

В. Д. Кубенко

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ
ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова, 3,
03057, Киев, Украина; e-mail: vdk@inmech.kiev.ua*

Abstract. An approach is proposed to study of the non-stationary wave processes in an elastic half-plane under mixed boundary conditions of the fourth boundary problem of the theory of elasticity. The Laplace and Fourier integral transforms are applied, the inverse transform of which or the Cagniard method for their common inversion provide the required solution (stresses, displacements) in the closed analytical form. This approach permits to study the problem for the diverse choice of loadings.

Key words: elastic half-plane, stress state, non-stationary waves, integral transforms, mixed boundary conditions.

Введение.

Известны четыре типа граничных задач теории упругости (см., например, [9]): задается вектор напряжения (первая краевая задача); задается вектор перемещения (вторая краевая задача); задается нормальная составляющая вектора перемещения и касательные составляющие вектора напряжения (третья краевая задача); задается нормальная составляющая вектора напряжения и касательные составляющие вектора перемещения (четвертая краевая задача). Первые два типа условий являются основными, а два последние условия – смешанными. Тип граничных условий может существенно влиять на возможность получения аналитического решения нестационарных задач.

Нестационарные волновые процессы в изотропном упругом полупространстве (полуплоскости) при действии сосредоточенных или распределенных поверхностных воздействий были предметом изучения значительного количества исследований, библиографию которых можно найти, например, в работах [3, 6, 7, 11]. Для решения соответствующих краевых задач разработаны эффективные аналитические и численно-аналитические методы, основанные преимущественно на применении интегральных преобразованиях Лапласа по временной координате и Фурье (Ханкеля) – по линейной. Основной трудностью при этом является проблема построения оригиналов, которая зависит, в первую очередь, от характера пространственно-временного распределения нагрузки на границе, типа граничных условий.

Исследования обычно концентрируются на отдельных особенностях рассматриваемых волновых процессов: асимптотическом построении полей перемещений и напряжений в окрестности волновых фронтов [26, 27]; перемещениях точек на поверхности полупространства и на оси симметрии [15, 25] или же на значительном удалении от нее [15]. При этом для совместного обращения преобразований применяется техника Каньяра [8, 12] с учетом однородности изображения относительно параметров преобразований. В публикациях [14, 21 – 23] представлены решения для перемещений и напряжений во внутренних точках полупространства при действии равномерно распределенной нагрузки ступенчатого профиля с использованием методов теории вычетов при обращении преобразования Лапласа. В работе [10] расчетные

выражения записаны как в виде суперпозиции аналитических решений задачи Лэмба, так и в виде свертки по радиальной координате функции распределения внешней нагрузки и соответствующего фундаментального решения. Рассмотрено два вида распределения нагрузки по пространственной координате и вычислены упругие перемещения как результат действия нагрузки, изменяющейся во времени как дельта-функция. Последнее обусловило разрывность вычисленных перемещений, что не согласуется с линейной формулировкой задачи теории упругости.

Более сложными являются задачи с движущейся границей области действия нагрузки. Исследованы преимущественно случаи равномерного расширения границы и изучены перемещения точек либо на границе, либо вблизи фронтов упругих волн [28]. В публикации [16] методами интегральных преобразований дано решение нестационарной первой краевой задачи теории упругости для упругой полуплоскости. Полученное аналитическое решение дает возможность определить напряжение (перемещение) вдоль оси симметрии для некоторых конкретных видов нагрузки. В работах [17, 18] предложено численно-аналитическое решение первой краевой задачи для полуплоскости, где это ограничение снято. Связанные с ударными процессами постановки и исследования в рамках третьей краевой задачи изложены в обзорной статье [6].

В данной работе строится точное аналитическое решение плоской задачи о действии нестационарной нагрузки на поверхность упругой полуплоскости в условиях "смешанной" краевой задачи, когда на границе задано нормальное напряжение и касательное перемещение (четвертая краевая задача). Применяются интегральные преобразования Лапласа и Фурье, обращение которых удастся выполнить при помощи табличных соотношений и теорем о свертке преобразования Лапласа и преобразования Фурье для широкого ассортимента действующих нестационарных нагрузок и получить выражение для напряжения (смещения) в замкнутом аналитическом виде. Простота построения решения, которое позволяет определить характеристики волнового процесса в произвольной точке объекта в произвольный момент времени, является его несомненным достоинством. Получение точных аналитических решений, пусть даже нечасто используемых в практике, кроме самостоятельной значимости обеспечивает также возможность отработки с их помощью различных численных и приближенных подходов, для которых вид граничных условий не критичен. Данная работа является обобщением публикации [19] и ориентирована преимущественно на русскоязычного читателя.

§1. Постановка задачи.

Рассматривается задача плоской деформации. Полуплоскость отнесена к декартовым координатам x, z , так что ось x направлена вдоль границы полуплоскости, ось z вглубь ее (рис. 1). Нормальная нагрузка $Q(x, t)$, симметричная относительно оси z , возникает в некоторый начальный момент времени $t = 0$ и, в общем случае, является функцией времени и координаты x .

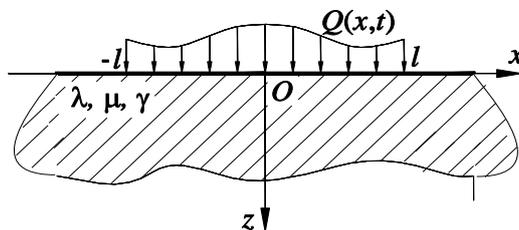


Рис. 1

Задача формулируется в безразмерных обозначениях:

$$\bar{x} = x/R; \quad \bar{z} = z/R; \quad \bar{u}_j = u_j/R; \quad \bar{t} = c_p t/R; \quad \bar{\sigma}_{jk} = \sigma_{jk}/(\lambda + 2\mu); \quad j, k = x, z; \quad \alpha = c_p/c_0;$$

$$\beta = c_s/c_0; \quad b = \beta/\alpha; \quad c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\gamma}; \quad c_s = \sqrt{\mu/\gamma}, \quad \text{черта над которыми ниже будет}$$

опущена. Здесь R и c_0 – некоторые характерные линейный размер и скорость; γ – плотность материала; λ, μ упругие постоянные Ламе; c_p, c_s – соответственно, скорости распространения волн расширения и волн сдвига; σ_{jk} – компоненты напряженного состояния; u_j компоненты вектора перемещений.

Поведение упругой среды описывается волновыми потенциалами Φ и Ψ , которые в случае плоской задачи удовлетворяют волновым уравнениям [4]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

и связаны с упругими перемещениями и напряжениями соотношениями

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x};$$

$$\sigma_{zz} = (1 - 2b^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \right); \quad \sigma_{xz} = \beta^2 \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right). \quad (1.2)$$

В качестве граничных условий при $z = 0$ рассматриваем смешанные условия четвертой краевой задачи теории упругости, согласно которой на границе задается нормальное напряжение и отсутствует касательное перемещение. Как будет показано ниже, при таких условиях удастся получить аналитическое решение соответствующей граничной задачи. Такое решение может, в частности, служить ориентиром при разработке соответствующих численных подходов, для которых вид условий на границе не является критичным. Укажем, что избранная постановка задачи исключает появление поверхностной волны Релея и, следовательно, непригодна для исследования приповерхностных процессов; однако, можно ожидать, что при удалении от границы полученное решение будет приближаться к решению первой краевой задачи, когда на границе отсутствует касательное напряжение. Ниже на конкретном примере будет выполнено сравнение результатов вычислений указанных задач.

