, слева и справа; знаком «*» – значения усилий-моментов и перемещений, вызванные наличием ветвей.

Отделим в компонентах вектор-функции \vec{N} временной множитель $e^{i\omega t}$ и представим их в виде одинарных тригонометрических рядов по окружной координате θ :

$$\vec{N} = \left\{ N_n(\alpha, \theta, t) = \sum_{k=0,1,2,\dots} N_{nk}(\alpha) \begin{bmatrix} \sin k\theta \\ \cos k\theta \end{bmatrix} e^{i\omega t} \right\} \quad (n = \overline{1, 8}), \quad (10)$$

где ω – искомая собственная частота оболочки; k – параметр волнообразования в окружном направлении; выражение в квадратных скобках означает, что часть компонент вектор-функции \vec{N} , а именно S_α и v , представлены по $\sin k\theta$, остальные – по $\cos k\theta$.

В результате такого представления исходная задача (3) – (9) для каждой гармоники ряда k (10) сведена к однородной одномерной краевой задаче относительно функциональных коэффициентов $\vec{N}_k = \{N_{nk}(\alpha)\}$, содержащей неизвестный числовой параметр $\lambda = \omega^2$, т.е.

$$\frac{d\vec{N}_k}{d\alpha^{ip}} = (\tilde{A}_k^{ip} - \lambda C)\vec{N}_k; \quad \alpha^{ip} \in (\alpha_0^{ip}, \alpha_{Nip}^{ip}); \quad (11)$$

$$B_0^0 \vec{N}_k = 0; \quad \alpha^0 = \alpha_0^0; \quad (12)$$

$$B_{N_0}^0 \vec{N}_k = 0; \quad \alpha^0 = \alpha_{N_0}^0; \quad (13)$$

$$\vec{Q}_{ik}^+ = \vec{Q}_{ik}^- + \sum_{p=1}^{M_i} \vec{Q}_{*k}^{ip}; \quad (14)$$

$$\vec{U}_{ik}^+ = \vec{U}_{ik}^- = \vec{U}_{*k}^{ip}; \quad \alpha^{ip} = \alpha_0^{ip} \quad (i = \overline{1, N-1}); \quad (15)$$

$$B_{Nip}^{ip} \vec{N}_k = 0; \quad \alpha^{ip} = \alpha_{Nip}^{ip} \quad (16)$$

$$(\tilde{A}_k^{ip} = A_0^{ip} \pm kA_1^{ip} \pm k^2 A_2^{ip} \pm k^3 A_3^{ip} \pm k^4 A_4^{ip}).$$

Для вычисления этого параметра и соответствующего ему решения \vec{N}_k , определяющего форму колебаний оболочечной системы при фиксированном k , использован метод пошагового поиска ($\Delta(\lambda)$ – метод). Суть его состоит в определении таких значений λ , при которых однородная краевая задача (11) – (16) имела бы нетривиальное решение $\vec{N}_k \neq 0$.

Поскольку в данной работе для решения линейных краевых задач применен метод ортогональной прогонки, основанный на сведении краевой задачи к набору задач Коши, то условие получения нетривиального решения задачи (11) – (16) сведено к определению нулей характеристического детерминанта

$$\Delta(\lambda) = \det(B_{N_0}^0 Z^0(\alpha_{N_0}^0, \lambda)) = 0. \quad (17)$$

Здесь $Z^0(\alpha_{N_0}^0, \lambda)$ – прямоугольная матрица 8×4 , столбцы которой являются линейно независимыми векторами решения задач Коши для системы (11) основной оболочки ($\alpha^{ip} = \alpha^0$), удовлетворяющие краевым условиям (12) и условиям сопряжения (14), (15) с учетом решения соответствующих задач для ответвлений. Построение этой матрицы (и нахождение окончательного решения задачи) для классической модели оболочек подробно описано в [2], для модели типа Тимошенко в [14] и для модели, учитывающей поперечные сдвиги и обжатие, в [6]. Таким образом, для решения задач на собственные значения методом прогонки, в отличие от краевых задач, достаточно ограничиться лишь его прямым ходом, который, как и окончательное решение задачи для разветвленных оболочек, был протестирован в [6] путем сравнения с точным аналитическим решением для конкретной системы.

Алгоритм определения нулей выражения (17) реализован следующим образом: путем перебора значений λ отыскиваем два последовательные значения λ_v и λ_{v+1} , удовлетворяющие условию $\Delta(\lambda_v)\Delta(\lambda_{v+1}) \leq 0$; затем с помощью половинного деления или интерполяционных приемов интервал $(\lambda_v, \lambda_{v+1})$ стягиваем до получения $\lambda \in (\lambda_v, \lambda_{v+1})$ с заданной точностью. Тестирование этого этапа проведено путем сравнения с собственными частотами составной оболочечной системы, полученными теоретически и экспериментально в [16].

Рассмотрена система, состоящая из двух сопряженных изотропных оболочек конической (угол конусности β , длина l) и цилиндрической (радиус R , длина L) формы, имеющих одинаковую толщину $h = 10^{-2}$ in. Расчет собственных частот системы проведен для материала ($E = 3 \times 10^7$ psi, $\mu = 0,3$; $\rho = 7,35 \times 10^{-4}$ lbsec²/in⁴) и двух вариантов геометрических размеров и условий закрепления торцов, представленных в табл. 1 [16].

Таблица 1

$f = \omega/2\pi, \text{Гц}$						
Вариант	$\beta, \text{град}$	l, in	R, in	L, in	h, in	Граничные условия
I	15	13,57	7,0	21,0	10^{-2}	$N_\alpha = M_\alpha = w = v = 0$
II	5	11,15	7,0	11,15	10^{-2}	$u = v = w = g_\alpha = 0$

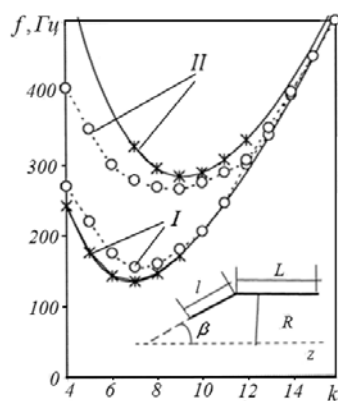


Рис. 2

На рис. 2 для обоих расчетных вариантов представлены значения собственных частот как функции параметра волнообразования k , полученные в данной работе по $\Delta(\lambda)$ – методу (сплошная линия), а в [16] двумя способами: аналитически (обозначены крестиками для $k = 4-9$ в варианте I и $k = 7-12$ – для варианта II) и экспериментально (штриховые линии с кружочками). Аналитическое решение и расчеты по $\Delta(\lambda)$ – методу практически совпадают (с точностью до представления на рисунке). Экспериментально полученные значения частот в случае свободного опирания торцов системы (вариант I) завышены по сравнению с расчетными, а для случая жесткого закрепления (вариант II), наоборот, занижены.

Авторы эксперимента [16] объясняют эту ситуацию сложностью реализации в эксперименте принятых граничных условий: в варианте I, возможно, имеет место некоторое осевое ограничение ($N_\alpha \neq 0$), отсутствующее в расчетах ($N_\alpha = 0$), а в варианте II – наоборот, т.е. недостаточно этого ограничения в жестко зажатых краях, чтобы осуществить условие $u = 0$ по всему контуру.

2. Анализ низших собственных частот оболочечной системы цилиндр-пластина.