Граничные условия на поверхности полуплоскости $z = 0$ в принятой постановке имеют вид

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = Q(x, t), \quad u_x|_{z=0} = 0. \quad (1.3)$$

Начальные условия для потенциалов – нулевые, т.е.

$$\Phi|_{t=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}|_{t=0} = \Psi|_{t=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (1.4)$$

Кроме того, имеют место условия затухания порожденных нестационарной нагрузкой волновых возмущений на бесконечности

$$\left(\Phi, \Psi, \Phi', \Psi' \right) \Big|_{\sqrt{x^2+z^2} \rightarrow \infty} = 0. \quad (1.5)$$

Если волновые уравнения (1.1) подвергнуть преобразованию Лапласа [2] по времени (с учетом нулевых начальных условий) и преобразованию Фурье по координате x (с учетом того, что при $|x| \rightarrow \infty$ потенциалы и их первые производные стремятся к нулю), они приобретут вид

$$\frac{\partial^2 \Phi^{LF}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\alpha^2} + \xi^2 \right) \Phi^{LF} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Psi^{LF}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\beta^2} + \xi^2 \right) \Psi^{LF} = 0. \quad (1.6)$$

Здесь s – параметр преобразования Лапласа; ξ – параметр преобразования Фурье. Верхние индексы L и F при функциях обозначают, соответственно, изображение данной функции в пространстве преобразований Лапласа и преобразований Фурье

$$f^L(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt; \quad f(t) = L^{-1}[f^L(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} f^L(s) ds;$$

$$f^F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx; \quad f(x) = F^{-1}[f^F(\xi)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^F(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

§2. Решение граничной задачи в изображениях.

Общее решение уравнений (1.6) при нулевых начальных условиях записываем в виде

$$\Phi^{LF} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A(s, \xi) e^{-\frac{z}{\alpha} P} + \tilde{A}(s, \xi) e^{\frac{z}{\alpha} P} \right); \quad \Psi^{LF} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B(s, \xi) e^{-\frac{z}{\beta} S} + \tilde{B}(s, \xi) e^{\frac{z}{\beta} S} \right);$$

$$P = \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}; \quad S = \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}, \quad (2.1)$$

где $A(s, \xi)$; $\tilde{A}(s, \xi)$; $B(s, \xi)$; $\tilde{B}(s, \xi)$ – функции, подлежащие определению из граничных условий. Очевидно, что в силу условий затухания при $z \rightarrow \infty$, имеем $\tilde{A} = \tilde{B} = 0$.

В результате удовлетворения граничным условиям (1.3) получим выражения для напряжения σ_{zz} и перемещения u_z в пространстве изображений по Лапласу и Фурье

$$\sigma_{zz}^{LF} = Q^{LF}(\xi, s) \left[\left(1 + \frac{2\beta^2 \xi^2}{s^2} \right) e^{-\frac{z}{\alpha} P} - \frac{2\beta^2 \xi^2}{s^2} e^{-\frac{z}{\beta} S} \right];$$

$$u_z^{LF} = Q^{LF} \left[-\frac{1}{\alpha} \frac{P}{s^2} e^{-\frac{z}{\alpha} P} + \frac{\xi^2}{S s^2} \beta e^{-\frac{z}{\beta} S} \right]. \quad (2.2)$$

Задачу обращения интегральных преобразований выполним ниже для различных видов действующей нагрузки.

§3. Обращение интегральных преобразований. Общий случай.

Начнем с достаточно общего случая. Полагаем, что внезапно приложенная нагрузка и ее изображения по Лапласу и Фурье имеют вид

$$Q(t, x) = Q_0 H(t) G(x); \quad Q^L(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{s} G(x); \quad Q^{LF}(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{s} G^F(\xi), \quad (3.1)$$

где $H(t)$ – единичная функция Хевисайда $H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Функция $G(x)$ задает характер распределения напряжения вдоль оси x .

Из (2.2) получаем выражение для напряжения

$$\sigma_{zz}^{LF} = Q^{LF}(\xi, s) g^{LF}(s, \xi, z)$$

$$\left[g^{LF}(s, \xi, z) = \left(1 + \frac{2\beta^2 \xi^2}{s^2} \right) e^{-\frac{z}{\alpha} P} - \frac{2\beta^2 \xi^2}{s^2} e^{-\frac{z}{\beta} S} \right],$$

которое для последующих операций перепишем в виде

$$\sigma_{zz}^{LF} = Q_0 G^F(\xi) \bar{g}^{LF}(s, \xi, z);$$

$$\bar{g}^{LF}(s, \xi, z) = \frac{1}{s} g^{LF}(s, \xi, z) = \frac{1}{s} e^{-\frac{z}{\alpha} P} + \frac{2\beta^2 \xi^2}{s^3} e^{-\frac{z}{\alpha} P} - \frac{2\beta^2 \xi^2}{s^3} e^{-\frac{z}{\beta} S}. \quad (3.2)$$

Задача состоит в обращении интегральных преобразований. Если удастся определить оригинал функции $\bar{g}^{LF}(s, \xi, z)$, т.е. функцию $\bar{g}(t, x, z)$, то для получения напряжения $\sigma_{zz}(t, z, x)$ можно будет воспользоваться сверткой преобразования Фурье функций $G(x)$ и $\bar{g}(t, x, z)$ [5]. Ниже предполагается возможность перемены порядка обращения интегральных преобразований.

Для обращения преобразования Фурье функции $\bar{g}^{LF}(s, \xi, z)$ используем табличное соотношение [2]

$$F^{-1}\left(e^{-z\sqrt{\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2 + \xi^2}}\right) = s \frac{z}{\pi\alpha} \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} K_1\left(s \frac{1}{\alpha} \sqrt{x^2 + z^2}\right) \quad (3.3)$$

и известное свойство преобразования

$$F^{-1}\left(\xi^{2n} f^F(\xi)\right) = (-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} f(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Здесь $K_1(t)$ цилиндрическая функция Макдональда [1]. Соотношение (3.3) обращает по Фурье первое слагаемое функции $\bar{g}^{LF}(s, \xi, z)$; свойство (3.4) позволяет обратить второе и третье слагаемые. Как результат после последовательных преобразований получим следующее выражение для оригинала по Фурье функции $\xi^2 s^{-3} e^{-\frac{z}{\alpha} P}$ (второе слагаемое в выражении (3.2)):

$$\frac{1}{s^3} F^{-1}\left(\xi^2 e^{-\frac{z}{\alpha} P}\right) = -\frac{z}{\pi\alpha^3} \frac{\left[\left(x^2(x^2 + z^2) + s^{-2} 2(3x^2 - z^2)\alpha^2 \right) K_1\left(\frac{s}{\alpha} \sqrt{x^2 + z^2}\right) + s^{-1} (3x^2 - z^2) \alpha \sqrt{x^2 + z^2} K_0\left(\frac{s}{\alpha} \sqrt{x^2 + z^2}\right) \right]}{(x^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (3.5)$$

Аналогичное выражение получаем при инверсии $s^{-3} F^{-1}\left(\xi^2 e^{-\frac{z}{\beta} S}\right)$.

Обращения преобразования Лапласа выполняется при помощи табличных соотношений вида

$$L^{-1}[K_1(sb)] = H(t-b) t b^{-1} (t^2 - b^2)^{-1/2} \quad (3.6)$$

и производных от них, получаемых, например, при помощи известных свойств интегрирования оригинала [2]. В результате, используя соотношения (3.3) – (3.6) получим функцию $\bar{g}(t, x, z)$, изображение которой задано выражением (3.2), в следующем виде:

$$\bar{g}(t, x, z) = H\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \frac{tz}{\pi} \left[\frac{\alpha}{r^2 \zeta_\alpha(t, x, z)} - \frac{2\beta^2}{\alpha} \left(\frac{x^2}{r^4 \zeta_\alpha(t, x, z)} + \frac{(3x^2 - z^2)}{r^6} \zeta_\alpha(t, x, z) \right) \right] +$$

$$+H\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \frac{2\beta tz}{\pi} \left(\frac{x^2}{r^4 \zeta_\beta(t, x, z)} + \frac{(3x^2 - z^2)}{r^6} \zeta_\beta(t, x, z) \right) \\ \left[\zeta_\alpha(t, x, z) = \sqrt{\alpha^2 t^2 - r^2}; \quad \zeta_\beta(t, x, z) = \sqrt{\beta^2 t^2 - r^2}; \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \right]. \quad (3.7)$$

Для определения напряжения $\sigma_{zz}(t, x, z)$ теперь можно воспользоваться сверткой преобразования Фурье для функций $G(x)$ и $\bar{g}(t, x, z)$ [5]

$$\sigma_{zz}(t, x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi) \bar{g}(t, \xi, z) d\xi. \quad (3.8)$$

Пусть, например, функция $G(x)$ такова, что нормальная нагрузка приложена в фиксированной области $-l \leq x \leq l$; $l = \text{const}$:

$$Q(t, x) = Q_0 H(t) G(x), \quad G(x) = f(x) [H(x+l) - H(x-l)], \quad (3.9)$$

где $f(x)$ – некоторая функция, задающая распределение нагрузки в указанной области.