Рассмотрена оболочечная система, состоящая из цилиндрической оболочки длины l_c , радиуса срединной поверхности R , толщины h_c и сопряженной с ней в сечении $z = l_c/2$ кольцевой пластиной с внутренним радиусом R , наружным радиусом $R + l_p$, толщиной h_{pl} . Такая система может быть принята в качестве расчетной схемы фрагмента магистрального трубопровода с периодически расположенными на расстоянии l_c одинаковыми наружными кольцевыми ребрами. Соответственно, на торцах цилиндра $z = 0$ и $z = l_c$ были заданы условия симметрии, наружный контур пла-

стины $x = R + l_p$ принят свободным, а в сечении $z = l_c / 2$ цилиндра и на внутреннем контуре пластины $x = R$ были сформулированы условия сопряжения (рис. 1, б). Цилиндр и кольцевая пластина – изотропные с модулем упругости и коэффициентом Пуассона E_c, μ_c и E_p, μ_p , соответственно. Напряженно-деформированное состояние такой разветвленной оболочки на основе классической и уточненной оболочечных моделей исследовано в работе [6]. Практически точное совпадение результатов с аналитическим решением имело место для классической модели оболочек.

Форма колебаний системы цилиндр – пластина характеризуется числом узловых диаметров k в окружном направлении, числом узловых окружностей m_c и m_p на цилиндре и пластине, соответственно.

Низшие частоты такой оболочечной системы исследованы в зависимости от относительной жесткости составляющих ее элементов, которую характеризовали параметром $\eta = E_p / E_c \in [-2; 6]$ при фиксированном модуле упругости цилиндра $E_c = \text{fixed}$. При значениях $\eta < -2$ (первый предельный случай) колебания системы определяются исключительно пластиной, а цилиндр можно трактовать как условие жесткого закрепления ее внутреннего контура. При значениях $\eta \geq 4$ (второй предельный случай), наоборот, определяющую роль играет цилиндр, а пластину в некоторых случаях можно рассматривать как жесткое включение. В подтверждение этому значения низших частот для исходных данных: ($R = 0,1\text{ м}$, $h_c = h_{pl} = 5 \cdot 10^{-3}\text{ м}$; $l_c = l_p = 0,1\text{ м}$; $E_c = 2,9,81 \cdot 10^4\text{ МПа}$; $\mu = 0,3$), полученные для $\eta = -5$ по расчетам системы цилиндр – пластина и отдельно консольной пластины [3], а также для $\eta = 5$, полученные по расчетам для цилиндр – пластины и отдельно для жестко заземленного цилиндра половинной длины [3], приведены в табл. 2.

Таблица 2

k	$\eta = -5, \omega^2 \cdot 10^8, m_p = 0$		$\eta = 5, \omega^2, m_c = 1$	
	цилиндр – пластина	отдельно пластина	цилиндр – пластина	отдельно цилиндр
0	0,4854	0,4854	$0,2956 \cdot 10$	$0,2364 \cdot 10$
1	0,5054	0,5054	$0,1972 \cdot 10$	$0,1825 \cdot 10$
2	0,6187	0,6187	$0,1217 \cdot 10$	$0,1217 \cdot 10$
3	0,9859	0,9860	0,9188	0,9190
4	$0,1875 \cdot 10$	$0,1875 \cdot 10$	0,8539	0,8530
5	$0,3653 \cdot 10$	$0,3653 \cdot 10$	0,9797	0,9798
6	$0,6779 \cdot 10$	$0,6780 \cdot 10$	$0,1309 \cdot 10$	$0,1309 \cdot 10$

Как видно из табл. 2, при $\eta = -5$ сравниваемые значения частот совпадают практически полностью; при $\eta = 5$ такое совпадение имеет место для частот с циклически симметричным характером в окружном направлении ($k \geq 2$). Для осесимметричного и антисимметричного случаев ($k = 0, k = 1$) результаты различаются, так как вследствие существенно преобладающей жесткости пластины полностью не обеспечивается реализация условия жесткого закрепления цилиндра.