В результате из соотношений (3.7) – (3.9) получим выражение для напряжения σ_{zz} в произвольной точке полуплоскости в произвольный момент времени в случае, когда заданная нагрузка действует в фиксированной области границы $[-l, l]$, а ее зависимость от времени задается функцией Хевисайда $H(t)$ (на что будет указывать соответствующий нижний индекс H)

$$\sigma_{zzH}(t, x, z) = Q_0 \frac{1}{\pi} \int_{x-l}^{x+l} \left[f(x-\xi) F^{(\alpha)}(t, \xi, z) + f(x-\xi) F^{(\beta)}(t, \xi, z) \right] d\xi; \quad (3.10)$$

$$F^{(\alpha)}(t, \xi, z) = H\left(\sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2} - \xi\right) \frac{tz}{\pi} \left\{ \frac{\alpha}{\rho^2 \zeta_\alpha(t, \xi, z)} - \frac{2\beta^2}{\alpha} \left[\frac{\xi^2}{\rho^4 \zeta_\alpha(t, \xi, z)} + \frac{(3\xi^2 - z^2)}{\rho^6} \zeta_\alpha(t, \xi, z) \right] \right\};$$

$$F^{(\beta)}(t, \xi, z) = H\left(\sqrt{\beta^2 t^2 - z^2} - \xi\right) \frac{2\beta tz}{\pi} \left(\frac{\xi^2}{\rho^4 \zeta_\beta(t, \xi, z)} + \frac{(3\xi^2 - z^2)}{\rho^6} \zeta_\beta(t, \xi, z) \right); \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + z^2}.$$

Если зависимость нагрузки от времени в (3.8) задана некоторой функцией $\psi(t)$, $t > 0$, достаточно общего вида, искомое напряжение вычисляется на основе теоремы о свертке операционного исчисления с использованием функции $\sigma_{zzH}(t, x, z)$ из формулы (3.10)

$$\sigma_{zz}(t, x, z) \Big|_{\psi(t)} = \int_0^t \sigma_{zzH}(\tau, x, z) \psi(t-\tau) d\tau. \quad (3.11)$$

Упругие перемещения определим при помощи аналогичной процедуры. В частности, из (2.2) и (3.1) получим в пространстве изображений равенства

$$u_z^{LF} = Q_0 G^F(\xi) j^{LF}(s, \xi, z);$$

$$j^{LF}(s, \xi, z) = - \left(\frac{1}{s} + \alpha^2 \frac{\xi^2}{s^3} \right) \frac{e^{-\frac{z}{\alpha} P}}{\alpha P} + \beta^2 \frac{\xi^2}{s^3} \frac{e^{-\frac{z}{\beta} S}}{\beta S}.$$

Обращение функции $j^{LF}(s, \xi, z)$ при помощи свойства (3.5) и табличных соотношений типа

$$F^{-1} \left(\frac{e^{-z \sqrt{\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2 + \xi^2}}}{\alpha \sqrt{\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2 + \xi^2}} \right) = \frac{1}{\pi} K_0 \left(s \frac{1}{\alpha} \sqrt{x^2 + z^2} \right)$$

позволяет окончательно определить функцию $j(t, x, z)$ в виде

$$j(t, x, z) = j_\alpha(t, x, z) + j_\beta(t, x, z) \quad (3.12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} j_\alpha(t, z, x) &= -H(\alpha t - r) \frac{1}{\pi} \left[\frac{\frac{x^2+r^2}{r^2} \ln \frac{\alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 - r^2}}{r} +}{+\frac{r^2-2x^2}{r^3} \left(\sqrt{\alpha t^2 - r^2} - \alpha t \ln \frac{\alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 - r^2}}{r} \right)} \right]; \\ j_\beta(t, z, x) &= H(\beta t - r) \frac{1}{\pi} \left[\frac{\frac{x^2}{r^2} \ln \frac{\beta t + \sqrt{\beta^2 t^2 - r^2}}{r} +}{+\frac{r^2-2x^2}{r^3} \left(\sqrt{\beta^2 t^2 - r^2} - \beta t \ln \frac{\beta t + \sqrt{\beta^2 t^2 - r^2}}{r} \right)} \right], \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \end{aligned} \right\}$$

В случае нагрузки вида (3.9) перемещение определяется формулой

$$u_{zH}(t, x, z) = Q_0 \int_{x-l}^{x+l} f(x-\xi) j(t, \xi, z) d\xi. \quad (3.13)$$

В общем случае, когда зависимость нагрузки от времени определяется некоторой функцией $\psi(t)$, $t > 0$, будем иметь

$$u_z(t, x, z) \Big|_{\psi(t)} = \int_0^t u_{zH}(\tau, x, z) \psi(t-\tau) d\tau. \quad (3.14)$$

Таким образом, соотношения (3.10), (3.11), а также (3.12) – (3.14), дают замкнутое аналитическое решение задачи, сформулированной в §1, для произвольной зависимости действующей нагрузки от времени и ее произвольного распределения вдоль фиксированного участка границы, являющегося областью задания нагрузки.

В случае, когда внезапно приложенная нагрузка (3.1) действует на всей оси x , т.е. $Q(t, x) = Q_0 H(t) f(x)$, выражение для искомого напряжения получаем из (3.8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(t, x, z) &= Q_0 \frac{1}{\pi} \left[H(\alpha t - r) \int_0^{\sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2}} f(x-\xi) F^{(\alpha)}(t, z, \xi) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + H(\beta t - r) \int_0^{\sqrt{\beta^2 t^2 - z^2}} f(x-\xi) F^{(\beta)}(t, z, \xi) d\xi \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $F^{(\alpha)}(t, z, \xi)$, $F^{(\beta)}(t, z, \xi)$ определяются соотношениями (3.10). Аналогично получаем выражение для перемещения.

§4. Переменная область действия нагрузки.

Перейдем к случаю, когда область действия нагрузки изменяется во времени, в частности, расширяется с постоянной скоростью k . Тогда функция $Q(t, x)$ и ее изображения имеют вид

$$Q(t, x) = Q_0 H(kt - |x|); \quad Q^F(t, \xi) = Q_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kt\xi}{\xi}; \quad Q^{LF}(s, \xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{Q_0}{s^2 + k^2 \xi^2}. \quad (4.1)$$

Соответственно, изображение напряжения $\sigma_{zz}^{LF}(s, z, \xi)$ будет следующим:

$$\sigma_{zz}^{LF}(s, z, \xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_0 k \frac{1}{s^2 + k^2 \xi^2} \left[\left(1 + \frac{2\beta^2 \xi^2}{s^2} \right) e^{-\frac{z}{\alpha} P} - \frac{2\beta^2 \xi^2}{s^2} e^{-\frac{z}{\beta} S} \right]. \quad (4.2)$$

Для простоты ограничимся здесь поиском распределения напряжения вдоль оси z , для чего воспользуемся процедурой совместного обращения интегральных преобразований. С этой целью запишем обращение преобразования Фурье на оси симметрии ($x = 0$)

$$\sigma_{zz}^L(s, z, 0) = \frac{2}{\pi} Q_0 k \int_0^\infty \frac{1}{s^2 + k^2 \xi^2} \left[\left(1 + \frac{2\beta^2 \xi^2}{s^2} \right) e^{-\frac{z}{\alpha} P} - \frac{2\beta^2 \xi^2}{s^2} e^{-\frac{z}{\beta} S} \right] d\xi. \quad (4.3)$$

Выполнив замену переменного интегрирования согласно методу Каньяра [8]

$$\xi = s\eta, \quad d\xi = s d\eta, \quad (4.4)$$

получим такое равенство:

$$\sigma_{zz}^L(s, z, 0) = \frac{2}{\pi} Q_0 k \int_0^\infty \frac{1}{(1 + k^2 \eta^2)} \left[\begin{array}{l} \left(1 + 2\beta^2 \eta^2 \right) \frac{1}{s} e^{-\frac{z}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2}} - \\ - 2\beta^2 \eta^2 \frac{1}{s} e^{-\frac{z}{\beta} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2}} \end{array} \right] d\eta.$$

Выполнив обращение по Лапласу и необходимое интегрирование, получаем окончательно следующее выражение:

$$\sigma_{zz}(t, z, 0) = \frac{2}{\pi} Q_0 \frac{1}{k^2} \left[\begin{array}{l} -H(\alpha t - z) \left(-2k\beta^2 \frac{\sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2}}{\alpha z} + (2\beta^2 - k^2) \arctan k \frac{\sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2}}{\alpha z} \right) + \\ + H(\beta t - z) \frac{2\beta^2}{z} \left(-k \frac{\sqrt{\beta^2 t^2 - z^2}}{\beta z} + \arctan k \frac{\sqrt{\beta^2 t^2 - z^2}}{\beta z} \right) \end{array} \right]. \quad (4.5)$$

Выражение (4.5) представляет в аналитическом виде распределение искомого напряжения вдоль оси z в произвольный момент времени в случае, если действующая нагрузка имеет вид (4.1).

Перемещение u_z вдоль оси z определяется из (2.2), (4.1) аналогичным образом и окончательно имеет вид

$$u_z(t, z, 0) = \frac{2}{\pi} Q_0 k \left[-\frac{1}{\alpha} \int_0^{f_\alpha(t, z)} \left(t \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2}}{(1 + k^2 \eta^2)} - z \frac{1 + \alpha^2 \eta^2}{\alpha} \right) d\eta + \right. \\ \left. + \beta \int_0^{f_\beta(t, z)} \left(t \frac{\eta^2}{\sqrt{1 + \beta^2 \eta^2}} - \frac{z}{\beta} \right) d\eta \right]; \quad f_\alpha(t, z) = \frac{\sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2}}{\alpha z}; \quad f_\beta(t, z) = \frac{\sqrt{\beta^2 t^2 - z^2}}{\beta z}. \quad (4.6)$$

Если внезапно возникшая нагрузка такова, что ее область действия расширяется вдоль оси x с переменной скоростью, пропорциональной $x^{1/2}$, функция $Q(t, x)$ имеет вид

$$Q(t, x) = Q_0 H(kt - x^2); \quad Q^L(s, x) = Q_0 \frac{1}{s} e^{-\frac{x^2}{k}s}; \quad Q^{LF}(s, \xi) = Q_0 \frac{\sqrt{\pi k}}{2s\sqrt{s}} e^{-\frac{\xi^2 k}{4s}}. \quad (4.7)$$

Выражение для изображения напряжения приобретает вид

$$\sigma_{zz}^{LF}(s, \xi, z) = Q_0 \frac{\sqrt{\pi k}}{2} \frac{1}{s^{3/2}} e^{-\frac{\xi^2 k}{4s}} \left[\left(1 + \frac{2\beta^2 \xi^2}{s^2} \right) e^{-\frac{z}{\alpha} P} - \frac{2\beta^2 \xi^2}{s^2} e^{-\frac{z}{\beta} S} \right]. \quad (4.8)$$

Выполнив инверсию преобразования Фурье на оси z и сделав замену переменного (4.4), получим формулы

$$\sigma_{zz}^L = Q_0 \sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{1}{s^{1/2}} [R_1^L(s, z) - R_2^L(s, z)]; \quad (4.9)$$

$$R_1^L(s, z) = \int_0^\infty e^{-s \left(\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{z}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} \right)} (1 + 2\beta^2 \eta^2) d\eta; \quad R_2^L(s, z) = 2\beta^2 \int_0^\infty e^{-s \left(\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{z}{\beta} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2} \right)} \eta^2 d\eta.$$

Последовательно выполняя замену переменного $\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{z}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} = t$ в подынтегральном выражении $R_1^L(s, z)$ и $\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{z}{\beta} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2} = t$ в подынтегральном выражении

$R_2^L(s, z)$, а также используя табличное соотношение [2] $L^{-1} \left(\frac{1}{s^{1/2}} e^{-sx} \right) = \frac{H(t-x)}{\sqrt{\pi} \sqrt{t-x}}$ и применяя теорему о свертке операционного исчисления, окончательно получим следующее выражение для напряжения σ_{zz} в произвольной точке оси z :

$$\sigma_{zz}(t, z, x=0) = \frac{\sqrt{k}}{\pi} Q_0 \times \left\{ \begin{aligned} & -H(\alpha t - z) \int_{\frac{z}{\alpha}}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\left[1 + 2\beta^2 \frac{4}{k^2} T_2^{(\alpha)}(\tau, z) \right] (2z - T_3^{(\alpha)}(\tau, z))}{\sqrt{T_2^{(\alpha)}(\tau, z) T_3^{(\alpha)}(\tau, z)}} d\tau + \\ & + H(\beta t - z) \frac{8\beta^2}{k^2} \int_{\frac{z}{\beta}}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\sqrt{T_2^{(\beta)}(\tau, z)} (2z - T_3^{(\beta)}(\tau, z))}{T_3^{(\beta)}(\tau, z)} d\tau \end{aligned} \right\} \\ \left[T_2^{(\gamma)}(\tau, z) = k\tau + 2z^2 - zT_3^{(\gamma)}(\tau, z); \quad T_3^{(\gamma)}(\tau, z) = \sqrt{4k\tau + 4z^2 + \frac{k^2}{\gamma^2}}, \quad \gamma = \alpha, \beta \right]. \quad (4.10)$$

Аналогично определяется перемещение, которое окончательно имеет вид

$$u_z(t, z, x=0) = Q_0 \sqrt{k} \times \left\{ \begin{aligned} & H(\alpha t - z) \int_{\frac{z}{\alpha}}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\sqrt{1 + \alpha^2} \frac{4}{k^2} T_2^{(\alpha)}(\tau, z) (2z - T_3^{(\alpha)}(\tau, z))}{\sqrt{T_2^{(\alpha)}(\tau, z) T_3^{(\alpha)}(\tau, z)}} d\tau - \\ & - H(\beta t - z) \beta \frac{4}{k^2} \int_{\frac{z}{\beta}}^t \frac{(2z - T_3^{(\beta)}(\tau, z))}{\sqrt{1 + \beta^2} \frac{4}{k^2} T_2^{(\beta)}(\tau, z) \sqrt{T_2^{(\beta)}(\tau, z)}} d\tau \end{aligned} \right\}. \quad (4.11)$$

Таким образом, в §§3, 4 в постановке четвертой краевой задачи теории упругости для полуплоскости получены в замкнутом виде точные аналитические решения основных нестационарных задач – формулы (3.10) (3.15), (4.5), (4.6), (4.10), (4.11). При этом формулы (3.10), (3.11), (3.15) определяют напряжение σ_{zz} в произвольной точке полуплоскости, а решения (4.5), (4.10) в произвольной точке оси симметрии задачи. Соответственно формулы (3.12), (3.14) определяют перемещение u_z в произвольной точке полуплоскости, решения (4.6), (4.11) в произвольной точке оси z .

§5. Числовые результаты.