Между предельными случаями $\eta \leq -2$ и $\eta \geq 4$ в интервале $\eta \in [2, 25; 3, 75]$ систе-

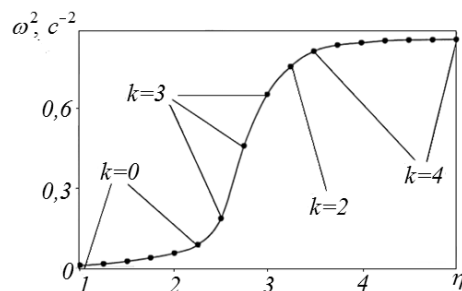


Рис. 3

ма колеблется как единое целое. Эта картина иллюстрируется на рис. 3 кривой $\lambda = \lambda(\eta)$ ($\lambda = \omega^2, c^{-2}$) для минимальной частоты колебаний системы при $m_c = 1$, $m_p = 1$ и соответствующих значениях k в зависимости от параметра относительной жесткости (на рисунке представлен интервал $\eta \in [1; 5]$). Для значений $\eta \leq 2$ наблюдается линейная зависимость частотного параметра λ с увеличением жесткости пластины η . Для $\eta \geq 4,5$ частота системы не меняется, поскольку пластина, как уже отмечалось, играет роль жесткого закрепления.

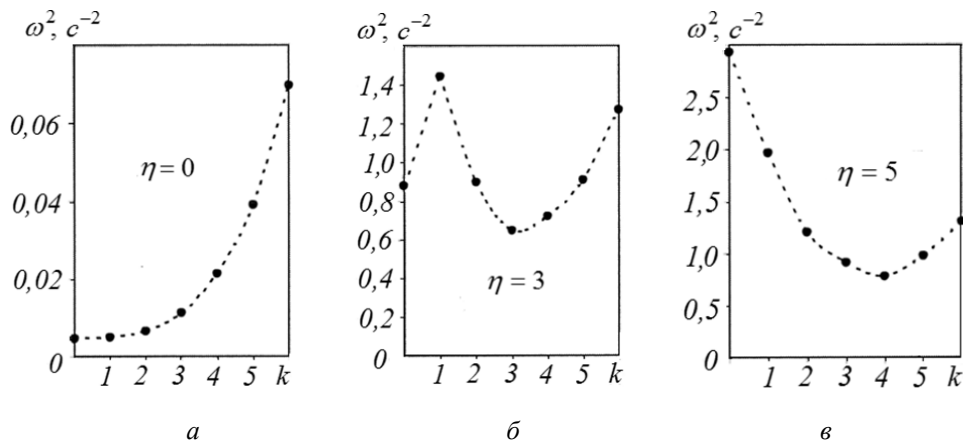


Рис. 4

На рис. 4 приведены условные кривые $\lambda = \lambda(k)$ ($k = 0, 1, \dots, 6$), выражающие зависимости частот системы от числа узловых диаметров k при разных значениях относительной жесткости ее составляющих: $\eta = 0$ (рис. 4, а), $\eta = 3$ (рис. 4, б), $\eta = 5$ (рис. 4, в). Зависимость $\lambda = \lambda(k)$ при $\eta = 0$ типична для изгибных колебаний пластин: это монотонная функция, возрастающая с увеличением числа узловых диаметров k . Зависимость $\lambda = \lambda(k)$ при $\eta = 5$ характерна для гладких цилиндрических оболочек и является немонотонной с минимумом при $k = 4$. Зависимость $\lambda = \lambda(k)$ при $\eta = 3$ занимает промежуточное положение между двумя рассмотренными случаями и состоит из двух ветвей. Первая ветвь при $k = 0, k = 1$ является монотонно возрастающей функцией, что соответствует преобладающим колебаниям пластины $A_p > A_c$ в общей оболочечной системе (A_p, A_c – относительные максимальные амплитуды колебаний пластины и цилиндра соответственно). Вторая ветвь при $k \geq 2$ представлена немонотонной функцией с минимумом при $k = 3$, что соответствует преобладающим колебаниям цилиндра $A_c > A_p$.

Заметим, что оболочки простых форм при одной и той же картине узловых линий ($k = \text{fixed}$, $m = \text{fixed}$) могут колебаться с разными частотами в зависимости от преобладающей амплитуды колебаний того или иного типа (преимущественно изгибные, растяжения-сжатия, крутильные и т.д.). Частоты разных типов колебаний, как правило, существенно (на порядок и более) различаются по величине (например, для шарнирно опертого цилиндра с $R = 100$, $l = 50$, $h = 1$ по классической модели имеем: $m = 1$, $k = 9$ $\omega_1^2 = 0,2348 \cdot 10^{-4}$, $\omega_2^2 = 0,4667 \cdot 10^{-2}$, $\omega_3^2 = 0,1330 \cdot 10^{-1}$; $m = 2$, $k = 8$ $\omega_1^2 = 0,9493 \cdot 10^{-4}$, $\omega_2^2 = 0,8567 \cdot 10^{-2}$, $\omega_3^2 = 0,2441 \cdot 10^{-1}$).

Для составных оболочек, охватывающих широкий класс разветвленных систем, наблюдается некоторая особенность. Она состоит в том, что уже в области низших частот одна и та же форма колебаний (по типу колебаний и картине узловых линий) может локализоваться, т.е. иметь преобладающую амплитуду, на разных элементах системы с разными частотами. Один из таких случаев представлен на рис. 5 для зависимости $\lambda = \lambda(k)$ при $\eta = -0,25$, одной узловой окружности на цилиндре ($m_c = 1$) и двух узловых окружностях на пластине ($m_p = 2$). Кривая 1 соответствует ситуации, когда указанная форма колебаний локализуется на пластине ($A_p \gg A_c$), кривая 2 – когда колебания с преобладающей амплитудой реализуются на цилиндре ($A_p \ll A_c$).

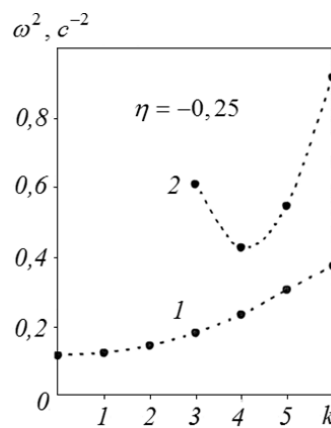


Рис. 5

Заключение.

В статье в рамках классической модели Кирхгофа – Лява представлена методика расчета собственных частот составных оболочек вращения с разветвленной формой меридиана на основе сочетания методов Фурье, пошагового поиска ($\Delta(\lambda)$ – метода) и ортогональной прогонки. Сравнение результатов расчета с аналитическим решением для системы конус – цилиндр свидетельствует о правомерности применения данной методики в случае составных оболочек.

На примере оболочечной системы цилиндр – кольцевая пластина исследованы ее низшие частоты в зависимости от относительной жесткости составляющих элементов. В отличие от оболочек с гладкой формой меридиана разветвленные оболочки могут иметь разные частоты при одном и том же типе колебаний и одинаковой картине узловых линий. Это связано с возможностью локализации формы колебаний на разных элементах составной оболочечной системы.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано методику розрахунку власних частот складених оболонок обертавання з розгалуженою формою меридіана на основі поєднання методів Фур'є, покрокового пошуку ($\Delta(\lambda)$ метода) та ортогональної прогонки. Тестування методики проведено на конкретних прикладах. Для оболонової системи «циліндр – кільцева пластина» досліджено її нижчі частоти в залежності від відносної жорсткості складових елементів.

1. Ганеева М.С., Скворцова З.В. Уравнения свободных колебаний и нейтрального равновесия нетонких оболочек вращения с разветвляющимся меридианом при осесимметричном термосиловом нагружении // Актуальные проблемы механики сплошной среды. / К 15-летию ИММ КазНЦ РАН. – Казань: Изд-во КГУ, 2006. – С. 199 – 209.
2. Григоренко Я.М., Гололобов В.И., Криворучко Л.Д., Лобкова Н.А., Семенова В.В. Расчет напряженного состояния конструкций в виде оболочек вращения с разветвлениями // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 7. – С. 101 – 104.
3. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.
4. Гуляев В.И., Соловьев И.Л. Прецессионные колебания и резонансы составных оболочек при сложном вращении // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 6. – С. 74 – 81.
5. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Марченко С.С., Шубович А.А. Анализ оболочки вращения с ветвящимся меридианом на основе четырехугольного конечного элемента при различных вариантах интерполяции полей перемещений // Изв. вузов. Строительство. – 2011. – № 5. – С. 3 – 13.