Рассмотрим несколько примеров, при вычислении которых примем следующие исходные числовые значения параметров:

$$Q_0 = 1,0; \alpha = 1,0; \beta = 0,55. \quad (5.1)$$

Пример 1. В выражениях (3.9) и, соответственно, (3.10) и (3.13) положим $f(x) = 1$, так что функция $Q(t, x)$ будет иметь вид

$$Q(t, x) = Q_0 H(t) [H(x+l) - H(x-l)]. \quad (5.2)$$

При таком выборе напряжение σ_{zz} на отрезке $|x| \leq l$ внезапно возникает при $t = 0$ и в дальнейшем остается постоянным во времени и на отрезке. В этом случае правую часть выражения (3.10) удастся проинтегрировать, в результате чего напряжение $\bar{\sigma}_{zzn}(t, x, z)$ предстает в следующем аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{zz}(t, x, z) &= G^{(\alpha)}(t, \xi, z) \Big|_{x-l}^{X^{(\alpha)}(t, x, z_n)} + G^{(\beta)}(t, \xi, z) \Big|_{x-l}^{X^{(\beta)}(t, x, z_n)}; \\ X^{(\alpha)}(t, x, z) &= \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2}, \sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2} < x+l; \\ x+l, \sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2} > x+l \end{cases}; \\ X^{(\beta)}(t, x, z) &= \begin{cases} \sqrt{\beta^2 t^2 - z^2}, \sqrt{\beta^2 t^2 - z^2} < x+l \\ x+l, \sqrt{\beta^2 t^2 - z^2} > x+l \end{cases} \quad (5.3) \\ G^{(\alpha)}(t, \xi, z) &= \frac{\beta^2 \xi \sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2 - \xi^2} \left[2z^2 (\xi^2 + z^2) - \alpha^2 z^2 (\alpha^2 t^2 + z^2) - \alpha^2 \xi^2 (3\alpha^2 t^2 + z^2)^2 \right]}{2\alpha^3 t z_n (z_n^2 + \xi^2)^2} + \\ &+ \frac{2\alpha^4 t^2 z^2 + 2\beta^2 z^4 - 2\beta^2 z^2 \alpha^2 t^2 - 4\beta^2 \alpha^4 t^2 z^2 + \beta^2 \alpha^2 z^4 + 3\beta^2 \alpha^6 t^4}{2\alpha^4 t^2 z^2} \arctan \frac{\alpha t \xi}{z \sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2 - \xi^2}}; \\ G^{(\beta)}(t, \xi, z) &= \frac{\xi \sqrt{\beta^2 t^2 - z^2 - \xi^2} \left[-2z^2 (z^2 + \xi^2) + \beta^2 z^2 (\beta^2 t^2 + z^2) + \beta^2 \xi^2 (3\beta^2 t^2 + z^2)^2 \right]}{2\beta t (z^2 + \xi^2)^2 z} + \\ &+ \frac{(\beta^2 t^2 - z_n^2) (2z_n^2 + 3\beta^4 t^2 - \beta^2 z_n^2)}{2\beta^2 t^2 z^2} \arctan \frac{\beta t \xi}{z \sqrt{\beta^2 t^2 - z^2 - \xi^2}} \Big]. \end{aligned}$$

Аналогично получено выражение для перемещения u_z .

Для конкретных расчетов функция $Q(t, x)$, задающая характер распределения нагрузки, выбрана в следующем виде:

$$Q(t, x) = Q_0[H(t) - H(t-T)]G(x), \quad G(x) = H(x+l) - H(x-l). \quad (5.4)$$

Соответственно, ее изображения по Лапласу и Фурье имеют вид

$$Q^L(s, x) = Q_0\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}\right)G(x); \quad Q^{LF}(s, \xi) = Q_0\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}\right)G^F(\xi).$$

Выбор нагрузки в виде (5.4) означает, что на отрезке $|x| \leq l$ однородное по x напряжение σ_{zz} внезапно возникает при $t = 0$ и остается постоянным в течение конечного интервала времени $0 < t < T$ (так называемая ступенька конечной длительности). В этом случае напряжение $\sigma_{zz}(t, z, x)$ вычисляется по формуле

$$\sigma_{zz}(t, z, x) = \sigma_{zzH}(t, z, x) - \sigma_{zzH}(t-T, z, x) \quad (5.5)$$

$$[\sigma_{zzH}(t, z, x), \sigma_{zzH}(t-T, z, x) \text{ вычисляются по формуле (5.3)}].$$

При вычислениях параметр l (полуширина области действия нагрузки) принят равным 1, временной интервал T равен 2 или бесконечности.

Рис. 2, а, б, в показывают напряжение σ_{zz} , а рис. 2, г, д, е – нормальное перемещение u_z . На рис. 2, а напряжение представлено в зависимости от x ($0 \leq x \leq 10$) в момент времени $t=11$ для нескольких дискретных значений глубины z : 1) $z=1$; 2) $z=5$; 3) $z=8$. На рис. 2, б напряжение как функция z представлено на оси симметрии ($x=0$) в фиксированные моменты времени: 1) $t=3$; 2) $t=6$; 3) $t=10$. Рис. 2, в демонстрирует развитие напряжения во времени в нескольких точках оси z : 1) $z=1$; 2) $z=4$; 3) $z=8$. Сплошной линией показано напряжение для нагрузки конечной длительности $T=2$, пунктиром – для $T \rightarrow \infty$.

Представленные графики позволяют заметить особенности распространения нестационарных волн в направлении оси симметрии задачи (ось z) и в поперечном направлении (в направлении оси x). Так, для $T \rightarrow \infty$ на оси z имеют место скачки напряжения, которые достигаются в момент прихода волны расширения в рассматриваемую точку. При этом указанный скачок имеет всегда одну и ту же единичную амплитуду, но различную длительность постоянной фазы за фронтом, которая существенно зависит от глубины (чем больше z , тем меньше длина скачка см. рис. 2, б). За фронтом волны после упомянутой постоянной фазы имеет место участок спада напряжения и его последующего подъема к моменту прихода волны искажения. С течением времени напряжение стремится к стационарному значению, которое тем меньше, чем больше значение z (рис. 2, в). Распределение напряжения в направлении оси x , как показывают графики рис. 2, а, не сопровождается скачками.

Для нагрузки конечной длительности ($T=2$, сплошные линии графиков) наличие заднего фронта естественно приводит к появлению дополнительной системы скачков, сопровождаемых шлейфом затухающего напряжения.

Рисунки 2, г, д, е представляют перемещение u_z , вычисленное для нагрузки в виде бесконечной ступеньки $T \rightarrow \infty$.

На рис. 2, г показано перемещение на поверхности $z=0$ в моменты времени: 1) $t=1$; 2) $t=2$; 3) $t=5$; 4) $t=9$. Рис. 2, д иллюстрирует распределение развития перемеще-

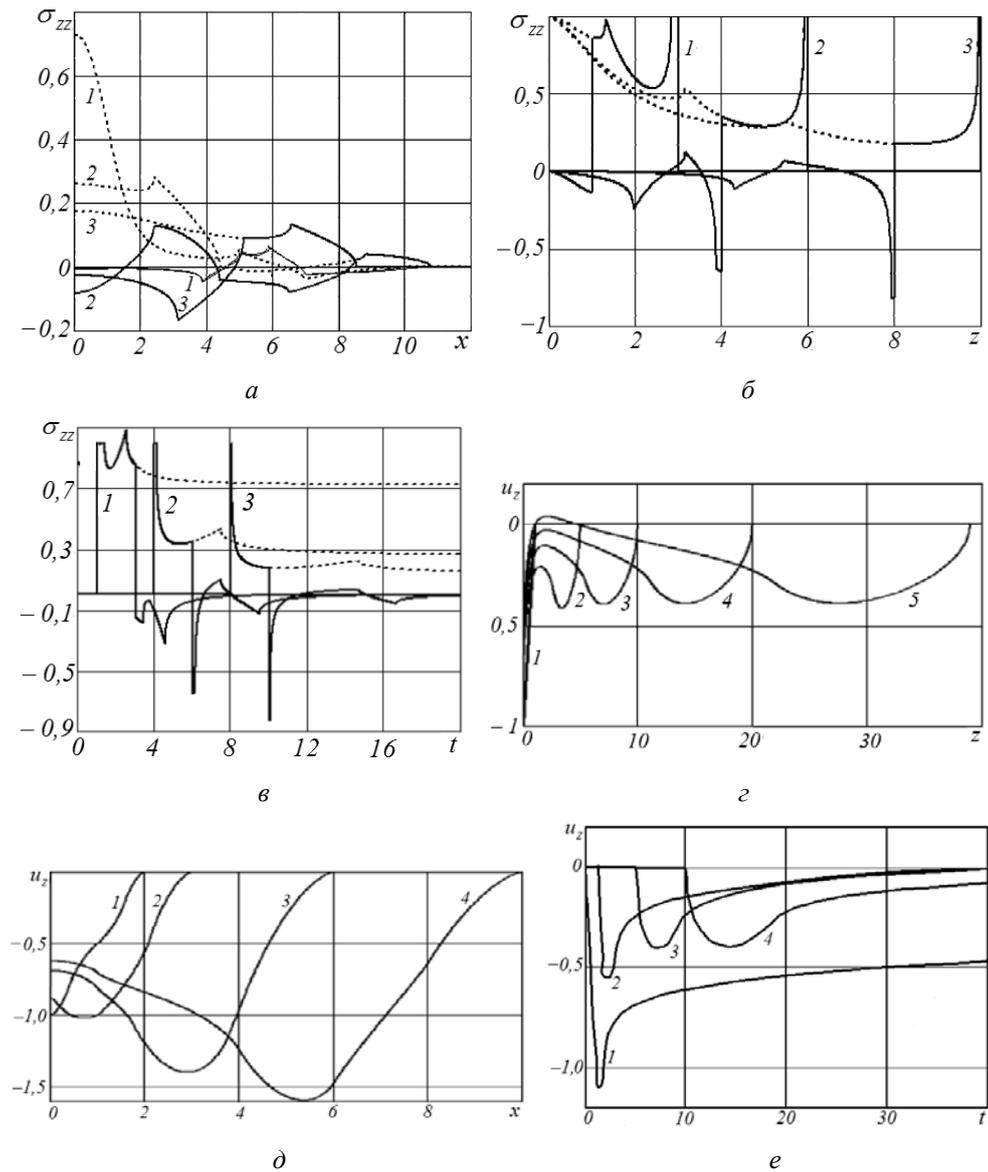


Рис. 2

ния вдоль оси z , т.е. при $x = 0$, в моменты времени 1) $t=1$; 2) $t=5$; 3) $t=10$; 4) $t=20$; 5) $t=39$. Наконец, рис. 2, e представляет развитие перемещения во времени в фиксированных точках оси z : 1) $z=0$; 2) $z=1$; 3) $z=5$; 4) $z=10$. Можно заметить, что распределение перемещения как по времени, так и по пространственным координатам сопровождается наличием максимума, перемещающегося с удалением от места приложения нагрузки.

Пример 2. Внезапно приложенная нагрузка распределена вдоль границы $z=0$ следующим образом:

$$Q(t, x) = Q_0 H(t) \frac{1}{x^2 + k^2}; \quad Q^L(s, x) = Q_0 \frac{1}{s} \frac{1}{x^2 + k^2}; \quad Q^{LF}(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{s} \frac{1}{k} e^{-k\xi}. \quad (5.6)$$

Такой тип нагрузки, в частности, может в определенном приближении при достаточно малых значениях параметра k моделировать нагрузку в виде дельта-функции, которая часто рассматривается в подобных исследованиях [10].

Используя изложенную в §3 процедуру, получим выражение для нормального напряжения в пространстве оригиналов, которое служит исходной формулой для проведения вычислений, т.е.

$$\sigma_{zz}(t, z, x) = \frac{1}{\pi} Q_0 \left[H(\alpha t - \sqrt{x^2 + z^2}) \int_0^{\sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2}} \left(\frac{1}{(x-\xi)^2 + k^2} + \frac{1}{(x+\xi)^2 + k^2} \right) F^{(\alpha)}(t, z, \xi) d\xi + \right. \\ \left. + H(\beta t - \sqrt{x^2 + z^2}) \int_0^{\sqrt{\beta^2 t^2 - z^2}} \left(\frac{1}{(x-\xi)^2 + k^2} + \frac{1}{(x+\xi)^2 + k^2} \right) F^{(\beta)}(t, z, \xi) d\xi \right]. \quad (5.7)$$

Заметим, что если в выражении (5.7) положить $x=0$, $\alpha t = z + \varepsilon$, в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим, что скачок напряжения в момент прихода волны расширения в произвольную точку оси z равен

$$\sigma_{zz}(z) \Big|_{x=0, t=z/\alpha} = Q_0 \frac{\alpha}{k^2}. \quad (5.8)$$

Таким образом, указанный скачок не зависит от z .

При вычислениях по формуле (5.7) использована квадратурная формула трапеций. Шаг интегрирования Δt изменялся, пока результаты счета при Δt и $\Delta t/2$ не совпадали с приемлемой точностью.

Ниже на рисунках вычисленные значения напряжения $\sigma_{zz}(t, z, x)$ в целях удобства сравнения умножены на k^2 , так что при $x=z=0$ всегда имеет место единичное значение $k^2\sigma_{zz}$. На рис. 3, а показано распределение напряжения в направлении оси x в момент времени $t=8,0$ при нескольких дискретных значениях глубины z : 1) $z=0$; 2) $z=2$; 3) $z=4$; 4) $z=6$.

Сплошные кривые построены при значении $k=1$, пунктирные – при $k=0,1$.

Можно заметить, что при любом значении k в выбранный фиксированный момент времени максимум напряжения с ростом z сдвигается с оси z . Рис. 3, б представляет напряжение как функцию глубины для дискретных моментов времени:

$k=1$: 1) $t=0,5$; 2) $t=2$; 3) $t=6$; 4) $t=9$;

$k=0,1$: 5) $t=1$; 6) $t=2,5$; 7) $t=6,5$; 8) $t=9,5$.

На рисунке сплошные кривые отвечают $k=1$, пунктирные – $k=0,1$. Различные значения времени для различных k выбраны, чтобы избежать затруднений при анализе вследствие возможного слияния кривых на рисунке. Пиковые значения на-

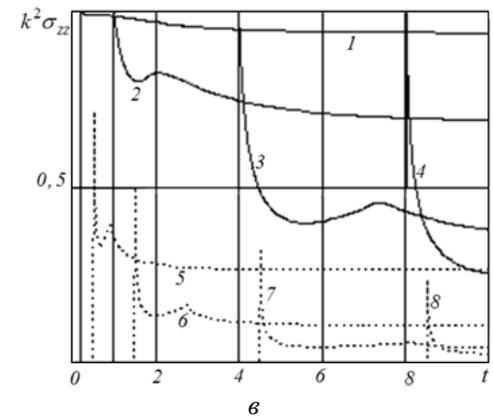
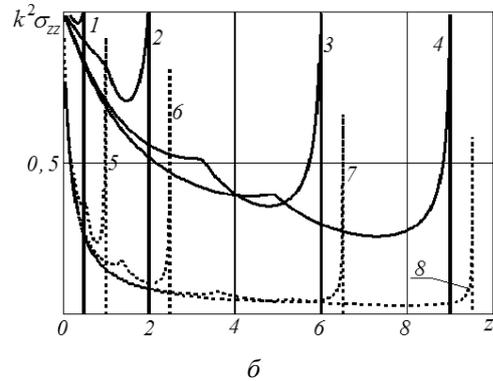
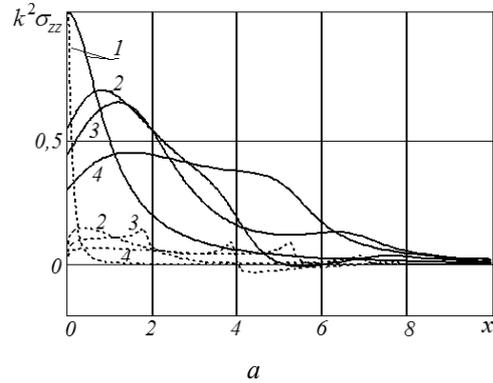