6. *Bespalova E.I., Urusova G.P.* Stress State of Branched Shells of Revolution Subject to Transverse Shear and Reduction // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 4. – P. 410 – 419.
7. *Bespalova E., Urusova G.* Vibration of highly inhomogeneous Shells of revolution under static loading // *J. of Mech. of Materials and Struct.* – 2008. – **3**, N 7. – P. 1299 – 1313.
8. *Benjeddou A.* Vibrations of complex shells of revolution using B-spline finite elements. // *Computers and Struct.* – 2000. – **74**, №4. – P. 429 – 440.
9. *Bushnell D.*: Stress, stability and vibration of complex, branched shells of revolution // *Computers and Struct.* – 1974. – **4**. – P. 339 – 435.
10. *Caresta M., Kessissoglou N.J.* Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical – conical shells. // *J. of Sound and Vibration.* – 2010. – **329**, №6. – P. 733 – 751.
11. *Chronopoulos D., Ichchou M., Troclet B., Bareille O.* Predicting the broadband response of a layered cone-cylinder-cone shell // *Composite Structures.* – 2014. – **107**. – P. 149 – 159.
12. *Cohen G.* FASOR – a program for stress, buckling and vibration of shells of revolution // *Adv. Eng. Software.* – 1981. – **3**, N. 4. – P. 155 – 162.
13. *Filippov S.B., Naumova N.V.* Axisymmetric vibrations of thin shells of revolution joint by a small angle // *Technische Mechanik.* – 1998. – **18**, №4. – P. 285 – 291.
14. *Galishin A.Z., Merzlyakov V.A., Shevchenko Yu.N.* Application of the Newton Method for Calculating the Axisymmetric Thermoelastoplastic State of Flexible Laminar Branched Shells Using the Shear Model // *Mech. of Composite Materials.* – 2001. – **37**, N 3. – P. 189 – 200.
15. *Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya.* The Problems of Statical and Dynamical Deformation of Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 2. – P. 123 – 193.
16. *Hu W. C. L., Raney J. P.*. Experimental and analytical study of vibrations of joined shells. // *AIAA J.* – 1967. – **5**, N 5. – P. 976 – 980.
17. *Kayran A., Yavuzbalkan E.* Free-Vibration Analysis of Ring-Stiffened Branched Composite Shells of Revolution // *AIAA J.* – 2010. – **48**, N 4. – P. 749 – 762.
18. *Lee Y.S., Yang M.S., Kim Y.S., Kim J.H.* A study on the free vibration of the joined cylindrical–spherical shell structures // *Computers and Struct.* – 2002. – **80**. – P. 2405 – 2414.
19. *Maximiyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Variational-Difference Methods in Linear and Nonlinear Problems of Deformation of Shell from Metallic and Composite Materials (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 6. – P. 613 – 687.
20. *Patel B.P., Ganapathi M., Kamat S.* Free vibration characteristics of laminated composite joined conical-cylindrical shells // *J. of Sound and Vibration.* – 2000. – **237**, №5. – P. 920 – 930.
21. *Qu Y., Wu S., Chen Y., Hua H.* Vibration analysis of ring-stiffened conical – cylindrical – spherical shells based on a modified variational approach // *Int. J. of Mech. Sci.* – 2013. – **69**. – P. 72 – 84.
22. *Wu S., Qu Y., Hua H.* Vibration characteristics of a spherical – cylindrical – spherical shell by a domain decomposition method // *Mechanics Research Communications.* – 2013. – **49**. – P. 17 – 26.
23. *Zolochovsky A., Galishin A., Sklepov S., Voyiadjis G.Z.* Analysis of creep deformation and creep damage in thin-walled branched shells from materials with different behavior in tension and compression // *Int. J. of Solids and Struct.* – 2007. – **44**. – P. 5075 – 5100.

Поступила 22.10.2014

Утверждена в печать 22.12.2015