Рис. 3

пряжения, отвечающие имеющему место скачку в момент прихода фронта волны расширения, на рисунке выглядят меньше 1, что не соответствует полученному значению (5.8). Причина расхождения объясняется тем, что квадратурная формула при вычислении функций с большими градиентами в окрестности пиковых точек дает погрешность, так как ширина пика чрезвычайно мала. Фактический скачок напряжения $k^2\sigma_{zz}$ всегда равен 1. Как и ранее, наблюдаемый на графиках излом кривой определяет положение фронта волны искажения. На рис. 3, с представлено напряжение (как функция времени), вычисленное в нескольких точках оси z :

$$k = 1: \quad 1) z = 0,2; \quad 2) z = 1; \quad 3) z = 4; \quad 4) z = 8;$$

$$k = 0,1: \quad 5) z = 0,5; \quad 6) z = 1,5; \quad 7) z = 4,5; \quad 8) z = 8,5.$$

Сплошные кривые отвечают $k = 1$, пунктирные – $k = 0,1$. Как и в случае предыдущего рисунка, вычисления методом квадратур не определяют точное значение скачка напряжения в момент прихода фронта волны расширения в рассматриваемую точку, которое согласно (5.8) и (5.1) равно 1. Приведенные графики показывают, что скачкообразно возникающее в конкретной точке в момент прихода фронта волны расширения напряжение за фронтом резко затухает и со временем стремится к стационарному значению. Момент появления волны искажения определяется изломом кривой в соответствующем месте.

Пример 3. Примем, что нагрузка распространяется вдоль границе полуплоскости с постоянной скоростью k , т.е.

$$Q(t, x) = Q_0 H(kt - |x|).$$

Тогда напряжение $\sigma_{zz}(t, z, 0)$ на оси z вычисляется при помощи формулы (4.5). На рис. 4, а представлено вычисленное напряжение как функция z для фиксированных моментов времени $t = 2,0$ и $t = 10$ при различных значениях параметра k , т.е. $k = 0,1; 0,5; 1,0; 5,0; 10,0$.

Кривые, соответствующие $t = 2$, на рисунке расположены в том же порядке, что и при $t = 10$, поэтому их нумерация опущена.

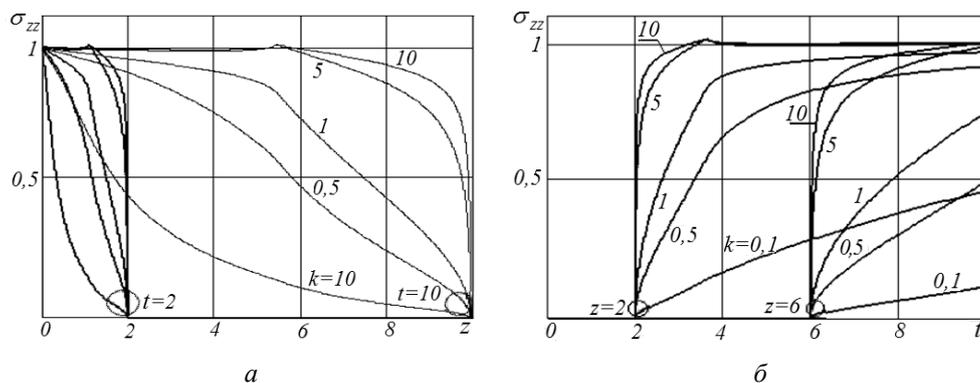


Рис. 4

Рисунок показывает характер распределения напряжения от первоначальной точки возбуждения $z = 0$ до фронта волны в зависимости от значения параметра k (скорости движения нагрузки). При малых скоростях k скачок напряжения на фронте волны расширения (в точках $z = 2$ и $z = 6$, соответственно) практически не заметен и напряжение плавно изменяется, достигая единицы в точке $z = 0$. При больших k картина иная: на фронте волны значение напряжения меняется практически скачкообразно, а на отрезке $0 < z < \beta t$ имеет место область постоянного значения напряжения.

На рис. 4, б напряжение представлено в зависимости от t в фиксированных точках оси z ($z = 2; 6$) для тех же значений k . Можно заметить, что при больших значениях k напряжение в точке возрастает практически скачкообразно и с момента прихода фронта волны искажения становится постоянным. Малые k обуславливают медленный рост напряжения, скачок напряжения мало заметен.

Пример 4. Область действия нагрузки расширяется вдоль оси x с переменной скоростью, пропорциональной $x^{-1/2}$. В этом случае функция $Q(t, x)$ имеет вид $Q(t, x) = Q_0 H(kt - x^2)$, а напряжение на оси z вычисляется при помощи формулы (4.10).

Рис. 5, а представляет вычисленное напряжение как функцию z в фиксированные моменты времени $t = 2,0$ и $t = 10$ для нескольких значений параметра скорости k : $k = 0,1; 0,5; 1,0; 5,0; 10,0$.

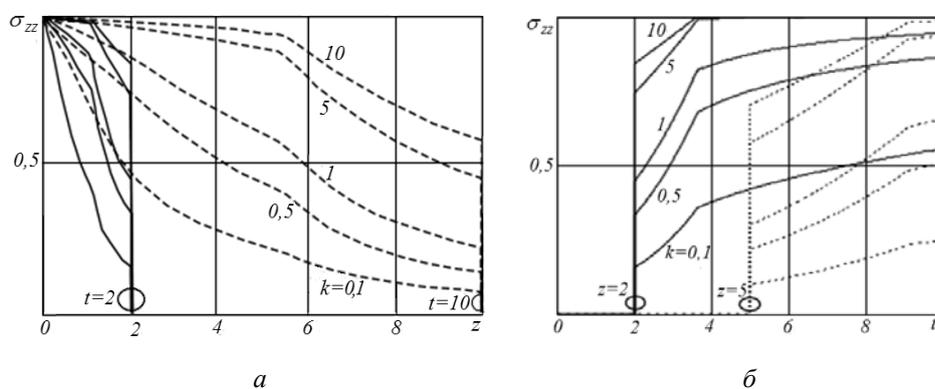


Рис. 5

Сплошные кривые представляют напряжение при $t = 2,0$, пунктирные – $t = 10$. На рисунке значения k указаны для случая $t = 10$, для второго случая кривые расположены в том же порядке. Можно проследить распределение напряжения от исходной точки и до фронта волны, на котором значение скачка существенно зависит от значения параметра скорости k .

Наконец, на рис. 5, б показано напряжение в фиксированных точках оси z ($z = 2, z = 5$) в зависимости от времени для тех же значений параметра k . Сплошные кривые соответствуют напряжению в точке $z = 2$, пунктирные – $z = 5$. Приведенные кривые демонстрируют: скачок напряжения в момент прихода волны расширения в рассматриваемую точку; момент прихода фронта волны искажения (излом на графике) и развитие напряжения со временем до стационарного значения, которое достигается тем позже, чем меньше значение параметра k .

§6. Сравнение результатов решения 1-й и 4-й граничных задач.

Напомним, что использованная формулировка граничных условий (1.3) в отличие от первой краевой задачи теории упругости (задание вектора напряжений на границе) исключает возникновение поверхностных волн. Однако, можно ожидать, что на удалении от границы полученное решение и решение первой краевой задачи будут отличаться незначительно. В этом можно убедиться, сравнивая указанные решения. На рис. 6, а, б представлено напряжение, вычисленное для расширяющейся с постоянной скоростью k нагрузки (см. решение (4.5)) в постановке данной статьи (пунктир) и в постановке 1-й краевой задачи [16] (сплошная линия). При этом рис. 6, а иллюстрирует распределение напряжения вдоль оси z при различных значениях скорости k в конкретный момент времени $t = 15$; рис. 6, б показывает напряжение как функцию

времени в точках $z = 5$ и $z = 15$. Можно заметить, что различие в значениях напряжений, вычисленных согласно первой и четвертой краевых задач, в целом невелико, и это отличие тем меньше, чем ближе к волновому фронту, а также чем больше скорость расширения нагрузки k и чем больше расстояние от границы. Например, в точке $z = 15$ кривые, отвечающие одной и другой постановкам, практически сливаются.

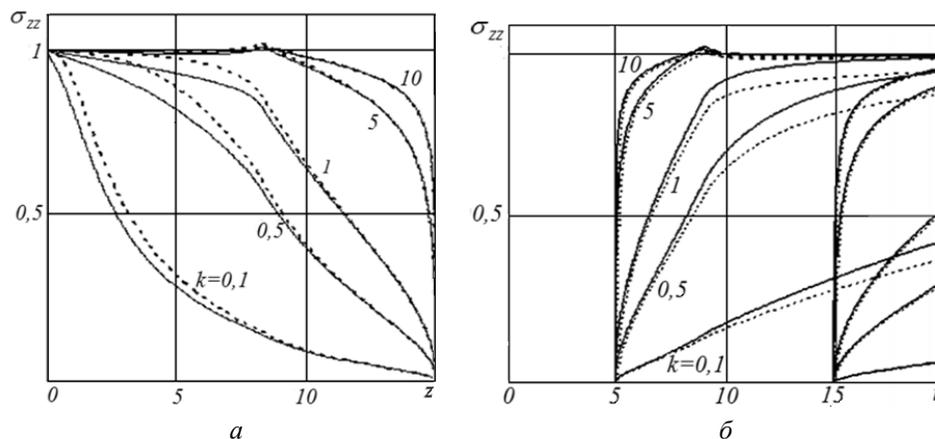


Рис. 6

Заключение.

В работе предложен подход к исследованию нестационарных волновых процессов в упругой полуплоскости при смешанных граничных условиях четвертой краевой задачи теории упругости. Применяются интегральные преобразования Лапласа и Фурье, последовательное обращение которых либо использование метода Каньяра для их совместного обращения дает возможность получить искомое точное решение задачи (напряжение, перемещение) в замкнутом аналитическом виде: в виде аналитического выражения, содержащего элементарные функции, или в виде определенного интеграла от элементарных функций. Развитый подход позволяет выполнить исследование для широкого ассортимента действующих нагрузок. В качестве примеров рассмотрены нагрузки, зависимость которых от времени определяется функцией Хевисайда, однако полученные результаты могут быть использованы в качестве исходных при рассмотрении других временных зависимостей. На ряде конкретных примеров исследованы особенности возникающих волновых процессов как в конкретных точках полуплоскости, так и вдоль той или другой оси в функции времени.

Полезность получения точных аналитических решений рассмотренного типа состоит еще и в том, что такие решения могут служить ориентиром при разработке специализированных численных методов. Известно, что наличие больших градиентов искомых решений, таких как скачки напряжений, обуславливают трудности достижения приемлемой точности вычисления упомянутых скачков при использовании численных методов. Для отработки эффективных численных подходов, для которых тип граничных условий не влияет на эффективность решения, точные решения определенных задач могут оказаться весьма полезными.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано підхід до дослідження нестационарних хвильових процесів у пружній півплощині при змішаних граничних умовах четвертої граничної задачі теорії пружності. Застосовано інтегральні перетворення Лапласа і Фур'є, послідовне обернення яких або використання методу Каньяра для їхнього спільного обернення дає можливість одержати розв'язок (напруження, переміщення) у замкнутому аналітичному вигляді. Підхід дозволяє виконати дослідження для різноманітного асортименту діючих навантажень.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1966. – 296 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. В 2-х т.; Т1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – М.: Наука, ГИФМЛ, 1969. – 344 с.
3. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 352 с.
4. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 308 с.
5. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 524 с.
6. Кубенко В.Д. Нестационарное контактное взаимодействие твердого тела с упругой средой (плоская задача) // Прикл. механика. – 2012. – **48**, № 5. – С. 5 – 78.
7. Механика контактных взаимодействий / Под ред. И.И. Воровича, В.М.Александрова. – М.: Физматгиз, 2001. – 670 с.
8. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
9. Снеддон Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 220 с.
10. Bresse L.F., Hutchins D.A. Transient generation of elastic waves in solids by a disk-shaped normal force source // J. Acoust. Soc. Amer. – 1989. – **86**, N 2. – P. 810 – 817.
11. De A., Roy A. Transient response of an elastic half space to normal pressure acting over a circular area on an inclined plane // J. Eng. Math. – 2012. – **74**. – P. 119 – 141.
12. Duffy D.G. Transform methods for solving partial differential equations. – New York: Chapman & Hall/CRC Press., 2004. – 728p.
13. Eason G. The stresses produced in a semi-infinite solid by a moving surface force // Int. J. Eng. Sci. – 1965. – **2**, N 6. – P. 581 – 609.
14. Eason G. The displacements produced in an elastic half-space by a suddenly applied surface force // J. Inst. Math. Appl. – 1966. – **2**. – P. 299 – 326.
15. Ghosh S.C. Disturbance produced in an elastic half-space by impulsive normal pressure // Pure and Appl. Geophysics. – 1970. – **80**, N 1. – P. 71 – 83.
16. Kubenko V.D. Stress State of an Elastic Half-Plane under Nonstationary Loading // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 121 – 129.
17. Kubenko V.D., Janchevsky I.V. Nonstationary Load on the Surface of an Elastic Half-Strip // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 3. – P. 303 – 310.
18. Kubenko V. D., Yanchevsky I.V. Nonstationary distributed axisymmetric load on an elastic half-space // J. Eng. Math., DOI 10.1007/s10665-014-9778-2.
19. Kubenko V.D. On a non-stationary load on the surface of a semiplane with mixed boundary conditions // ZAMM. – 2015. – **95**, N 12. – P. 1448 – 1460.
20. Kutzenko A.G., Ulitko A.F., Oliyuk V.N. Displacements of the elastic half-space surface caused by instantaneous axisymmetric loading // Int. J. Fluid Mech. Res. – 2001. – **28**, N 1 – 2. – P. 258 – 273.
21. Laturelle F.G. Finite element analysis of wave propagation in an elastic half-space under step loading // Comput. and Struct. – 1989. – **32**, N 3 – 4. – P. 721 – 735.
22. Laturelle F.G. The stresses produced in an elastic half-space by a normal step loading over a circular area: analytical and numerical results // Wave Motion. – 1990. – **12**. – P. 107 – 127.
23. Laturelle F.G. The stresses produced in an elastic half-space by a pressure pulse applied uniformly over a circular area: role of the pulse duration // Wave Motion. – 1991. – **14**. – P. 1 – 9.
24. Meish V.F., Kepenach N.P. Nonstationary Dynamics of Longitudinally Stiffened Cylindrical Shells of Elliptic Cross Section // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 6. – P. 83 – 89.
25. Mitra M. Disturbance produced in an elastic half-space by impulsive normal pressure // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1964. – **60**, N 3. – P. 683 – 696.
26. Molotkov L. A. On the vibrations of a homogeneous elastic half-space under the action of a source applied to a uniformly expanding circular region // J. Appl. Math. and Mech. – 1967. – **31**. – P. 232 – 243.
27. Roy A. Response of an elastic solid to non-uniformly expanding surface loads // Int. J. Eng. Sci. – 1979. – **17**. – P. 1023 – 1038.
28. Singh S.K., Kuo J.T. Response of an elastic half-space to uniformly moving circular surface load // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1970. – **37**, N 1. – P. 109 – 115.

Поступила 14.11.2014

Утверждена в печать 22.12.2015